Ensino & Informação Revista®
Prof.: Altamir A. R. Araldi

Exercício 7)

a) Esboce um histograma onde a média e a mediana coincidem. Existe alguma classe de histograma onde isso sempre acontece?

b) Esboce os histogramas de três variáveis **X**, **Y** e **Z** com mesma média aritmética, mas com variâncias ordenada em ordem crescente (ou decrescente).

Resposta:

(a) Em qualquer Distribuição de Frequências cujo gráfico seja SIMÉTRICO, as Medidas de Tendência Central Mediana (Md); Média $\overline{X}$; e a Moda (Mo) coincidirão. Veja Figura 1 abaixo.

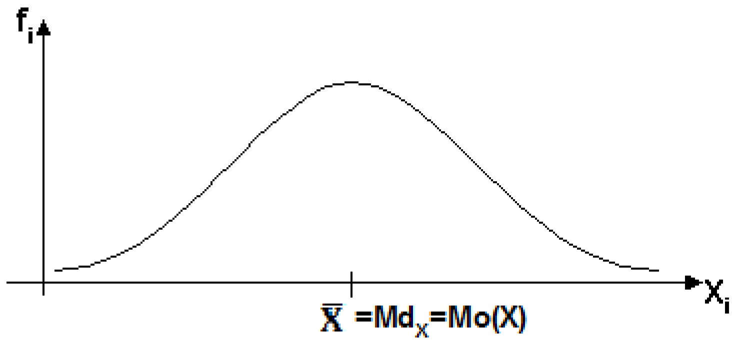


Figura 1: Curva Simétrica

Outro exemplo de Distribuição Simétrica é a Distribuição Uniforme (ver também, Distribuição Teórica de Probabilidade: a Distribuição Uniforme!).

Exemplo 01: **X**={1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,3,3,3,3,3} Uma **Série Simples** onde os dados são Discretos (ver Variável Aleatória Discreta), por conveniência, já estão ordenados e que temos um número **n=15 ÍMPAR** de elementos. Assim a Md(X)=2=$\overline{X}$.

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+1+1+1+1+2+2+2+2+2+3+3+3+3+3}{15} = 2$$

OBSERVAÇÃO: Note-se que aqui - diferente do exemplo anterior em que tanto a Média, mediana e Moda coincidiam - temos três (3) Modas Mo_1=1 (O "1" é observado 5 vezes); Mo_2=2 (O "2" é observado 5 vezes); e Mo_3=3 (O "3" é observado 5 vezes). Suponhamos, sem perda de generalidade, que **X** consiste numa **População**. Assim, os elementos "1", "2" e "3" têm a mesma Probabilidade serem sorteados seja para constituírem uma Amostra com, por exemplo, 5 elementos. Todos estes três elementos têm a mesma Probabilidade de serem sorteados ao acaso – o que constitui o fato da **Série Simples X** ser confundida com uma Distribuição Uniforme de Probabilidade onde veremos que a Média e Mediana Coincidem.

Mas será que em toda Séria Simples semelhante ao do **Exemplo 01** a Média e Mediana coincidem? A Resposta é Não. Vejamos o **Contra-Exemplo 01** a seguir.

X={1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,6,6,6,6,6}. Note que a Mediana (ponto que divide o conjunto de dados 50% á esquerda e 50% dos dados à direita) ainda é Md(X)=2. Porém a Média é

$$\boldsymbol{\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+1+1+1+1+2+2+2+2+2+6+6+6+6+6}{15} = \frac{45}{15} = 3}$$

Veja **Figura 2**. Os $\boldsymbol{f_i}$ são as Freqüências Absolutas em Percentual.

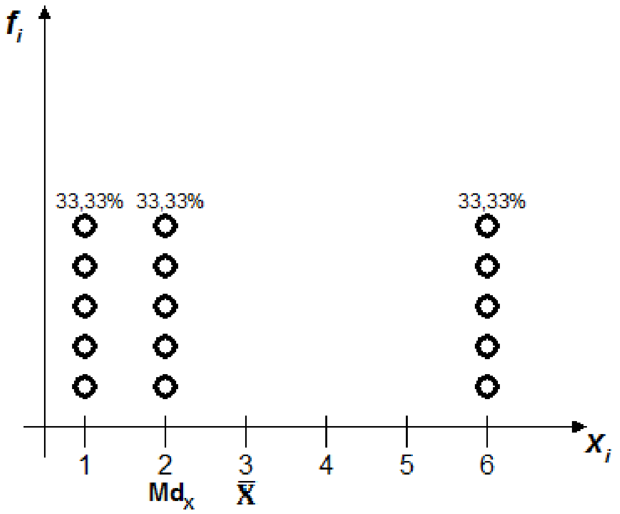


Figura 2: Histograma para Série Simples X

Aparentemente a Distribuição Uniforme (de Probabilidade) poderia nos dar esta idéia falsa de que Média e Mediana coincidem para uma **Série Simples**. Note que no **Exemplo 01** foi um mero acaso dos dados que nos levou a Média e Mediana serem iguais. Não podemos esquecer que a Média tem a Desvantagem como Medida de Tendência Central de ser afetada por Valores Extremos Grandes como no **Contra Exemplo 01** em que aparecem 5 observações do valor "6" que é significativamente grande se comparado aos valores "1" e "2".

Exemplo 03: Y={1,1,1,1,1,49}. Veja o quanto o valor 49 afeta o valor da Média: Média(X) = 54/6 = 9 valor muito distante dos demais valores na maioria iguais a "1" – por esta razão é que o valor da **Média de X** igual a **9** não ser representativo da Série Simples como um todo.

Exemplo 02: Na Distribuição de Frequências para uma Variável Contínua onde se escolheu o Número de Classes igual a 5, vemos que se levarmos para o enfoque de Distribuição Teórica de Probabilidade, isto acarretaria afirmar, sem dúvida, que se trata de Uma Distribuição Uniforme onde se tem 20% de probabilidade para cada classe. Veja **Figura 3** a seguir e nos perguntemos se como está mostrado na figura, sempre a Média e Mediana irão coincidirem. A **Resposta é SIM**. Observe que se os **Pontos Médios de Classe** P_i são os valores que aparecem no Cálculo da Média com a observação de que **f(xi)** são as Frequências Absolutas com a notação alternativa f_i:

$$\bar{X} = \frac{\sum P_i \cdot fi}{n}$$

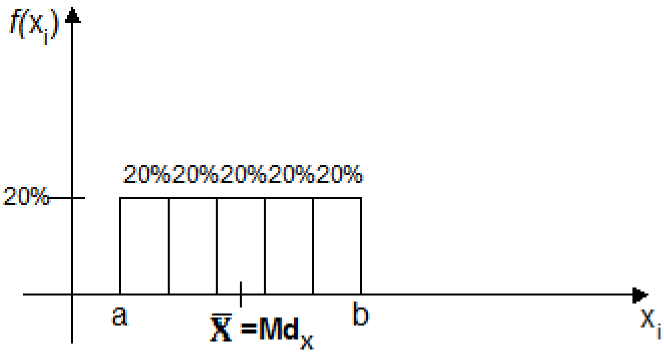


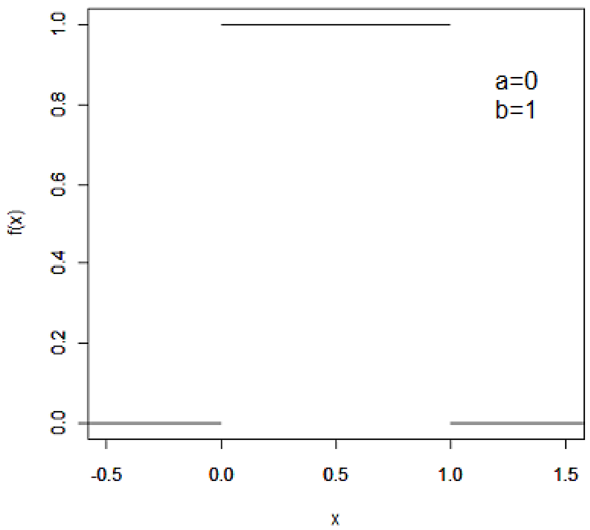
Figura 3: Distribuição Uniforme

OBSERVAÇÃO:

Definição: Uma variável aleatória X tem distribuição Uniforme no intervalo $[a,b]$ se sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O gráfico abaixo ilustra a função densidade da distribuição uniforme com parâmetros a=0 e b=1.

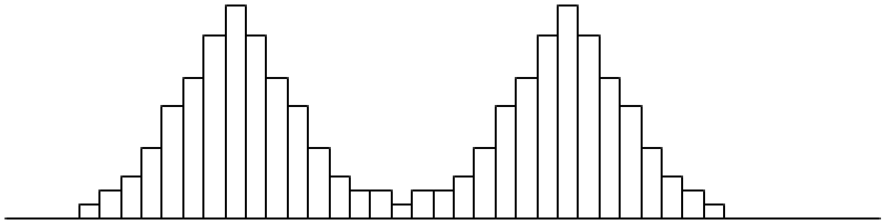


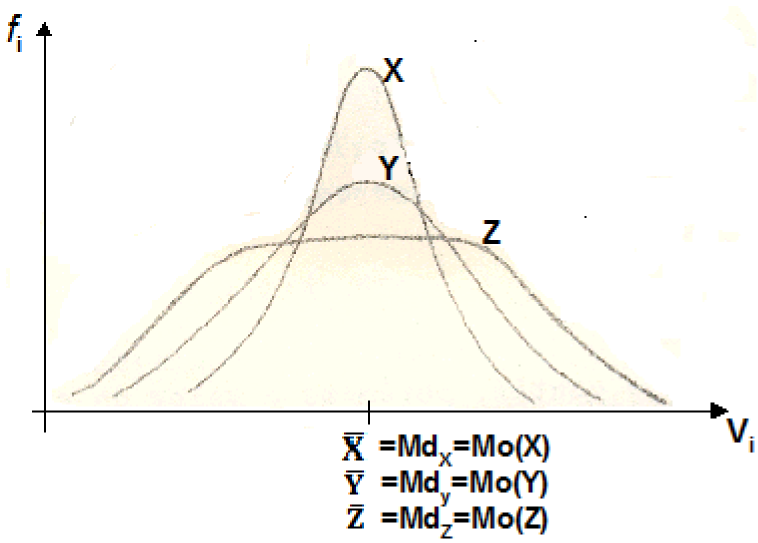
O valor esperado de uma variável aleatória X com distribuição uniforme é dado por

$$\mathbb{E}(X) = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{a+b}{2}$$

O Valor Esperado ou Esperança Matemática E(X) é a "Média da Distribuição de Probabilidade"

OBSERVAÇÃO: Lembremos que no **Exercício 08**, embora o Gráfico da Distribuição de Frequência seja Simétrico, a Média mesmo coincidindo com a Mediana, esta **Média não é REPRESENTATIVA DA TOTALIDADE DOS DADOS**. Veja a Figura (do Exercício 08) abaixo.





Item (B): Para esboçar os **Histogramas** de três variáveis **X**, **Y** e **Z** com mesma Média (Aritmética), mas com Variâncias ordenada em ordem crescente (ou decrescente) devemos pensar em três Histogramas (Gráficos) Simétricos. Vejam a **Figura 4** abaixo

Figura 4: Distribuições X, Y e Z

Suponhamos que se trata de um População. Assim a Notação para **Variância** de **X** é $\boldsymbol{\sigma^2(X)}$. E, por conseguinte, $\boldsymbol{\sigma(X)}$ (que é a Raiz Quadrada da Variância) corresponde ao **Desvio Padrão** da Variável X.

Vemos que os dados estão mais concentrados em torno da Média para a Variável **X**. Vemos que os dados da Variável **Y** têm uma **maior Dispersão** em relação aos dados da Variável **X**. Por fim, vemos que os dados da Variável **Z** têm uma **maior Dispersão** se compararmos aos dados da Variável **Y**. Então, formalmente, podemos escrever:

$\boldsymbol{\sigma}^2(\boldsymbol{X}) < \boldsymbol{\sigma}^2(\boldsymbol{Y}) < \boldsymbol{\sigma}^2(\boldsymbol{Z})$. Ou, equivalentemente: $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X}) < \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X}) < \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Z})$.

Lembrando, $\boldsymbol{\sigma}^2(\boldsymbol{X}) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(xi - \bar{X})^2}{n}$