Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno

William E. Boyce

Professor Emérito da cátedra Edward P. Hamilton

Richard C. DiPrima

Anteriormente Professor da cátedra Eliza Ricketts Foundation do Departamento de Ciências Matemáticas do Rensselaer Polytechnic Institute

Tradução e Revisão Técnica

Valéria de Magalhães Iório

Fundação Educacional Serra dos Órgãos, Teresópolis



Os autores e a editora empenharam-se para citar adequadamente e dar o devido crédito a todos os detentores dos direitos autorais de qualquer material utilizado neste livro, dispondo-se a possíveis acertos caso, inadvertidamente, a identificação de algum deles tenha sido omitida.

Não é responsabilidade da editora nem dos autores a ocorrência de eventuais perdas ou danos a pessoas ou bens que tenham origem no uso desta publicação.

ELEMENTARY DIFFERENTIAL EQUATIONS AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS, NINTH EDITION

Copyright © 2009 John Wiley & Sons, Inc.

All Rights Reserved. This translation is published under license.

Direitos exclusivos para a língua portuguesa Copyright © 2010 by LTC − Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda. Uma editora integrante do GEN | Grupo Editorial Nacional

Reservados todos os direitos. É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, no todo ou em parte, sob quaisquer formas ou por quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia, distribuição na internet ou outros), sem permissão expressa da Editora.

Travessa do Ouvidor, 11 Rio de Janeiro, RJ – CEP 20040-040 Tel.: 21-3543-0770 / 11-5080-0770 Fax: 21-3543-0896 ltc@grupogen.com.br www.ltceditora.com.br

Capa: Olga Loureiro

Editoração Eletrônica: Ganthares

CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO-NA-FONTE SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ

B784e

Boyce, William E., 1930-

Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno / William E. Boyce, Richard C. DiPrima ; tradução e revisão Valéria de Magalhães Iório. - Rio de Janeiro : LTC, 2010.

Tradução de: Elementary differential equations and boundary value problems, 9th ed Apêndices

Inclui exercícios e respectivas respostas

Inclui índice

ISBN 978-5-216-1756-3

Equações diferenciais.
 Problemas de valores de contorno.
 DiPrima, Richard C. II.
 Título.

10-1666.

CDD: 515.35 CDU: 517.9

SUMÁRIO

	Capítulo 1	Introdução 1
		 1.1 Alguns Modelos Matemáticos Básicos; Campos de Direção 1 1.2 Soluções de Algumas Equações Diferenciais 8 1.3 Classificação de Equações Diferenciais 15 1.4 Notas Históricas 20
1)	Capítulo 2	Equações Diferenciais de Primeira Ordem 23
		 Equações Lineares; Método dos Fatores Integrantes 23 Equações Separáveis 31 Modelagem com Equações de Primeira Ordem 38 Diferenças entre Equações Lineares e Não Lineares 52 Equações Autônomas e Dinâmica Populacional 60 Equações Exatas e Fatores Integrantes 72 Aproximações Numéricas: o Método de Euler 77 O Teorema de Existência e Unicidade 85 Equações de Diferenças de Primeira Ordem 93
	Capítulo 3	Equações Lineares de Segunda Ordem 105
2		 3.1 Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes 105 3.2 Soluções de Equações Lineares Homogêneas; o Wronskiano 111 3.3 Raízes Complexas da Equação Característica 121 3.4 Raízes Repetidas; Redução de Ordem 127 3.5 Equações Não Homogêneas; Método dos Coeficientes Indeterminados 134 3.6 Variação dos Parâmetros 143 3.7 Vibrações Mecânicas e Elétricas 148 3.8 Vibrações Forçadas 160
	Capítulo 4	Equações Lineares de Ordem Mais Alta 171
	and a subservation of the	 4.1 Teoria Geral para Equações Lineares de Ordem n 171 4.2 Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes 176 4.3 O Método dos Coeficientes Indeterminados 183 4.4 O Método de Variação dos Parâmetros 186
	Capítulo 5	Soluções em Série para Equações Lineares de Segunda Ordem 191
3		 5.1 Revisão de Séries de Potências 191 5.2 Soluções em Série Perto de um Ponto Ordinário, Parte I 196 5.3 Soluções em Série Perto de um Ponto Ordinário, Parte II 204 5.4 Equações de Euler; Pontos Singulares Regulares 209 5.5 Soluções em Série Perto de um Ponto Singular Regular, Parte I 217 5.6 Soluções em Série Perto de um Ponto Singular Regular, Parte II 222 5.7 Equação de Bessel 228
	Capítulo 6	A Transformada de Laplace 239
1	1	 6.1 Definição da Transformada de Laplace 239 6.2 Solução de Problemas de Valores Iniciais 245 6.3 Funções Degrau 253 6.4 Equações Diferenciais sob a Ação de Funções Descontínuas 259 6.5 Funções de Impulso 265 6.6 A Convolução 270

Capítulo 7	Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem 277	
	7.1 Introdução 277	
	7.2 Revisão de Matrizes 283	
	7.3 Sistemas de Equações Lineares Algébricas; Independência Linear.	
5	Autovalores, Autovetores 291	
)	7.4 Teoria Básica de Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem 299	
	7.5 Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes 303	
	7.6 Autovalores Complexos 312 7.7 Matrizes Fundamentais 322	
	7.7 Matrizes Fundamentals 322 7.8 Autovalores Repetidos 328	
	7.9 Sistemas Lineares Não Homogêneos 336	
Capítulo 8	Métodos Numéricos 345	
	8.1 O Método de Euler ou Método da Reta Tangente 345	
	8.2 Aprimoramentos no Método de Euler 353	
	8.3 O Método de Runge-Kutta 358	
	8.4 Métodos de Passos Múltiplos 361	
	8.5 Mais sobre Erros; Estabilidade 366	
	8.6 Sistemas de Equações de Primeira Ordem 373	
Capítulo 9	Equações Diferenciais Não Lineares e Estabilidade 377	
	9.1 O Plano de Fase: Sistemas Lineares 377	
	9.2 Sistemas Autônomos e Estabilidade 386	
	9.3 Sistemas Localmente Lineares 393	
	9.4 Espécies em Competição 403	
	9.5 Equações Predador-Presa 413	
	9.6 O Segundo Método de Liapunov 420	
	 9.7 Soluções Periódicas e Círculos Limites 428 9.8 Caos e Atratores Estranhos: as Equações de Lorenz 438 	
Capítulo 10	Equações Diferenciais Parciais e Séries de Fourier 447	
	10.1 Problemas de Valores de Contorno para Fronteiras com Dois Pontos 447	
	10.2 Séries de Fourier 452	
	10.3 O Teorema de Convergência de Fourier 460	
	10.4 Funções Pares e Ímpares 466	
	10.5 Separação de Variáveis; Condução de Calor em uma Barra 472	
	10.6 Outros Problemas de Condução de Calor 478	
	10.7 A Equação de Onda: Vibrações de uma Corda Elástica 486	
	10.8 A Equação de Laplace 497	
	Apêndice A Dedução da Equação de Calor 505 Apêndice B Dedução da Equação de Onda 508	
Capítulo 11	Problemas de Valores de Contorno e Teoria de	
onpitalo 11	Sturm-Liouville 511	
	11.1 A Ocorrência de Problema de Valores de Contorno em Fronteiras com Dois Pontos 511	
	11.2 Problemas de Valores de Contorno de Sturm-Liouville 517	
	11.2 Problemas de Valores de Contorno Não Homogêneos 527	
	11.4 Problemas de Sturm-Liouville Singulares 538	
	 11.4 Problemas de Starm-Elouvine Singulates 338 11.5 Observações Adicionais sobre o Método de Separação de Variáveis: uma Expansão em Funções de Bessel 543 	
	11.6 Séries de Funções Ortogonais: Convergência na Média 548	
	Pagnastas das Problemas 555	

Respostas dos Problemas 555

Índice 605

1

Introdução

Neste capítulo vamos dar perspectiva ao nosso estudo de equações diferenciais de diversas maneiras diferentes. Primeiro, vamos usar dois problemas para ilustrar algumas das ideias básicas a que retornaremos com frequência e que serão aprofundadas ao longo deste livro. Indicamos, mais adiante, diversos modos de classificar equações, com o objetivo de fornecer uma estrutura organizacional para o livro. Finalmente, fazemos um esboço das tendências principais no desenvolvimento histórico desse campo e mencionamos alguns dos matemáticos ilustres que contribuíram para o assunto. O estudo das equações diferenciais atraiu a atenção dos maiores matemáticos do mundo durante os três últimos séculos. Apesar disso, continua sendo uma área de pesquisa dinâmica hoje em dia, com muitas questões interessantes em aberto.

1.1 Alguns Modelos Matemáticos Básicos; Campos de Direção

Antes de começar um estudo sério de equações diferenciais (lendo este livro ou partes substanciais dele, por exemplo), você deve ter alguma ideia dos benefícios que isso pode lhe trazer. Para alguns estudantes o interesse intrínseco do assunto é motivação suficiente, mas para a maioria as possíveis aplicações importantes em outros campos é que fazem com que tal estudo valha a pena.

Muitos dos princípios, ou leis, que regem o comportamento do mundo físico são proposições, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Expressas em linguagem matemática, as relações são equações e as taxas são derivadas. Equações contendo derivadas são equações diferenciais. Portanto, para compreender e investigar problemas envolvendo o movimento de fluidos, o fluxo de corrente elétrica em circuitos, a dissipação de calor em objetos sólidos, a propagação e a detecção de ondas sísmicas ou o aumento ou a diminuição de populações, entre muitos outros, é necessário saber alguma coisa sobre equações diferenciais.

Uma equação diferencial que descreve algum processo físico é chamada, muitas vezes, de **modelo matemático** do processo, e muitos desses modelos são discutidos ao longo do texto. Começamos esta seção com dois modelos que nos levam a equações fáceis de resolver. Vale a pena observar que mesmo as equações diferenciais mais simples fornecem modelos úteis de processos físicos importantes.

EXEMPLO

1

Um Objeto em Queda Suponha que um objeto está caindo na atmosfera, perto do nível do mar. Formule uma equação diferencial que descreva o movimento.

Começamos usando letras para representar as diversas quantidades de interesse nesse problema. O movimento ocorre durante um determinado intervalo de tempo, logo vamos usar t para denotar o tempo. Além disso, vamos usar v para representar a velocidade do objeto em queda. A velocidade deve variar com o tempo, de modo que vamos considerar v como uma função de t; em outras palavras, t é a variável independente e v é a variável dependente. A escolha de unidades de medida é um tanto arbitrária, e não há nada no enunciado do problema que sugira unidades apropriadas, de modo que estamos livres para escolher unidades que nos pareçam razoáveis. Especificamente, vamos medir o tempo t em segundos (s) e a velocidade v em metros por segundo (m/s). Além disso, vamos supor que a velocidade v é positiva quando o sentido do movimento é para baixo, isto é, quando o objeto está caindo.

A lei física que governa o movimento de objetos é a segunda lei de Newton, que diz que a massa do objeto vezes sua aceleração é igual à força total atuando sobre o objeto. Em linguagem matemática, essa lei é expressa pela equação

$$F = ma, (1)$$

onde m é a massa do objeto, a sua aceleração e F a força total agindo sobre o objeto. Para manter nossas unidades consistentes, mediremos m em quilogramas (kg), a em metros por segundo ao quadrado (m/s²) e F em newtons (N). É claro que a e v estão relacionadas por a = dv/dt, de modo que podemos reescrever a Eq. (1) na forma

$$F = m(dv/dt). (2)$$

A seguir, considere as forças que agem no objeto em queda. A gravidade exerce uma força igual ao peso do objeto, ou mg, onde g é a aceleração devida à gravidade. Nas unidades de medida que escolhemos, g foi determinada experimentalmente como aproximadamente igual a 9.8 m/s^2 próximo à superfície da Terra. Existe, também, uma força devida à resistência do ar que é mais difícil de modelar. Este não é o local para uma discussão aprofundada da força de resistência do ar; basta dizer que se supõe, muitas vezes, que a resistência do ar é proporcional à velocidade, e faremos essa hipótese aqui. Dessa forma, a força de resistência do ar tem magnitude (ou módulo) γv , onde γ é uma constante chamada de coeficiente da resistência do ar. O valor numérico do coeficiente de resistência do ar varia muito de um objeto para outro; objetos com superfície lisa e formato aerodinâmico têm coeficiente de resistência do ar muito menor do que objetos com superfície rugosa e formato não aerodinâmico. O coeficiente γ corresponde à massa por unidade de tempo, ou seja, kg/s neste problema; se essas unidades parecem estranhas, lembre que γ v tem que ter unidades de força, ou seja, kg·m/s².

Ao escrever uma expressão para a força total *F*, precisamos lembrar que a gravidade sempre age para baixo (no sentido positivo), enquanto a resistência do ar age para cima (no sentido negativo), como ilustrado na Fig. 1.1.1. Logo,

$$F = mg - \gamma v \tag{3}$$

e a Eq. (2) torna-se

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v. \tag{4}$$

A Eq. (4) é um modelo matemático de um objeto caindo na atmosfera, próximo do nível do mar. Note que o modelo contém as três constantes m, g e γ . As constantes m e γ dependem bastante do objeto particular que está caindo, e serão diferentes, em geral, para objetos diferentes. É comum referir-se a essas constantes como parâmetros, já que podem tomar um conjunto de valores durante um experimento. Por outro lado, o valor de g é o mesmo para todos os objetos.



FIGURA 1.1.1 Diagrama de forças agindo sobre um objeto em queda livre.

Para resolver a Eq. (4) precisamos encontrar uma função v = v(t) que satisfaça a equação. Isso não é difícil de fazer, e vamos mostrar como na próxima seção. Agora, no entanto, vamos ver o que podemos descobrir sobre soluções sem encontrar, de fato, qualquer uma delas. Nossa tarefa pode ser ligeiramente simplificada se atribuirmos valores numéricos para $m e \gamma$, mas o procedimento é o mesmo, independentemente dos valores escolhidos. Vamos supor que m = 10 kg e $\gamma = 2$ kg/s. Então, a Eq. (4) pode ser escrita como

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - \frac{v}{5}.\tag{5}$$

Investigue o comportamento das soluções da Eq. (5) sem resolver a equação diferencial.

Vamos proceder analisando a Eq. (5) de um ponto de vista geométrico. Suponha que a velocidade v tem um determinado valor. Então, calculando a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (5) encontramos o valor correspondente de dv/dt. Por exemplo, se v = 40, então dv/dt = 1,8. Isso significa que a inclinação de

Um Objeto em Queda (continuação)

EXEMPLO

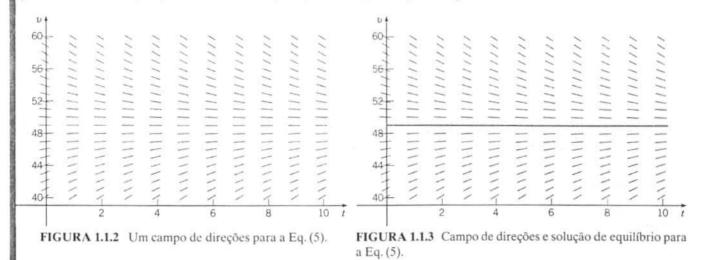
²

[†] Isso é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico. (N.T.)

uma solução v = v(t) tem valor 1,8 em qualquer ponto onde v = 40. Podemos apresentar essa informação graficamente no plano tv desenhando pequenos segmentos de reta com coeficiente angular 1,8 em diversos pontos ao longo da reta v = 40. Analogamente, se v = 50, então dv/dt = -0.2, logo desenhamos segmentos de reta com coeficiente angular -0.2 em diversos pontos ao longo da reta v = 50. Procedendo da mesma maneira com outros valores de v obtemos a Fig. 1.1.2, que é um exemplo do que é chamado de um **campo de direções**.

Lembre-se de que uma solução da Eq. (5) é uma função v = v(t) cujo gráfico é uma curva no plano tv. A importância da Fig. 1.1.2 é que cada segmento de reta é tangente ao gráfico de uma dessas curvas solução. Assim, mesmo não tendo encontrado qualquer solução e não aparecendo o gráfico de nenhuma solução na figura, podemos fazer deduções qualitativas sobre o comportamento das soluções. Por exemplo, se v for menor do que certo valor crítico então todos os segmentos de reta têm coeficientes angulares positivos e a velocidade do objeto em queda aumenta enquanto ele cai. Por outro lado, se v for maior do que o valor crítico então os segmentos de reta têm coeficientes angulares negativos e o objeto em queda vai diminuindo a velocidade à medida que cai. Qual é esse valor crítico de v que separa os objetos cuja velocidade está aumentando daqueles cuja velocidade está diminuindo? Referindo-nos, novamente, à Eq. (5), perguntamos quais os valores de v que farão com que dv/dt seja zero. A resposta é v = (5)(9.8) = 49 m/s.

De fato, a função constante v=49 é uma solução da Eq. (5). Para verificar essa afirmação, substitua v(t)=49 na Eq. (5) e note que as expressões dos dois lados do sinal de igualdade são iguais a zero. Como essa solução não varia com o tempo, v(t)=49 é chamada de **solução de equilíbrio**. Essa é a solução que corresponde a um equilíbrio perfeito entre a gravidade e a resistência do ar. Mostramos, na Fig. 1.1.3, a solução de equilíbrio superposta no campo de direções. Dessa figura podemos chegar a outra conclusão, a saber, que todas as outras soluções parecem estar convergindo para a solução de equilíbrio quando t aumenta.



A abordagem ilustrada no Exemplo 2 pode ser igualmente aplicada à Eq. (4), mais geral, onde os parâmetros m e γ são números positivos não especificados. Os resultados são essencialmente idênticos aos do Exemplo 2. A solução de equilíbrio da Eq. (4) é $v(t) = mg/\gamma$. Soluções abaixo da solução de equilíbrio aumentam de velocidade com o tempo, soluções acima diminuem de velocidade e todas as soluções se aproximam da solução de equilíbrio quando t fica muito grande.

Campos de direções. Campos de direções são ferramentas valiosas no estudo de soluções de equações diferenciais da forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y),\tag{6}$$

onde f é uma função dada de duas variáveis, t e y, algumas vezes chamada de função taxa. Um campo de direções para equações da forma geral (6) pode ser construído calculando-se f em cada ponto de uma malha retangular. Em cada ponto da malha desenha-se um pequeno segmento de reta cujo coeficiente angular é o valor da função f naquele ponto. Dessa forma, cada segmento de reta é tangente ao gráfico de uma solução contendo aquele ponto. Um campo de direções desenhado em uma malha razoavelmente fina fornece uma boa ideia do comportamento global das soluções de uma equação diferencial. Basta, em geral, uma malha contendo algumas centenas de pontos. A construção de um campo de direções é muitas vezes um primeiro passo bastante útil na investigação de uma equação diferencial.

Vale a pena fazer duas observações. A primeira é que para construir um campo de direções não precisamos resolver a Eq. (6), apenas calcular a função dada f(t,y) muitas vezes. Dessa forma, campos de direção podem ser construídos com facilidade mesmo para equações muito difíceis de resolver. A segunda é que fazer cálculos repetidos de uma função dada é uma tarefa para a qual um computador é particularmente apropriado, e você deve em geral usar um computador para desenhar um campo de direções. Todos os campos de direção mostrados neste livro, como o da Fig. 1.1.2, foram gerados em um computador.

Ratos do Campo e Corujas. Vamos ver, agora, um exemplo bem diferente. Considere uma população de ratos do campo que habitam certa área rural. Vamos supor que, na ausência de predadores, a população de ratos cresce a uma taxa proporcional à população atual. Essa hipótese é uma lei física que não está muito bem estabelecida (ao contrário da lei de Newton para o movimento no Exemplo 1), mas é uma hipótese inicial usual 1 em um estudo de crescimento populacional. Se denotarmos o tempo por t e a população de ratos por p(t), então a hipótese sobre o crescimento populacional pode ser expressa pela equação

$$\frac{dp}{dt} = rp,\tag{7}$$

onde o fator de proporcionalidade r é chamado de **taxa constante** ou **taxa de crescimento**. Especificamente, suponhamos que o tempo é medido em meses e que a taxa r tem o valor de 0.5 por mês. Então, cada uma das expressões na Eq. (7) tem unidades de ratos por mês.

Vamos aumentar o problema supondo que diversas corujas moram na mesma vizinhança e que elas matam 15 ratos do campo por dia. Para incorporar essa informação ao modelo precisamos acrescentar outro termo à equação diferencial (7), de modo que ela se transforma em

$$\frac{dp}{dt} = 0.5p - 450. (8)$$

Observe que o termo correspondente à ação do predador é -450 em vez de -15, já que o tempo está sendo medido em meses e o que precisamos é a taxa predatória mensal.

EXEMPLO

Investigue graficamente as soluções da Eq. (8).

A Figura 1.1.4 mostra um campo de direções para a Eq. (8). Pode-se observar da figura, ou mesmo diretamente da Eq. (8), que para valores suficientemente grandes de p, dp/dt é positivo, de modo que <u>a solução cresce</u>. Por outro lado, se p é pequeno, dp/dt é negativo e a solução diminui. Novamente, o valor crítico de p que separa as soluções que crescem das que decrescem é o valor de p para o qual dp/dt é igual a zero. Fazendo dp/dt igual a zero na Eq. (8) e resolvendo depois para p encontramos a solução de equilíbrio p(t) = 900, para a qual os termos para o crescimento e para a ação predatória na Eq. (8) estão perfeitamente equilibrados. A solução de equilíbrio também está ilustrada na Figura 1.1.4.

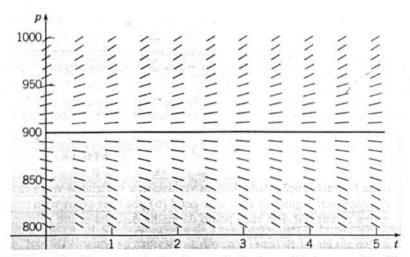


FIGURA 1.1.4 Um campo de direções e solução de equilíbrio para a Eq. (8).

¹Um modelo de crescimento populacional melhor é discutido na Seção 2.5.

Uma versão mais geral da Eq. (8) é

$$\frac{dp}{dt} = rp - k, (9)$$

onde a taxa de crescimento r e a taxa predatória k não estão especificadas. As soluções dessa equação mais geral são muito semelhantes às soluções da Eq. (8). A solução de equilíbrio da Eq. (9) é p(t) = k/r. As soluções acima da solução de equilíbrio crescem, enquanto as que estão abaixo decrescem.

Você deve ter em mente que ambos os modelos discutidos nesta seção têm suas limitações. O modelo (5) do objeto em queda só é válido enquanto o objeto está em queda livre, sem encontrar obstáculos. O modelo populacional (8) prevê a existência, após um longo tempo, de um número negativo (se p < 900) ou de um número imenso (se p > 900) de ratos. Essas previsões não são realistas, de modo que esse modelo torna-se inaceitável após um período de tempo razoavelmente curto.

A Construção de Modelos Matemáticos. Para se usar as equações diferenciais nos diversos campos em que são úteis é preciso, primeiro, formular a equação diferencial apropriada que descreve, ou modela, o problema em questão. Consideramos, nesta seção, dois exemplos desse processo de modelagem, um vindo da física e outro da ecologia. Ao construir modelos matemáticos futuros você deve reconhecer que cada problema é diferente e que à arte de modelar não é uma habilidade que pode ser reduzida a uma lista de regras. De fato, a construção de um modelo satisfatório é algumas vezes a parte mais difícil de um problema. Apesar disso, pode ser útil listar alguns passos que fazem muitas vezes parte do processo:

- Identifique as variáveis independente e dependente, e atribua letras para representá-las. Muitas vezes a variável independente é o tempo.
- Escolha as unidades de medida de cada variável. Essa escolha é, de certa forma, arbitrária, mas algumas
 escolhas podem ser mais convenientes do que outras. Por exemplo, escolhemos medir o tempo em segundos no caso de um objeto em queda e em meses no problema populacional.
- 3. Use o princípio básico subjacente, ou a lei que rege o problema em investigação. Isso pode ser uma lei física amplamente reconhecida, como a lei do movimento de Newton, ou pode ser uma hipótese um tanto especulativa baseada na sua própria experiência ou em observações. De qualquer modo, é provável que essa etapa não seja uma etapa puramente matemática, mas uma em que será necessário ter familiaridade com o campo de aplicação onde o problema se originou.
- 4. Expresse o princípio ou lei do passo 3 em função das variáveis escolhidas no passo 1. Isso pode ser mais fácil falar do que fazer. Pode exigir constantes físicas ou parâmetros (como o coeficiente da resistência do ar no Exemplo 1) e a determinação de valores apropriados para eles. Ou pode envolver o uso de variáveis auxiliares, ou intermediárias, que têm que estar relacionadas com as variáveis primárias.
- 5. Certifique-se de que cada parcela em sua equação está nas mesmas medidas físicas. Se isso não acontecer sua equação está errada e você deve tentar consertá-la. Se as unidades são as mesmas, então sua equação está pelo menos consistente do ponto de vista dimensional, embora possa conter outros erros que esse teste não revela.
- 6. Nos problemas considerados aqui o resultado do passo 4 é uma única equação diferencial, que constitui o modelo matemático desejado. Lembre-se, no entanto, de que em problemas mais complexos o modelo matemático resultante pode ser muito mais complicado, podendo envolver, por exemplo, um sistema com várias equações diferenciais.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6 desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Baseado no campo de direções, determine o comportamento de y quando $t \to \infty$. Se esse comportamento depender do valor inicial de y em t = 0, descreva essa dependência.

3.
$$y' = 3 - 2y$$

3.
$$y' = 3 + 2y$$

3. $y' = 1 + 2y$

2.
$$y' = 2y - 3$$

4.
$$y' = -1 - 2y$$

Em cada um dos Problemas de 7 a 10 escreva uma equação diferencial da forma dy/dt = ay + b cujas soluções têm o comportamento descrito quando $t \rightarrow \infty$.

- 7. Todas as soluções tendem a y = 3.
- (8.) Todas as soluções tendem a v = 2/3.
- 9. Todas as outras soluções se afastam de y = 2.
- (10) Todas as outras soluções se afastam de y = 1/3.

Em cada um dos Problemas de 11 a 14 desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Baseado no campo de direções, determine o comportamento de y quando $t \to \infty$. Se esse comportamento depender do valor inicial de y em t = 0, descreva essa dependência. Note que nesses problemas as equações não são da forma y' = ay + b e o comportamento de suas soluções é um pouco mais complicado do que o das soluções das equações no texto.

$$11. y' = y$$

$$y' = y(4-y)$$

13.
$$y' = y^2$$

12.
$$y' = -y(5 - y)$$

14. $y' = y(y - 2)^2$

14.
$$y' = y(y-2)^2$$

Considere a seguinte lista de equações diferenciais, algumas das quais produziram os campos de direção ilustrados nas Figuras de 1.1.5 até 1.1.10. Em cada um dos Problemas de 15 a 20 identifique a equação diferencial que corresponde ao campo de direções dado.

(a)
$$y' = 2y - 1$$

(c)
$$y' = y - 2$$

(e)
$$y' = y(y-3)$$

(g)
$$y' = -2 - y$$

(i)
$$y' = 1 - 2y$$

(b)
$$y' = 2 + y$$

(d)
$$y' = y(y+3)$$

(f)
$$y' = 1 + 2y$$

(h)
$$y' = y(3 - y)$$

(j)
$$y' = 2 - y$$

- 15. O campo de direções na Figura 1.1.5.
- O campo de direções na Figura 1.1.6.
- 17. O campo de direções na Figura 1.1.7.
- 18. O campo de direções na Figura 1.1.8.
- 19. O campo de direções na Figura 1.1.9.
- 20. O campo de direções na Figura 1.1.10.

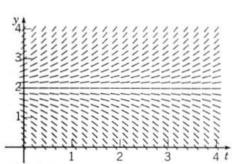


FIGURA 1.1.6 Campo de direções para o Problema 16.

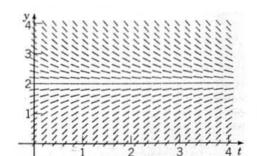


FIGURA 1.1.5 Campo de direções para o Problema 15.

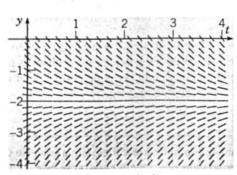


FIGURA 1.1.7 Campo de direções para o Problema 17.

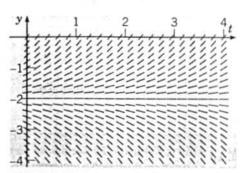


FIGURA 1.1.8 Campo de direções para o Problema 18.

FIGURA 1.1.9 Campo de direções para o Problema 19.

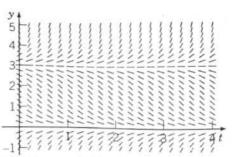
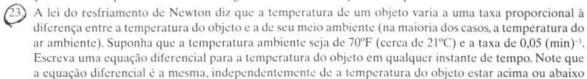


FIGURA 1.1.10 Campo de direções para o Problema 20.

- 21. Um pequeno lago contém, inicialmente, 1.000.000 de galões (aproximadamente 4.550.000 litros) de água e uma quantidade desconhecida de um produto químico indesejável. O lago recebe água contendo 0.01 grama dessa substância por galão a uma taxa de 300 galões por hora. A mistura sai à mesma taxa, de modo que a quantidade de água no lago permanece constante. Suponha que o produto químico está distribuído uniformemente no lago.
 - (a) Escreva uma equação diferencial cuja solução é a quantidade de produto químico no lago em um instante qualquer.
 - (b) Qual a quantidade do produto químico que estará no lago após um período muito longo de tempo? Essa quantidade-limite depende da quantidade presente inicialmente?
- 22. Uma gota esférica de chuva evapora a uma taxa proporcional à sua área de superfície. Escreva uma equação diferencial para o volume de uma gota de chuva em função do tempo.



da temperatura ambiente.

- 24. Um determinado remédio está sendo injetado na veia de um paciente de hospital. O líquido, contendo 5 mg/cm3 do remédio, entra na corrente sanguínea do paciente a uma taxa de 100 cm3/h. O remédio é absorvido pelos tecidos do corpo, ou deixa a corrente sanguínea de outro modo, a uma taxa proporcional à quantidade presente, com um coeficiente de proporcionalidade igual a 0,4 (h).
 - (a) Supondo que o remédio está sempre sendo distribuído uniformemente na corrente sanguínea, escreva uma equação diferencial para a quantidade de remédio presente na corrente sanguínea em qualquer instante de tempo.
 - (b) Quanto do remédio continua presente na corrente sanguínea após muito tempo?



Para objetos pequenos caindo devagar, a hipótese feita no texto sobre a resistência do ar ser proporcional à velocidade é boa. Para objetos maiores caindo mais rapidamente, uma hipótese mais precisa é de que a resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade.2

- (a) Escreva uma equação diferencial para a velocidade de um objeto em queda de massa m supondo que a resistência do ar é proporcional à velocidade.
- (b) Determine a velocidade limite após um longo período de tempo.
- (c) Se m = 10 kg, encontre o coeficiente da resistência do ar de modo que a velocidade limite seja 49 m/s.
- (d) Usando os dados em (c), desenhe um campo de direções e compare-o com a Figura 1.1.3.

Em cada um dos Problemas de 26 a 33, desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Baseado no campo de direções, determine o comportamento de y quando t→ ∞. Se esse comportamento depender do valor inicial de y em t = 0, descreva essa dependência. Note que a expressão à direita do sinal de igualdade nessas equações depende de t, além de y; portanto, suas soluções podem exibir um comportamento mais complicado do que as do texto.



28. $y' = e^{-t} + y$

30. $y' = 3 \operatorname{sen} t + 1 + y$

29. y' = t + 2y31. $y' = 2t - 1 - y^2$ 33. $y' = \frac{1}{6}y^3 - y - \frac{1}{3}t^2$

^{32.} y' = -(2t + y)/2y

²Veja Lyle N. Long e Howard Weiss, "The Velocity Dependence of Aerodynamics Drag: A Primer for Mathematicians", Amer. Math. Monthly 106 (1999), 2, pp.127-135

1.2 Soluções de Algumas Equações Diferenciais

Na seção anterior deduzimos as equações diferenciais

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v \tag{1}$$

e

$$\frac{dp}{dt} = rp - k. (2)$$

A Eq. (1) modela um objeto em queda, e a Eq. (2) uma população de ratos do campo caçados por corujas. Ambas são da forma geral

$$\frac{dy}{dt} = ay - b, (3)$$

onde a e b são constantes dadas. Fomos capazes de descobrir algumas propriedades qualitativas importantes sobre o comportamento de soluções das Eqs. (1) e (2) analisando o campo de direções associado. Para responder a perguntas de natureza quantitativa, no entanto, precisamos encontrar as soluções propriamente ditas. Vamos ver, agora, como fazer isso.

EXEMPLO

1

Ratos do Campo e Corujas (continuação) Considere a equação

$$\frac{dp}{dt} = 0.5p - 450,\tag{4}$$

que descreve a interação de determinadas populações de ratos do campo e corujas [veja a Eq. (8) da Seção 1.1]. Encontre as soluções dessa equação.

Para resolver a Eq. (4) precisamos encontrar funções p(t) que, ao serem substituídas na equação, transformem-na em uma identidade óbvia. Um modo de proceder é o seguinte: primeiro, coloque a Eq. (4) na forma

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p - 900}{2},\tag{5}$$

ou, se $p \neq 900$.

$$\frac{dp/dt}{p - 900} = \frac{1}{2}. (6)$$

Pela regra da cadeia, a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (6) é a derivada de $\ln |p - 900|$ em relação a t, logo temos

$$\frac{d}{dt}\ln|p - 900| = \frac{1}{2}. (7)$$

Então, integrando as expressões na Eq. (7) obtemos

$$ln |p - 900| = \frac{t}{2} + C,$$
(8)

onde C é uma constante de integração arbitrária. Portanto, aplicando a exponencial à Eq. (8) vemos que

$$|p - 900| = e^{(t/2) + C} = e^{C} e^{t/2}, \tag{9}$$

ou

$$p - 900 = \pm e^C e^{t/2},\tag{10}$$

e, finalmente,

$$p = 900 + ce^{t/2}, (11)$$

onde $c = \pm e^{C}$ é também uma constante (não nula) arbitrária. Note que a função constante p = 900 também é solução da Eq. (5) e está contida na Eq. (11) se permitirmos que c assuma o valor zero. A Figura 1.2.1 mostra gráficos da Eq. (11) para diversos valores de c.

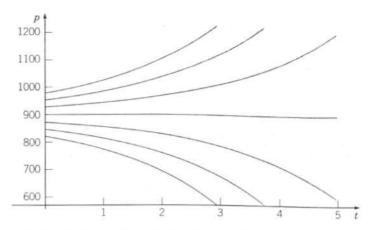


FIGURA 1.2.1 Gráficos da Eq. (11) para diversos valores de c.

Note que o comportamento dessas soluções é do tipo inferido pelo campo de direções na Figura 1.1.4. Por exemplo, soluções em qualquer dos lados da solução de equilíbrio p = 900 tendem a se afastar dessa solução.

Encontramos, no Exemplo 1, uma infinidade de soluções da equação diferencial (4), correspondendo à infinidade de valores possíveis que a constante arbitrária c, na Eq. (11), pode assumir. Isso é típico do que acontece ao se resolver uma equação diferencial. O processo de solução envolve uma integração, que traz consigo uma constante arbitrária, cujos valores possíveis geram uma infinidade de soluções.

Com frequência queremos focalizar nossa atenção em um único elemento dessa família infinita de soluções, especificando o valor da constante arbitrária. Na maior parte das vezes isso é feito indiretamente, através de um ponto dado que tem que pertencer ao gráfico da solução. Por exemplo, para determinar a constante c na Eq. (11) poderíamos dar a quantidade de elementos na população em um determinado instante, tal como 850 elementos no instante t = 0. Em outras palavras, o gráfico da solução tem que conter o ponto (0, 850). Simbolicamente, essa condição pode ser expressa como

$$p(0) = 850.$$
 (12)

Substituindo, então, os valores t = 0 e p = 850 na Eq. (11), obtemos

$$850 = 900 + c$$
.

Logo, c = -50 e, inserindo esse valor na Eq. (11), obtemos a solução desejada, a saber,

$$p = 900 - 50e^{t/2}. (13)$$

A condição adicional (12) que usamos para determinar c é um exemplo de uma condição inicial. A equação diferencial (4) junto com a condição inicial (12) forma um problema de valor inicial.

Vamos considerar, agora, o problema mais geral que consiste na equação diferencial (3)

$$\frac{dy}{dt} = ay - b$$

e a condição inicial

$$y(0) = y_0,$$
 (14)

onde y_0 é um valor inicial arbitrário. Podemos resolver esse problema pelo mesmo método que usamos no Exemplo 1. Se $a \neq 0$ e $y \neq b/a$, então podemos reescrever a Eq. (3) como

$$\frac{dy/dt}{y - (b/a)} = a. (15)$$

Integrando essa equação, obtemos,

$$\ln|y - (b/a)| = at + C,$$
 (16)

onde C é arbitrário. Aplicando a exponencial na Eq. (16) e resolvendo para y, vemos que

$$v = (b/a) + ce^{at}, \tag{17}$$

onde $c = \pm e^{C}$ também é arbitrário. Note que c = 0 corresponde à solução de equilíbrio y = b/a. Finalmente, a condição inicial (14) implica $c = y_0 - (b/a)$, de modo que a solução do problema de valor inicial (3), (14) é

$$y = (b/a) + [y_0 - (b/a)]e^{at}.$$
(18)

Para $a \neq 0$, a Eq. (17) contém todas as soluções possíveis da Eq. (3) e é chamada de solução geral. A representação geométrica da solução geral (17) é uma família infinita de curvas, chamadas de curvas integrais. Cada curva integral está associada a um valor particular de c e é o grafo da solução correspondente àquele valor de c. Satisfazer uma condição inicial significa identificar a curva integral que contém o ponto inicial dado.

Para relacionar a solução (18) à Eq. (2), que modela a população de ratos do campo, basta substituir a pela taxa de crescimento r e b pela taxa predatória k. A solução (18) fica, então,

$$p = (k/r) + [p_0 - (k/r)]e^{rt}, (19)$$

onde p_0 é a população inicial de ratos do campo. A solução (19) confirma as conclusões obtidas baseadas no campo de direções e no Exemplo 1. Se $p_0 = k/r$, então, segue da Eq. (19) que p = k/r para todo t; essa é a solução constante, ou de equilíbrio. Se $p_0 \neq k/r$, então o comportamento da solução depende do sinal do coeficiente $p_0 - (k/r)$ na exponencial na Eq. (19). Se $p_0 > k/r$, então p cresce exponencialmente com o tempo t; se $p_0 < k/r$, então p decresce e acaba se tornando nulo, o que corresponde à extinção dos ratos. Valores negativos de p, embora sejam possíveis na Eq. (19), não fazem sentido no contexto desse problema particular.

Para colocar a Eq. (1), que descreve a queda de um objeto, na forma (3), precisamos identificar a com $-\gamma/m$ e b com -g. Fazendo essas substituições na Eq. (18), obtemos

$$v = (mg/\gamma) + [v_0 - (mg/\gamma)]e^{-\gamma t/m},$$
(20)

onde v_0 é a velocidade inicial. Mais uma vez, essa solução confirma as conclusões a que chegamos na Seção 1.1 baseados no campo de direções. Existe uma solução de equilíbrio, ou constante, $v = mg/\gamma$, e todas as outras soluções tendem a essa solução de equilíbrio. A velocidade da convergência para essa solução de equilíbrio é determinada pelo expoente -y/m. Assim, para um objeto com massa m dada a velocidade se aproxima do valor de equilíbrio mais depressa à medida que o coeficiente da resistência do ar y aumenta.

EXEMPLO

2

Um Objeto em Queda (continuação)

Vamos considerar, como no Exemplo 2 da Seção 1.1, um objeto em queda com massa m = 10 kg e coeficiente da resistência do ar y = 2 kg/s. A equação de movimento (1) fica, então,

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - \frac{v}{5}.\tag{21}$$

Suponha que esse objeto caia de uma altura de 300 m. Encontre sua velocidade em qualquer instante t. Quanto tempo vai levar para ele chegar no chão e quão rápido estará se movendo no instante do impacto?

O primeiro passo é enunciar uma condição inicial apropriada para a Eq. (21). A palavra "cai", no enunciado do problema, sugere que a velocidade inicial é zero, de modo que usaremos a condição inicial

$$v(0) = 0. (22)$$

A solução da Eq. (21) pode ser encontrada substituindo-se os valores dos coeficientes na solução (20), mas em vez disso vamos resolver diretamente a Eq. (21). Primeiro, coloque a equação na forma

$$\frac{dv/dt}{v - 49} = -\frac{1}{5}. (23)$$

Integrando, obtemos

$$\ln|v - 49| = -\frac{t}{5} + C,$$
(24)

e a solução geral da Eq. (21) é, então,

$$v = 49 + ce^{-t/5}, (25)$$

onde c é arbitrário. Para determinar c colocamos os valores na condição inicial (22), t = 0 e v = 0, na Eq. (25), obtendo c = -49. Logo, a solução do problema de valor inicial (21), (22) é

³ Se a = 0, a solução da Eq. (3) não é dada pela Eq. (17). Deixamos a seu cargo encontrar a solução geral nesse caso.

$$v = 49(1 - e^{-t/5}).$$
 (26)

A Eq. (26) dá a velocidade do objeto em queda em qualquer instante positivo (antes de atingir o chão, é claro).

A Figura 1.2.2 mostra gráficos da solução (25) para diversos valores de c, com a solução (26) destacada por uma linha mais grossa. É evidente que todas as soluções tendem à solução de equilíbrio v = 49. Isso confirma as conclusões a que chegamos na Seção 1.1 através da análise dos campos de direção nas Figuras 1.1.2 e 1.1.3.

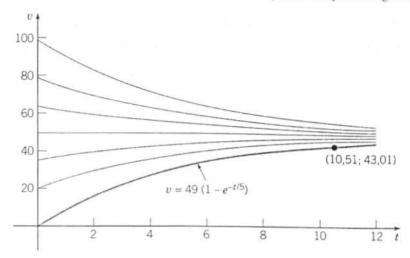


FIGURA 1.2.2 Gráficos da solução (25) para diversos valores de c.

Para encontrar a velocidade do objeto quando ele atinge o solo precisamos saber o instante do impacto. Em outras palavras, precisamos saber quanto tempo leva para o objeto cair 300 m. Para isso, observamos que a distância x percorrida pelo objeto está relacionada à sua velocidade pela equação v = dx/dt, ou

$$\frac{dx}{dt} = 49(1 - e^{-t/5}). (27)$$

Portanto, integrando a Eq. (27) obtemos

$$x = 49t + 245e^{-t/5} + c, (28)$$

onde c é uma constante de integração arbitrária. O objeto começa a cair em t = 0, de modo que sabemos que x = 0 quando t = 0. Da Eq. (28), segue que c = -245, de modo que a distância percorrida pelo objeto até um instante t é dada por

$$x = 49t + 245e^{-t/5} - 245. (29)$$

Seja T o instante em que o objeto atinge o solo; então x = 300 quando t = T. Substituindo esses valores na Eq. (29), obtemos a equação

$$49T + 245e^{-T/5} - 545 = 0. (30)$$

O valor de T que satisfaz a Eq. (30) pode ser aproximado por um processo numérico⁴ usando-se uma calculadora científica ou um computador, com o resultado que $T \cong 10,51$ s. Nesse instante, a velocidade correspondente v_T é encontrada, da Eq. (26), como $v_T \cong 43,01$ m/s. O ponto (10,51; 43,01) também está marcado na Figura 1.2.2.

Observações Adicionais sobre Modelagem Matemática. Até agora nossa discussão de equações diferenciais esteve restrita a modelos matemáticos de um objeto em queda e de uma relação hipotética entre ratos do campo e corujas. A dedução desses modelos pode ter sido plausível, ou talvez até convincente, mas você deve lembrar que o teste decisivo de qualquer modelo matemático é se suas previsões coincidem com observações ou resultados experimentais. Não temos nenhuma observação da realidade nem resultados experimentais aqui para comparação, mas existem diversas fontes de discrepâncias possíveis.

No caso de um objeto em queda, o princípio físico subjacente (a lei do movimento de Newton) está bem estabelecido e é amplamente aplicável. No entanto, a hipótese sobre a resistência do ar ser proporcional à velocidade não está tão comprovada. Mesmo que essa hipótese esteja correta, a determinação do coefi-

^{*} Um sistema de álgebra computacional pode fazer isso; muitas calculadoras também já vêm com rotinas para resolver tais equações.

ciente y da resistência do ar através de medidas diretas apresenta dificuldades. De fato, algumas vezes o coeficiente de resistência do ar é encontrado indiretamente - por exemplo, medindo-se o tempo de queda de uma determinada altura e, depois, calculando-se o valor de γ que prevê esse tempo observado.

O modelo populacional dos ratos do campo está sujeito a diversas incertezas. A determinação da taxa de crescimento r e da taxa predatória k depende de observações sobre populações reais, que podem sofrer uma variação considerável. A hipótese de que r e k são constantes também pode ser questionada. Por exemplo, uma taxa predatória constante torna-se difícil de sustentar quando a população de ratos do campo torna-se menor. Além disso, o modelo prevê que uma população acima do valor de equilíbrio cresce exponencialmente, ficando cada vez maior. Isso não parece estar de acordo com a observação sobre populações reais; veja a discussão adicional sobre dinâmica populacional na Seção 2.5

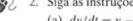
Se as diferenças entre observações realizadas e as previsões de um modelo matemático forem muito grandes, então você precisa refinar seu modelo, fazer observações mais cuidadosas ou ambos. Quase sempre existe uma troca entre precisão e simplicidade. Ambas são desejáveis, mas em geral um ganho em uma delas envolve uma perda na outra. No entanto, mesmo se um modelo matemático for incompleto ou não muito preciso ele ainda pode ser útil para explicar características qualitativas do problema sob investigação. Ele pode, também, dar resultados satisfatórios em algumas circunstâncias e não em outras. Portanto, você deve sempre usar seu julgamento e bom senso na construção de modelos matemáticos e ao utilizar suas previsões.

PROBLEMAS 🚱 1. Resolva cada um dos problemas de valor inicial a seguir e desenhe os gráficos das soluções para diversos valores de y_0 . Depois descreva, em poucas palavras, as semelhanças, ou diferenças, entre as soluções.

(a)
$$dy/dt = -y + 5$$
, $y(0) = y_0$

(b)
$$dy/dt = -2y + 5$$
, $y(0) = y_0$

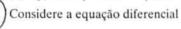
(c)
$$dy/dt = -2y + 10$$
, $y(0) = y_0$



(a)
$$dy/dt = y - 5$$
, $y(0) = y_0$

(b)
$$dy/dt = 2y - 5$$
, $y(0) = y_0$

(c)
$$dy/dt = 2y - 10$$
, $y(0) = y_0$



$$dy/dt = -ay + b$$
,

onde a e b são números positivos.

- (a) Resolva a equação diferencial.
- (b) Esboce a solução para diversas condições iniciais diferentes.
- (c) Descreva como a solução muda sob cada uma das seguintes condições:
 - i. a aumenta:
 - ii. b aumenta;
 - iii. ambos, a e b, aumentam mas a razão b/a permanece constante.
- 4. Considere a equação diferencial dy/dt = ay b.
 - (a) Encontre a solução de equilíbrio ye.
 - (b) Seja Y(t) = y ye, de modo que Y(t) é o desvio da solução de equilíbrio. Encontre a equação diferencial satisfeita por Y(t).
- 5. Coeficientes a Determinar. Vamos mostrar um modo diferente de resolver a equação

$$dy/dt = ay - b. (i)$$

(a) Resolva a equação mais simples

$$dy/dt = ay$$
. (ii)

Chame a solução de $y_1(t)$.

- (b) Observe que a única diferença entre as Eqs. (i) e (ii) é a constante -b na Eq. (i). Parece razoável, portanto, supor que as soluções dessas duas equações diferem apenas por uma constante. Teste essa hipótese tentando encontrar uma constante k tal que $y = y_1(t) + k$ seja uma solução da Eq. (i).
- (c) Compare sua solução em (b) com a dada no texto pela Eq. (17).

Obs.: Esse método também pode ser usado em alguns casos em que a constante b é substituída por uma função g(t). Depende se você é capaz de prever a forma geral que a solução deve ter. Esse método é descrito em detalhe na Seção 3.5 em conexão com equações de segunda ordem.

6. Use o método do Problema 5 para resolver a equação

$$dy/dt = -ay + b$$
.

7. A população de ratos do campo no Exemplo 1 satisfaz a equação diferencial

$$dp/dt = 0.5p - 450.$$

- (a) Encontre o instante em que a população é extinta se p(0) = 850.
- (b) Encontre o instante de extinção se $p(0) = p_0$, onde $0 < p_0 < 900$.
- (c) Encontre a população inicial p₀ se a população é extinta em 1 ano.
- 8. Considere uma população p de ratos do campo que crescem a uma taxa proporcional à população atual, de modo que dp/dt = rp.
 - (a) Encontre a taxa de crescimento r se a população dobra em 30 dias.
 - (b) Encontre r se a população dobra em N dias.
 - 9. O objeto em queda no Exemplo 2 satisfaz o problema de valor inicial

$$dv/dt = 9.8 - (v/5),$$
 $v(0) = 0.$

- (a) Encontre o tempo decorrido quando o objeto atinge 98% de sua velocidade limite.
- (b) Qual a distância percorrida pelo objeto até o instante encontrado no item (a)?
- 10. Modifique o Exemplo 2 de modo que o objeto em queda não sofra resistência do ar.
 - (a) Escreva o problema de valor inicial modificado.
 - (b) Determine quanto tempo leva para o objeto atingir o solo.
 - (c) Determine sua velocidade no instante de impacto.
- Considere o objeto de massa 10 kg em queda do Exemplo 2, mas suponha agora que o coeficiente de resistência do ar seja proporcional ao quadrado da velocidade.
 - (a) Se a velocidade limite é de 49 m/s (a mesma do Exemplo 2), mostre que a equação de movimento pode ser escrita como

$$dv/dt = [(49)^2 - v^2]/245.$$

Veja também o Problema 25 da Seção 1.1.

- (b) Se v(0) = 0, encontre uma expressão para v(t) em qualquer instante t.
- (c) Faça o gráfico da solução encontrada em (b) e da solução (26) do Exemplo 2 no mesmo conjunto de eixos.
- (d) Baseado nos gráficos encontrados em (c), compare o efeito de um coeficiente de resistência do ar quadrático com um linear.
- (e) Encontre a distância x(t) percorrida pelo objeto até o instante t.
- (f) Encontre o tempo T que leva para o objeto cair 300 m.
- Um material radioativo, tal como um dos isótopos de tório, o tório-234, se desintegra a uma taxa proporcional à quantidade presente. Se Q(t) é a quantidade presente no instante t, então dQ/dt = -rQ, onde r > 0 é a taxa de decaimento.
 - (a) Se 100 mg de tório-234 decaem a 82,04 mg em uma semana, determine a taxa de decaimento r.
 - (b) Encontre uma expressão para a quantidade de tório-234 presente em qualquer instante t.
 - (c) Encontre o tempo necessário para que o tório-234 decaia à metade da quantidade original.
- A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que uma quantidade desse material decaia à metade de sua quantidade original. Mostre que para qualquer material radioativo que decaia de acordo com a equação Q' = -rQ a meia-vida τ e a taxa de decaimento r estão relacionadas pela equação $r\tau = \ln 2$.
- 14. O rádio-226 tem uma meia-vida de 1620 anos. Encontre o tempo necessário para que uma determinada quantidade desse material seja reduzida da quarta parte.

De acordo com a lei do resfriamento de Newton (veja o Problema 23 da Seção 1.1), a temperatura u(t) de um objeto satisfaz a equação diferencial

$$du/dt = -k(u - T)$$
.

onde T é a temperatura ambiente constante e k é uma constante positiva. Suponha que a temperatura inicial do objeto seja $u(0) = u_0$.

- (a) Encontre a temperatura do objeto em qualquer instante.
- (b) Seja τ o instante no qual a diferença inicial de temperatura $u_0 T$ foi reduzida pela metade. Encontre a relação entre k e τ .
- 16. Suponha que um prédio perde calor de acordo com a lei do resfriamento de Newton (veja o Problema 15) e que a taxa k tem valor 0,15 h⁻¹. Suponha que a temperatura no interior era de 70°F (cerca de 21°C) quando ocorreu uma falha no sistema de aquecimento. Se a temperatura externa estava em 10°F (cerca de -12°C), quanto tempo vai levar para a temperatura no interior chegar a 32°F (0°C)?
- 17. Considere um circuito elétrico contendo um capacitor, um resistor e uma bateria; veja a Figura 1.2.3. A carga Q(t) no capacitor satisfaz a equação⁵

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V,$$

onde R é a resistência, C a capacitância e V a voltagem constante fornecida pela bateria.

- (a) Se Q(0) = 0, encontre Q(t) em qualquer instante t e esboce o gráfico de Q em função de t.
- (b) Encontre o valor limite Q_L para onde Q(t) tende após um longo período de tempo.
- (c) Suponha que $Q(t_1) = Q_L$ e que, no instante $t = t_1$, a bateria seja removida e o circuito é fechado novamente. Encontre Q(t) para $t > t_1$ e esboce seu gráfico.

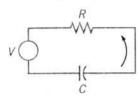


FIGURA 1.2.3 O circuito elétrico do Problema 17.

- 18. Um pequeno lago contendo 1.000.000 de galões (cerca de 4.550.000 litros) de água não contém, inicialmente, um produto químico indesejável (veja o Problema 21 da Seção 1.1). O lago recebe água contendo 0,01 g/galão de um produto químico a uma taxa de 300 galões por hora e a água sai do lago à mesma taxa. Suponha que o produto químico esteja distribuído uniformemente no lago.
 - (a) Seja Q(t) a quantidade de produto químico no lago no instante t. Escreva um problema de valor inicial para Q(t).
 - (b) Resolva o problema no item (a) para Q(t). Quanto produto químico o lago terá ao final de 1 ano?
 - (c) Ao final de 1 ano, a fonte do produto químico despejado no lago é retirada e, a partir daí, o lago recebe água pura e a mistura sai à mesma taxa de antes. Escreva o problema de valor inicial que descreve essa nova situação.
 - (d) Resolva o problema de valor inicial do item (c). Qual a quantidade de produto químico que ainda permanece no lago após mais 1 ano (2 anos após o início do problema)?
 - (e) Quanto tempo vai levar para que Q(t) seja igual a 10 g?
 - (f) Faça o gráfico de Q(t) em função de t para t até 3 anos.
 - Sua piscina, contendo 60.000 galões (cerca de 273.000 litros) de água, foi contaminada por 5 kg de uma tinta não tóxica que deixa a pele de um nadador com uma cor verde nada atraente. O sistema de filtragem da piscina pode retirar a água, remover a tinta e devolver a água para a piscina a uma taxa de 200 gal/min.
 - (a) Escreva o problema de valor inicial para o processo de filtragem; seja q(t) a quantidade de tinta na piscina em qualquer instante t.
 - (b) Resolva o problema encontrado em (a).
 - (c) Você convidou dúzias de amigos para uma festa em torno da piscina que está marcada para começar em 4 horas. Você já verificou que o efeito da tinta é imperceptível se a concentração é menor do que 0,02 g/gal. Seu sistema de filtragem é capaz de reduzir a concentração de tinta a esse nível dentro de 4 horas?
 - (d) Encontre o instante T em que a concentração de tinta alcança, pela primeira vez, o valor de 0,02 g/gal.
 - (e) Encontre a taxa do fluxo de água que é suficiente para obter a concentração de 0,02 g/gal dentro de 4 horas.

⁵Essa equação resulta das leis de Kirchhoff, que são discutidas na Seção 3.7.

1.3 Classificação de Equações Diferenciais

O objetivo principal deste livro é discutir algumas das propriedades de soluções de equações diferenciais e descrever alguns dos métodos que se mostraram eficazes para encontrar soluções ou, em alguns casos, aproximá-las. Com o objetivo de fornecer uma estrutura organizacional para a nossa apresentação, vamos descrever agora diversas maneiras úteis de se classificar equações diferenciais.

Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais. Uma classificação importante baseia-se em saber se a função desconhecida depende de uma única variável independente ou de diversas variáveis independentes. No primeiro caso aparecem na equação diferencial apenas derivadas simples, e ela é dita uma equação diferencial ordinária. No segundo caso as derivadas são derivadas parciais, e a equação é chamada de equação diferencial parcial.

Todas as equações diferenciais discutidas nas duas seções precedentes são equações diferenciais ordinárias. Outro exemplo de uma equação diferencial ordinária é

$$L\frac{d^{2}Q(t)}{dt^{2}} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = E(t), \tag{1}$$

para a carga Q(t) em um capacitor em um circuito com capacitância C, resistência R e indutância L; essa equação é deduzida na Seção 3.7. Exemplos típicos de equações diferenciais parciais são a equação de calor

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \tag{2}$$

e a equação de onda

$$a^{2} \frac{\partial^{2} u(x,t)}{\partial x^{2}} = \frac{\partial^{2} u(x,t)}{\partial t^{2}}.$$
 (3)

Aqui, α^2 e a^2 são certas constantes físicas. Note que, em ambas as Eqs. (2) e (3), a variável dependente u depende de duas variáveis independentes, x e t. A equação de calor descreve a condução de calor em um corpo sólido, e a equação de onda aparece em uma variedade de problemas envolvendo movimento ondulatório em sólidos ou fluidos.

Sistemas de Equações Diferenciais. Outra classificação de equações diferenciais depende do número de funções desconhecidas. Se existe uma única função a ser determinada, uma equação é suficiente. Se existem, no entanto, duas ou mais funções que devem ser determinadas precisamos de um sistema de equações. Por exemplo, as equações de Lotka-Volterra, ou equações predador-presa, são importantes em modelagem ecológica. Elas têm a forma

$$dx/dt = ax - \alpha xy$$

$$dy/dt = -cy + \gamma xy,$$
(4)

onde x(t) e y(t) são as populações respectivas das espécies presa e predadora. As constantes a, α, c e γ são baseadas em observações empíricas e dependem das espécies particulares em estudo. Sistemas de equações são discutidos nos Capítulos 7 e 9; em particular, as equações de Lotka-Volterra são examinadas na Seção 9.5. Não é fora do comum, em algumas áreas, encontrar sistemas muito grandes contendo centenas ou até milhares de equações.

Ordem. A ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação. As equações nas seções anteriores são todas de primeira ordem, enquanto a Eq. (1) é uma equação de segunda ordem. As Eqs. (2) e (3) são equações diferenciais parciais de segunda ordem. Mais geralmente, a equação

$$F[t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n)}(t)] = 0$$
 (5)

é uma equação diferencial ordinária de ordem n. A Eq. (5) expressa uma relação entre a variável independente t e os valores da função u e de suas n primeiras derivadas, $u', u'', ..., u^{(n)}$. É conveniente e usual em equações diferenciais substituir u(t) por y e $u'(t), u''(t), ..., u^{(n)}(t)$ por $y', y'', ..., y^{(n)}$, respectivamente. Assim, a Eq. (5) fica

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$
 (6)

Por exemplo,

$$y''' + 2e^t y'' + yy' = t^4 (7)$$

é uma equação diferencial de terceira ordem para y = u(t). Algumas vezes outras letras serão usadas no lugar de t e y para as variáveis independentes e dependentes; o significado deve ficar claro pelo contexto.

Vamos supor que é sempre possível resolver uma equação diferencial ordinária dada para a maior derivada, obtendo

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$
(8)

Estudaremos apenas equações da forma (8). A razão principal disso é evitar ambiguidades que possam aparecer, já que uma única equação da forma (6) pode corresponder a diversas equações da forma (8). Por exemplo, a equação

$$(y')^2 + ty' + 4y = 0 (9)$$

leva a duas equações,

$$y' = \frac{-t + \sqrt{t^2 - 16y}}{2}$$
 ou $y' = \frac{-t - \sqrt{t^2 - 16y}}{2}$. (10)

Equações Lineares e Não Lineares. Uma classificação crucial de equações diferenciais é se elas são lineares ou não. A equação diferencial ordinária

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

é dita **linear** se F é uma função linear das variáveis $y, y', ..., y^{(n)}$; uma definição análoga se aplica às equações diferenciais parciais. Assim, a equação diferencial ordinária linear geral de ordem n é

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = g(t).$$
 (11)

A maioria das equações que você viu até agora neste livro é linear; exemplos são as equações nas Seções 1.1 e 1.2 que descrevem um objeto em queda e a população de ratos do campo. Analogamente, nesta seção a Eq. (1) é uma equação diferencial ordinária linear e as Eqs. (2) e (3) são equações diferenciais parciais lineares. Uma equação que não é da forma (11) é uma equação não linear. A Eq. (7) é não linear devido à expressão yy'. Analogamente, cada equação no sistema (4) é não linear por causa de expressões envolvendo o produto xy.

Um problema físico simples que leva a uma equação diferencial não linear é o problema do pêndulo. O ângulo θ que um pêndulo de comprimento L oscilando faz com a direção vertical (veja a Figura 1.3.1) satisfaz a equação

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin\theta = 0, \tag{12}$$

cuja dedução está delineada nos Problemas de 29 a 31. A presença da parcela envolvendo sen θ faz com que a Eq. (12) seja não linear.

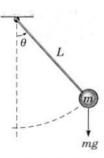


FIGURA 1.3.1 Um pêndulo oscilando.

A teoria matemática e os métodos para resolver equações lineares estão bastante desenvolvidos. Em contraste, a teoria para equações não lineares é mais complicada e os métodos de resolução são menos satisfatórios. Em vista disso, é auspicioso que muitos problemas significativos levem a equações diferenciais

ordinárias lineares ou possam ser aproximados por equações lineares. Por exemplo, para o pêndulo, se o ângulo θ for pequeno então sen $\theta \cong \theta$ e a Eq. (12) pode ser aproximada pela equação linear

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0. ag{13}$$

Esse processo de aproximar uma equação não linear por uma linear é chamado de **linearização**, e é extremamente útil para tratar equações não lineares. Apesar disso, existem muitos fenômenos físicos que não podem ser representados adequadamente por equações lineares. Para estudar esses fenômenos é imprescindível tratar com equações não lineares.

Em um texto elementar é natural enfatizar as partes mais simples e diretas do assunto. Portanto, a maior parte deste livro trata de equações lineares e diversos métodos para resolvê-las. No entanto, os Capítulos 8 e 9, assim como partes do Capítulo 2, consideram equações não lineares. Sempre que for apropriado vamos observar por que as equações não lineares são, em geral, mais difíceis e por que muitas das técnicas úteis na resolução de equações lineares não podem ser aplicadas às equações não lineares.

Soluções. Uma **solução** da equação diferencial ordinária (8) no intervalo $\alpha < t < \beta$ é uma função ϕ tal que $\phi', \phi'', ..., \phi^{(n)}$ existem e satisfazem

$$\phi^{(n)}(t) = f[t, \phi(t), \phi'(t), \dots, \phi^{(n-1)}(t)]$$
(14)

para todo $t \text{ em } \alpha < t < \beta$. A menos que explicitado o contrário, vamos supor que a função f na Eq. (8) toma valores reais e que estamos interessados em encontrar soluções reais $y = \phi(t)$.

Lembre-se de que encontramos, na Seção 1.2, soluções de determinadas equações por um processo de integração direta. Por exemplo, vimos que a equação

$$\frac{dp}{dt} = 0.5p - 450\tag{15}$$

tem solução

$$p = 900 = ce^{t/2}$$
, (16)

onde c é uma constante arbitrária. Muitas vezes não é tão fácil encontrar soluções de equações diferenciais. No entanto, se você encontrar uma função que pode ser solução de uma equação diferencial dada é muito fácil, em geral, verificar se a função é de fato solução, pois basta substituir a função na equação. Por exemplo, dessa maneira é fácil mostrar que a função $y_1(t) = \cos t$ é uma solução de

$$y'' + y = 0 \tag{17}$$

para todo t. Para confirmar isso, note que $y_1'(t) = -\sin t$ e $y''(t) = -\cos t$; segue então que $y_1''(t) + y_1(t) = 0$. Da mesma forma, é fácil mostrar que $y_2(t) = \sin t$ também é solução da Eq. (17). É claro que isso não é um modo satisfatório de resolver a maioria das equações diferenciais, já que existe um número grande demais de funções possíveis para que se tenha alguma chance de encontrar a função correta aleatoriamente. De qualquer modo, é importante compreender que é possível verificar se qualquer solução proposta está correta substituindo-a na equação diferencial. Essa pode ser uma verificação útil, e você deve transformar essa verificação em hábito.

Algumas Questões Relevantes. Embora tenhamos sido capazes de verificar que determinadas funções simples são soluções das Eqs. (15) e (17), não temos, em geral, tais soluções disponíveis. Uma questão fundamental, então, é a seguinte: uma equação da forma (8) sempre tem solução? A resposta é "não". Escrever, simplesmente, uma equação da forma (8) não significa necessariamente que existe uma função $y = \phi(t)$ que a satisfaça. Como podemos saber, então, se uma determinada equação tem solução? Essa é a questão de existência de solução, e é respondida por teoremas que afirmam que, sob certas condições sobre a função f na Eq. (8), a equação sempre tem solução. Essa não é, no entanto, uma preocupação puramente matemática por pelo menos duas razões. Se um problema não tem solução, gostaríamos de saber disso antes de investir tempo e esforço na vã tentativa de resolvê-lo. Além disso, se um problema físico razoável está sendo modelado matematicamente por uma equação diferencial, então a equação deveria ter solução. Se não tiver, presume-se que há algo de errado com a formulação. Nesse sentido, o engenheiro ou cientista tem um modo de verificar a validade do modelo matemático.

Se supusermos que uma equação diferencial dada tem pelo menos uma solução, é natural perguntar quantas soluções ela tem e que condições adicionais devem ser especificadas para se obter uma única solução. Essa é a questão de unicidade. Em geral, soluções de equações diferenciais contêm uma ou mais constantes arbitrárias, como a solução (16) da Eq. (15). A Eq. (16) representa uma infinidade de funções,

correspondendo à infinidade de escolhas possíveis para a constante c. Como vimos na Seção 1.2, se p for especificado em um instante t essa condição determina um valor para c; mesmo assim, não descartamos a possibilidade de que possam existir outras soluções da Eq. (15) para as quais p tem o valor especificado no instante t dado. Essa questão de unicidade também tem implicações práticas. Se formos suficientemente felizes para encontrar uma solução de um problema dado e se soubermos que o problema tem uma única solução, então podemos ter certeza de que resolvemos completamente o problema. Se existem outras soluções, talvez devamos continuar procurando-as.

Uma terceira questão importante é: dada uma equação diferencial da forma (8), podemos determinar de fato uma solução? E se for esse o caso, como? Note que, se encontrarmos uma solução da equação dada, responderemos, ao mesmo tempo, à questão de existência de solução. No entanto, sem conhecer a teoria de existência poderíamos, por exemplo, usar um computador para encontrar uma aproximação numérica para uma "solução" que não existe. Por outro lado, mesmo sabendo que a solução existe pode não ser possível expressá-la em termos das funções elementares usuais-funções polinomiais, trigonométricas, exponenciais, logarítmicas e hiperbólicas. Infelizmente, essa é a situação para a maioria das equações diferenciais. Assim, discutimos tanto métodos elementares que podem ser usados para se obter soluções de determinados problemas relativamente simples quanto métodos de natureza mais geral que podem ser aplicados em problemas mais difíceis.

Uso de Computadores em Equações Diferenciais. Um computador pode ser uma ferramenta extremamente útil no estudo de equações diferenciais. Há muitos anos os computadores vêm sendo utilizados para executar algoritmos, como os descritos no Capítulo 8, que constroem aproximações numéricas para soluções de equações diferenciais. Esses algoritmos foram refinados a um nível extremamente alto de generalidade e eficiência. Algumas poucas linhas de código, escritas em uma linguagem de programação de alto nível e executadas (em alguns segundos, frequentemente) em um computador relativamente barato são suficientes para resolver numericamente com muita precisão um espectro amplo de equações diferenciais. Rotinas mais sofisticadas também estão disponíveis com facilidade. Essas rotinas combinam a habilidade de tratar sistemas muito grandes e complicados com diversas características de diagnósticos que alertam o usuário quanto a problemas possíveis à medida que vão sendo encontrados.

A saída usual de um algoritmo numérico é uma tabela de números, listando valores selecionados da variável independente e os valores correspondentes da variável dependente. Com programas apropriados é fácil mostrar graficamente a solução de uma equação diferencial, quer ela tenha sido obtida numericamente ou como resultado de um procedimento analítico de alguma espécie. Tais apresentações gráficas são, com frequência, mais claras e úteis para a compreensão e a interpretação da solução de uma equação diferencial do que uma tabela de números ou uma fórmula analítica complicada. Existem diversos pacotes de programas especiais no mercado, muito bem construídos e relativamente baratos, para a investigação gráfica de equações diferenciais. A ampla disponibilidade de computadores pessoais tornou acessíveis, para os estudantes, capacidades computacional e gráfica poderosas. Você deve considerar, dependendo de suas circunstâncias, como aproveitar melhor os recursos computacionais disponíveis. Você certamente achará isso instrutivo.

Outro aspecto da utilização de computadores bastante relevante para o estudo de equações diferenciais é a disponibilidade de pacotes gerais extremamente poderosos que podem efetuar uma gama muito grande de operações matemáticas. Entre esses estão o Maple, o Mathematica e o MATLAB, cada um dos quais pode ser usado em diversos tipos de computadores pessoais ou estações de trabalho. Todos esses três programas podem executar cálculos numéricos extensos e têm facilidades gráficas versáteis. Além disso, o Maple e o Mathematica também têm capacidades analíticas muito grandes. Por exemplo, podem executar passos analíticos necessários para a resolução de muitas equações diferenciais, frequentemente em resposta a um único comando. Qualquer pessoa que espera tratar equações diferenciais de um modo mais do que superficial deve se familiarizar com pelo menos um desses produtos e explorar como ele pode ser usado.

Para você, aluno, esses recursos computacionais afetam a maneira de estudar equações diferenciais. Para se tornar confiante no uso de equações diferenciais é essencial compreender como os métodos de solução funcionam, e essa compreensão é obtida, em parte, fazendo-se um número suficiente de exemplos detalhadamente. No entanto, você deve planejar, após algum treino, delegar tanto quanto possível os detalhes de rotina (muitas vezes repetitivos) a um computador, enquanto você presta mais atenção à formulação correta do problema e à interpretação da solução. Nosso ponto de vista é que você deve sempre tentar usar os melhores métodos e ferramentas disponíveis para cada tarefa. Em particular, você deve tentar combinar métodos numéricos, gráficos e analíticos de modo a obter a maior compreensão possível sobre o comportamento da solução e dos processos subjacentes que o problema modela. Você deve se lembrar, também, de que algumas tarefas são executadas melhores com lápis e papel, enquanto outras necessitam de uma calculadora ou um computador. Muitas vezes é necessário ter bom senso para selecionar uma combinação equilibrada.

PROBLEMAS Em cada um dos Problemas de 1 a 6, determine a ordem da equação diferencial e diga se ela é linear ou não

$$\int t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + 2y = \operatorname{sen} t$$

2.
$$(1+y^2)\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + y = e^t$$

$$3 \frac{d^4y}{dt^4} + \frac{d^3y}{dt^3} + \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 1$$

$$4 \frac{dy}{dt} + ty^2 = 0$$

$$\int \frac{dy}{dt} + ty^2 = 0$$

5.
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \operatorname{sen}(t+y) = \operatorname{sen} t$$

6.
$$\frac{d^3y}{dt^3} + t\frac{dy}{dt} + (\cos^2 t)y = t^3$$

Em cada um dos Problemas de 7 a 14, verifique que cada função dada é uma solução da equação diferencial.

$$y'' - y = 0;$$
 $y_1(t) = e^t,$ $y_2(t) = \cosh t$

8.
$$y'' + 2y' - 3y = 0$$
; $y_1(t) = e^{-3t}$, $y_2(t) = e^t$

$$9ty' - y = t^2;$$
 $y = 3t +$

10.
$$y'''' + 4y''' + 3y = t$$
; $y_1(t) = t/3$, $y_2(t) = e^{-t} + t/3$

8.
$$y'' + 2y' - 3y = 0$$
; $y_1(t) = e^{-3t}$, $y_2(t) = e^t$
9. $y'' + 2y' - 3y = 0$; $y_1(t) = e^{-3t}$, $y_2(t) = e^t$
10. $y'''' + 4y''' + 3y = t$; $y_1(t) = t/3$, $y_2(t) = e^{-t} + t/3$
11. $2t^2y'' + 3ty' - y = 0$, $t > 0$; $y_1(t) = t^{1/2}$, $y_2(t) = t^{-1}$

12.
$$t^2y'' + 5ty' + 4y = 0$$
, $t > 0$; $y_1(t) = t^{-2}$, $y_2(t) = t^{-2} \ln t$

13.
$$y'' + y = \sec t$$
, $0 < t < \pi/2$; $y = (\cos t) \ln \cos t + t \sin t$

14.
$$y' - 2ty = 1$$
; $y = e^{t^2} \int_0^t e^{-t^2} ds + e^{t^2}$

Em cada um dos Problemas de 15 a 18, determine os valores de r para os quais a equação diferencial dada tem uma solução da forma $y = e^{rt}$.

16.
$$y'' - y = 0$$

18.
$$y''' - 3y'' + 2y' = 0$$

Em cada um dos Problemas 19 e 20, determine os valores de r para os quais a equação diferencial dada tem uma solução da forma $y = t^r$ para t > 0.

19.
$$t^2y'' + 4ty' + 2y = 0$$

$$(20)t^2y'' - 4ty' + 4y = 0$$

Em cada um dos Problemas de 21 a 24, determine a ordem da equação diferencial e diga se ela é linear ou não linear. Derivadas parciais são denotadas por índices.

$$(21)u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

22.
$$u_{xx} + u_{xy} + uu_x + uu_y + u = 0$$

$$(24.) u_t + uu_x = 1 + u_{xx}$$

$$23. \ u_{xxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0$$

$$(24.)u_t + uu_x = 1 + u_{xx}$$

Em cada um dos Problemas de 25 a 28, verifique que cada função dada é uma solução da equação diferencial.

25.
$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$
; $u_1(x, y) = \cos x \cosh y$. $u_2(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

26.
$$\alpha^2 u_{xx} = u_t$$
; $u_1(x,t) = e^{-\alpha^2 t} \operatorname{sen} x$, $u_2(x,t) = e^{-\alpha^2 \lambda^2 t} \operatorname{sen} \lambda x$, λ uma constante real

2)
$$a^2 u_{xx} = u_t$$
; $u_1(x,t) = \sin \lambda x \sin \lambda at$, $u_2(x,t) = \sin (x - at)$, λ uma constante real $(28) \alpha^2 u_{xx} = u_t$; $u = (\pi/t)^{1/2} e^{-x^2/4\alpha^2 t}$, $t > 0$

- 29. Siga os passos indicados aqui para deduzir a equação de movimento de um pêndulo, Eq. (12) no texto. Suponha que a barra do pêndulo seja rígida e sem peso, que a massa seja pontual e que não exista atrito ou resistência em nenhum ponto do sistema.
 - (a) Suponha que a massa esteja em uma posição deslocada arbitrária, indicada pelo ângulo θ. Desenhe um diagrama mostrando as forças que agem sobre a massa.
 - (b) Aplique a lei do movimento de Newton na direção tangencial ao arco circular sobre o qual a massa se move. Então, a força de tensão sobre a barra não aparece na equação. Note que é necessário encontrar a componente da força gravitacional na direção tangencial. Note, também, que a aceleração linear (para diferenciá-la da aceleração angular) é $Ld^2\theta/dt^2$, onde L é o comprimento da barra.
 - (c) Simplifique o resultado obtido no item (b) para obter a Eq. (12) do texto.

30/ Outra maneira de deduzir a equação do pêndulo (12) baseia-se no princípio de conservação de energia.

(a) Mostre que a energia cinética do pêndulo em movimento é

$$T = \frac{1}{2}mL^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

(b) Mostre que a energia potencial V do pêndulo relativa à sua posição de repouso é

$$V = mgL(1 - \cos\theta).$$

(c) Pelo princípio de conservação de energia, a energia total E = T + V é constante. Calcule dE/dt, iguale a zero e mostre que a equação resultante pode ser reduzida à Eq. (12).



Uma terceira dedução da equação do pêndulo depende do princípio do momento angular: a taxa de variação do momento angular em torno de qualquer ponto é igual ao momento externo total em torno do mesmo ponto.

- (a) Mostre que o momento angular M em torno do ponto de suporte é dado por $M = mL^2d\theta/dt$.
- (b) Iguale dM/dt ao momento da força gravitacional e mostre que a equação resultante pode ser reduzida à Eq. (12). Note que os momentos positivos são no sentido trigonométrico (anti-horário).

1.4 Notas Históricas

Sem saber alguma coisa sobre equações diferenciais e métodos para resolvê-las, é difícil apreciar a história desse ramo importante da matemática. Além disso, o desenvolvimento das equações diferenciais está intimamente ligado ao desenvolvimento geral da matemática, e não pode ser separado dele. Apesar disso, para fornecer alguma perspectiva histórica vamos indicar aqui algumas das tendências principais na história desse assunto e identificar os matemáticos atuantes no período inicial de desenvolvimento que mais se destacaram. Outras informações históricas estão contidas em notas de rodapé ao longo do livro e nas referências listadas ao final do capítulo.

As equações diferenciais começaram com o estudo de cálculo por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) durante o século XVII. Newton cresceu no interior da Inglaterra, foi educado no Trinity College, em Cambridge, e se tornou Professor de Matemática, na cadeira Lucasian, em 1669. Suas descobertas sobre o cálculo e as leis da mecânica datam de 1665. Elas circularam privadamente, entre seus amigos, mas Newton era muito sensível a críticas e só começou a publicar seus resultados a partir de 1687, quando apareceu seu livro mais famoso, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Apesar de Newton ter atuado relativamente pouco na área de equações diferenciais propriamente ditas, seu desenvolvimento do cálculo e a elucidação dos princípios básicos da mecânica forneceram a base para a aplicação das equações diferenciais no século XVIII, especialmente por Euler. Newton classificou as equações diferenciais de primeira ordem de acordo com as formas dy/dx = f(x), dy/dx = f(y) e dy/dx = f(x)y). Ele desenvolveu um método para resolver essa última equação no caso em que f(x, y) é um polinômio em x e y usando séries infinitas. Newton parou de fazer pesquisa matemática no início da década de 1690, exceto pela solução de problemas desafiadores ocasionais e pela revisão e publicação de resultados obtidos anteriormente. Foi nomeado Warden of the British Mint (responsável pela Casa da Moeda britânica) em 1696 e pediu demissão da sua posição de professor alguns anos depois. Recebeu o título de cavaleiro em 1705 e, após sua morte, foi enterrado na capela de Westminster.

Leibniz nasceu em Leipzig e completou seu doutorado em filosofia na Universidade de Altdorf quando tinha 20 anos. Ao longo de sua vida, engajou-se em atividades acadêmicas em diversos campos diferentes. Era basicamente autodidata em matemática, já que seu interesse no assunto desenvolveu-se quando tinha vinte e poucos anos. Leibniz chegou aos resultados sobre cálculo independentemente, embora um pouco depois de Newton, mas foi o primeiro a publicá-los, em 1684. Leibniz compreendia o poder de uma boa notação matemática, e a nossa notação para derivada, dy/dx, assim como o sinal de integral, são devidos a ele. Descobriu o método de separação de variáveis (Seção 2.2) em 1691, a redução de equações homogêneas a equações separáveis (Seção 2.2, Problema 30) em 1691 e o procedimento para resolver equações lineares de primeira ordem (Seção 2.1) em 1694. Passou sua vida como embaixador e conselheiro de diversas famílias reais alemãs, o que permitiu que viajasse muito e mantivesse uma correspondência extensa com outros matemáticos, especialmente os irmãos Bernoulli. No decorrer dessa correspondência foram resolvidos muitos problemas em equações diferenciais durante a parte final do século XVII.

Os irmãos Jakob (1654-1705) e Johann (1667-1748) Bernoulli, de Basel, fizeram muito sobre o desenvolvimento de métodos para resolver equações diferenciais e ampliar o campo de suas aplicações. Jakob tornou-se professor de matemática em Basel em 1687 e Johann foi nomeado para a mesma posição quando seu irmão faleceu, em 1705. Ambos eram briguentos, ciumentos e estavam frequentemente envolvidos em disputas, especialmente entre si. Apesar disso, ambos fizeram contribuições significativas em diversas áreas da matemática. Com a ajuda do cálculo, resolveram diversos problemas em mecânica formulando-os como equações diferenciais. Por exemplo, Jakob Bernoulli resolveu a equação diferencial $y' = [a^3/(b^2y - a^3)]^{1/2}$ em 1690 e, no mesmo artigo, usou pela primeira vez a palavra "integral" no sentido moderno. Em 1694, Johann Bernoulli foi capaz de resolver a equação dy/dx = y/ax. Um problema resolvido por ambos os irmãos e que gerou muito atrito entre eles foi o problema da *braquistócrona* (veja o Problema

32 da Seção 2.3). O problema da braquistócrona foi resolvido, também, por Leibniz, por Newton e pelo Marquês de L'Hospital. Diz-se, embora sem comprovação, que Newton soube do problema no final da tarde de um dia cansativo na Casa da Moeda e que o resolveu naquela noite após o jantar. Ele publicou a solução anonimamente, mas, ao vê-la, Johann Bernoulli observou: "Ah, conheço o leão pela sua pata".

Daniel Bernoulli (1700-1782), filho de Johann, emigrou para São Petersburgo na juventude para se incorporar à Academia de São Petersburgo, recém-fundada, mas retornou a Basel em 1733 como professor de botânica e, mais tarde, de física. Seus interesses eram, principalmente, em equações diferenciais parciais e suas aplicações. Por exemplo, é seu nome que está associado à equação de Bernoulli em mecânica dos fluidos. Foi, também, o primeiro a encontrar as funções que seriam conhecidas um século mais tarde como funções de Bessel (Seção 5.7).

O maior matemático do século XVIII, Leonhard Euler (1707-1783), cresceu perto de Basel e foi aluno de Johann Bernoulli. Ele seguiu seu amigo Daniel Bernoulli, indo para São Petersburgo em 1727. Durante o resto de sua vida esteve associado à Academia de São Petersburgo (1727-1741 e 1766-1783) e à Academia de Berlim (1741-1766). Euler foi o matemático mais prolífico de todos os tempos; suas obras completas enchem mais de 70 grossos volumes. Seus interesses incluíam todas as áreas da matemática e muitos campos de aplicação. Embora tenha ficado cego durante os últimos 17 anos de sua vida, seu trabalho continuou no mesmo ritmo até o dia de sua morte. De interesse especial para nós aqui é sua formulação matemática de problemas em mecânica e seu desenvolvimento de métodos para resolvê-los. Sobre o trabalho de Euler em mecânica, Lagrange disse ser "o primeiro trabalho importante no qual a análise é aplicada à ciência do movimento". Entre outras coisas, Euler identificou a condição para que equações diferenciais de primeira ordem sejam exatas (Seção 2.6) em 1734-1735, desenvolveu a teoria de fatores integrantes (Seção 2.6) no mesmo artigo e encontrou a solução geral para equações lineares homogêneas com coeficientes constantes (Seções 3.1. 3.3, 3.4 e 4.2) em 1743. Estendeu esse último resultado para equações não homogêneas em 1750-1751. Começando em torno de 1750, Euler usou, com frequência, séries de potências (Capítulo 5) para resolver equações diferenciais. Propôs, também, um procedimento numérico (Seções 2.7 e 8.1) em 1768-1769, fez contribuições importantes em equações diferenciais parciais e deu o primeiro tratamento sistemático do cálculo de variações.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) tornou-se professor de matemática em sua cidade natal, Turim, com 19 anos. Sucedeu Euler na cadeira de matemática na Academia de Berlim em 1766 e foi para a Academia de Paris em 1787. Ele é mais conhecido pelo seu trabalho monumental *Mécanique analytique*, publicado em 1788, um tratado elegante e completo sobre mecânica newtoniana. Em relação a equações diferenciais elementares Lagrange mostrou, no período 1762-1765, que a solução geral de uma equação diferencial linear homogênea de ordem *n* é uma combinação linear *n* soluções independentes (Seções 3.2 e 4.1) Mais tarde, em 1774-1775, desenvolveu completamente o método de variação dos parâmetros (Seções 3.6 e 4.4). Lagrange também é conhecido pelo seu trabalho fundamental em equações diferenciais parciais e cálculo de variações.

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) viveu na Normandia quando menino, mas foi para Paris em 1768 e rapidamente deixou sua marca nos meios científicos, sendo eleito para a Academia de Ciências em 1773. Destacou-se no campo da mecânica celeste; seu trabalho mais importante, *Traité de mécanique celeste*, foi publicado em cinco volumes entre 1799 e 1825. A equação de Laplace é fundamental em muitos ramos da física matemática, e Laplace a estudou extensamente em conexão com a atração gravitacional. A transformada de Laplace (Capítulo 6) recebeu o nome em sua homenagem, embora sua utilidade na resolução de equações diferenciais só tenha sido reconhecida muito mais tarde.

No final do século XVIII, muitos métodos elementares para resolver equações diferenciais ordinárias já tinham sido descobertos. No século XIX iniciou-se a investigação de questões teóricas de existência e unicidade, assim como o desenvolvimento de métodos menos elementares, como os baseados em expansão em séries de potências (veja o Capítulo 5). Esses métodos encontram seu ambiente natural no plano complexo. Por causa disso, eles se beneficiaram, e, até certo ponto, estimularam o desenvolvimento mais ou menos simultâneo da teoria de funções analíticas complexas. As equações diferenciais parciais começaram, também, a ser estudadas intensamente à medida que se tornava claro seu papel crucial em física matemática. Com isso, muitas funções, soluções de certas equações diferenciais ordinárias, começaram a aparecer repetidamente e foram exaustivamente estudadas. Conhecidas coletivamente como funções transcendentais, muitas delas estão associadas a nomes de matemáticos, incluindo Bessel, Legendre, Hermite, Chebyshev e Hankel, entre outros.

As inúmeras equações diferenciais que resistiram a métodos analíticos levaram à investigação de métodos de aproximação numérica (veja o Capítulo 8). Por volta de 1900 já haviam sido desenvolvidos métodos efetivos de integração numérica, mas sua implementação estava severamente prejudicada pela necessidade de se executar os cálculos à mão ou com equipamentos computacionais muito primitivos. Nos últimos 60 anos o desenvolvimento de computadores cada vez mais poderosos e versáteis aumentou

muito a gama de problemas que podem ser investigados, de maneira efetiva, por métodos numéricos. Durante esse mesmo período foram desenvolvidos integradores numéricos extremamente refinados e robustos, facilmente disponíveis. Versões apropriadas para computadores pessoais tornaram possível, para os alunos, a resolução de muitos problemas significativos.

Outra característica das equações diferenciais no século XX foi a criação de métodos geométricos ou topológicos especialmente para equações não lineares. O objetivo é compreender, pelo menos qualitativamente, o comportamento de soluções de um ponto de vista geométrico, assim como analítico. Se há necessidade de mais detalhes, isso pode ser obtido em geral usando-se aproximações numéricas. O Capítulo 9 contém uma introdução a esses métodos geométricos.

Nos últimos anos essas duas tendências se juntaram. Computadores, e, especialmente, computação gráfica trouxeram um novo ímpeto ao estudo de sistemas de equações diferenciais não lineares. Foram descobertos fenômenos inesperados (Seção 9.8), tais como atratores estranhos, caos e fractais, que estão sendo intensamente estudados e estão gerando novas e importantes ideias em diversas aplicações diferentes. Embora seja um assunto antigo sobre o qual muito se sabe, as equações diferenciais no século XXI permanecem sendo uma fonte fértil de problemas fascinantes e importantes ainda não resolvidos.

REFERÊNCIAS

Programas de computador para equações diferenciais mudam muito rápido para se poder dar boas referências em um livro como esse. Uma busca pelo Google sobre Maple, Mathematica ou MATLAB é uma boa maneira de começar, se você precisa de informações sobre um desses sistemas de álgebra computacional.

Para ler mais sobre a história da matemática, procure livros como os listados a seguir: Boyer, C. B., and Merzbach, U. C., A History of Mathematics (2nd ed.) (New York: Wiley, 1989). Kline, M., Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (New York: Oxford University Press, 1972).

Um apêndice histórico útil sobre o desenvolvimento inicial das equações diferenciais aparece em Ince, E. L., Ordinary Differential Equations (London: Longmans, Green, 1927; New York: Dover, 1956).

Uma fonte enciclopédica de informação sobre vidas e feitos de matemáticos do passado é Gillespie, C. C., ed., Dictionary of Scientific Biography (15 vols.) (New York: Scribner's, 1971).

Muita informação histórica pode ser encontrada na Internet. Um site excelente é www-history.mcs.st-and.ac.uk/BiogIndex.html

criado por John J. O'Connor e Edmund F. Robertson, do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade St. Andrews, na Escócia.

2

Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Este capítulo trata de equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y),\tag{1}$$

onde f é uma função dada de duas variáveis. Qualquer função diferenciável $y = \phi(t)$ que satisfaz essa equação para todo t em algum intervalo é chamada de solução. Nosso objetivo é determinar se tal função existe e, nesse caso, desenvolver métodos para encontrá-la. Infelizmente, não existe método geral para resolver a equação em termos de funções elementares para uma função arbitrária f. Em vez disso, descreveremos diversos métodos, cada um deles aplicável a determinada subclasse de equações de primeira ordem. As mais importantes delas são as equações lineares (Seção 2.1), as equações separáveis (Seção 2.2) e as equações exatas (Seção 2.6). Outras seções deste capítulo descrevem algumas das aplicações importantes de equações diferenciais de primeira ordem, introduzem a ideia de aproximar uma solução por cálculos numéricos e discutem algumas questões teóricas relacionadas à existência e à unicidade de soluções. A última seção inclui um exemplo de soluções caóticas no contexto de equações de diferenciais e são mais simples de investigar.

2.1 Equações Lineares; Método dos Fatores Integrantes

Se a função f na Eq. (1) depender linearmente da variável dependente y, então a Eq. (1) é dita uma equação linear de primeira ordem. Nas Seções 1.1 e 1.2 discutimos um tipo restrito de equações lineares de primeira ordem, aquelas com coeficientes constantes. Um exemplo típico é

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b, (2)$$

onde a e b são constantes dadas. Lembre-se de que uma equação dessa forma descreve o movimento de um objeto em queda na atmosfera. Vamos considerar agora a equação linear de primeira ordem mais geral, obtida substituindo-se os coeficientes a e b na Eq. (2) por funções arbitrárias de t. Em geral escreveremos a equação linear de primeira ordem geral na forma-padrão

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t), (3)$$

onde p e g são funções dadas da variável independente t.

A Eq. (2) pode ser resolvida pelo método de integração introduzido na Seção 1.2. Ou seja, se $a \ne 0$ e $y \ne b/a$, podemos escrever a equação na forma

$$\frac{dy/dt}{y - (b/a)} = -a. (4)$$

Então, integrando, obtemos

$$ln |y - (b/a)| = -at + C,$$

donde segue que a solução geral da Eq. (2) é

$$y = (b/a) + ce^{-at}, (5)$$

onde c é uma constante arbitrária.

Infelizmente, esse método direto de solução não pode ser usado para resolver a equação geral (3), de modo que precisaremos de um método diferente. Esse método é devido a Leibniz; ele envolve a multiplicação da equação diferencial (3) por uma determinada função $\mu(t)$ escolhida de modo que a equação resultante seja facilmente integrável. A função $\mu(t)$ é chamada de **fator integrante**, e a principal dificuldade é determinar como encontrá-la. Vamos introduzir esse método em um exemplo simples e mostrar mais adiante como estendê-lo a outras equações lineares de primeira ordem, incluindo a equação geral (3).

EXEMPLO 1

Resolva a equação diferencial

 $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{t/3}. (6)$

Desenhe o gráfico de diversas soluções e encontre a solução particular cujo gráfico contém o ponto (0, 1). O primeiro passo é multiplicar a Eq. (6) por uma função $\mu(t)$, ainda a determinar; assim

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}\mu(t)y = \frac{1}{2}\mu(t)e^{t/3}.$$
 (7)

Precisamos agora saber se podemos escolher $\mu(t)$ de tal modo que a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (7) seja reconhecida como a derivada de alguma expressão particular. Se for possível, poderemos integrar a Eq. (7) mesmo sem conhecer a função y. Para orientar a escolha do fator integrante $\mu(t)$, pergunte a si mesmo onde, em cálculo, você já viu uma expressão contendo um termo da forma $\mu(t)dy/dt$. Você está na pista certa se isso lhe lembra a regra do produto para a diferenciação. Vamos tentar, então, determinar $\mu(t)$ de modo que a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (7) seja a derivada do produto $\mu(t)$ y. Comparando a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (7) com a fórmula de diferenciação

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu(t)}{dt}y,$$
(8)

observamos que serão iguais se escolhermos $\mu(t)$ de modo que

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \frac{1}{2}\mu(t). \tag{9}$$

Portanto, nossa busca por um fator integrante terá sucesso se pudermos encontrar uma solução para a Eq. (9). Talvez você possa identificar imediatamente uma função que satisfaz a Eq. (9): que função bem conhecida no cálculo tem derivada igual à metade da função original? De maneira mais sistemática, podemos reescrever a Eq. (9) como

$$\frac{d\mu(t)/dt}{\mu(t)} = \frac{1}{2},\tag{10}$$

que é equivalente a

$$\frac{d}{dt}\ln|\mu(t)| = \frac{1}{2}.\tag{11}$$

Segue então que

$$\ln|\mu(t)| = \frac{1}{2}t + C,$$
(12)

ou

$$\mu(t) = ce^{t/2}.\tag{13}$$

A função $\mu(t)$ dada pela Eq. (13) é um fator integrante para a Eq. (6). Como não precisamos do fator integrante mais geral possível, escolheremos c igual a um na Eq. (13) e usaremos $\mu(t) = e^{t/2}$.

Vamos voltar para a Eq. (6) e multiplicá-la pelo fator integrante e^{1/2} para obter

$$e^{t/2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}e^{t/2}y = \frac{1}{2}e^{5t/6}$$
 (14)

Pela escolha que fizemos do fator integrante, a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (14) é a derivada de e^{a2} y, de modo que a Eq. (14) fica

$$\frac{d}{dt}(e^{t/2}y) = \frac{1}{2}e^{5t/6}. (15)$$

Integrando a Eq. (15), obtemos

$$e^{t/2}y = \frac{3}{5}e^{5t/6} + c, (16)$$

onde c é uma constante arbitrária. Finalmente, resolvendo a Eq. (16) para y, obtemos a solução geral da Eq. (6), a saber,

$$y = \frac{3}{5}e^{t/3} + ce^{-t/2}. (17)$$

Para encontrar a solução cujo gráfico contém o ponto (0.1). fazemos t = 0 e y = 1 na Eq. (17), obtendo 1 = (3/5) + c. Logo, c = 2/5 e a solução desejada é

$$y = \frac{3}{5}e^{t/3} + \frac{2}{5}e^{-t/2}. (18)$$

A Figura 2.1.1 inclui os gráficos da Eq. (17) para diversos valores de c com um campo de direções ao fundo. A solução contendo o ponto (0, 1) está indicada por uma linha mais grossa.

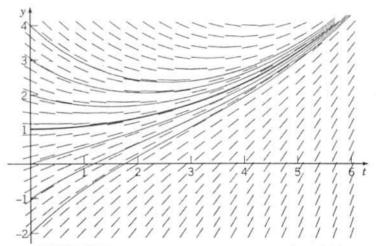


FIGURA 2.1.1 Curvas integrais da equação $y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{t/3}$.

Vamos agora estender o método dos fatores integrantes a equações da forma

$$\frac{dy}{dt} + ay = g(t), (19)$$

onde a é uma constante dada e g(t) é uma função dada. Procedendo como no Exemplo 1, vemos que o fator integrante $\mu(t)$ tem que satisfazer

$$\frac{d\mu}{dt} = a\mu,\tag{20}$$

em vez da Eq. (9). Logo, o fator integrante é $\mu(t) = e^{\mu}$. Multiplicando a Eq. (19) por $\mu(t)$, obtemos

$$e^{at}\frac{dy}{dt} + ae^{at}y = e^{at}g(t),$$

ou

$$\frac{d}{dt}(e^{at}y) = e^{at}g(t). \tag{21}$$

Integrando a Eq. (21), encontramos

$$e^{at}y = \int e^{at}g(t) dt + c, \qquad (22)$$

onde c é uma constante arbitrária. Para muitas funções simples g(t) podemos calcular a integral na Eq. (22) e expressar a solução y em termos de funções elementares, como no Exemplo 1. No entanto, para funções g(t) mais complicadas, pode ser necessário deixar a solução em forma integral. Nesse caso,

$$y = e^{-at} \int_{t_0}^t e^{as} g(s) ds + ce^{-at}.$$
 (23)

Note que denotamos por s a variável de integração na Eq. (23), para distingui-la da variável independente t, e escolhemos algum valor conveniente t_0 para o limite inferior de integração.

EXEMPLO

Resolva a equação diferencial

 $\frac{dy}{dt} - 2y = 4 - t \tag{24}$

e desenhe gráficos de diversas soluções. Discuta o comportamento das soluções quando $t \to \infty$.

A Eq. (24) é da forma (19) com a = -2; logo, o fator integrante é $\mu(t) = e^{-2t}$. Multiplicando a equação diferencial (24) por $\mu(t)$, obtemos

$$e^{-2t}\frac{dy}{dt} - 2e^{-2t}y = 4e^{-2t} - te^{-2t},$$
(25)

OU

$$\frac{d}{dt}(e^{-2t}y) = 4e^{-2t} - te^{-2t}. (26)$$

Integrando a equação diferencial, temos

$$e^{-2t}y = -2e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t} + c$$

onde usamos integração por partes no último termo da Eq. (26). Logo, a solução geral da Eq. (24) é

$$y = -\frac{7}{4} + \frac{1}{5}t + ce^{2t}. (27)$$

A Figura 2.1.2 mostra um campo de direções e gráficos da solução (27) para diversos valores de c. O comportamento das soluções para valores grandes de t é determinado pelo termo ce^{2t} . Se $c \neq 0$, a solução cresce exponencialmente em módulo com o mesmo sinal que c. Portanto, a solução diverge quando t se torna muito grande. A fronteira entre soluções que divergem positivamente e que divergem negativamente ocorre quando c=0. Se escolhermos c=0 na Eq. (27) e fizermos t=0, veremos que y=-7/4 é o ponto de separação no eixo dos y. Note que para esse valor inicial a solução é $y=-\frac{7}{4}+\frac{1}{2}t$; essa solução cresce positivamente, mas linearmente e não exponencialmente.

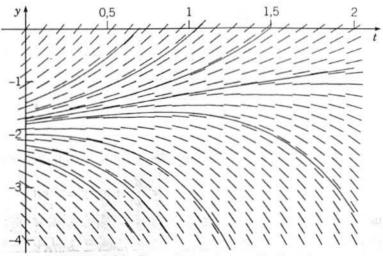


FIGURA 2.1.2 Curvas integrais para y' - 2y = 4 - t.

2

27

Vamos voltar para a equação linear geral de primeira ordem (3)

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t),$$

onde p e g são funções dadas. Para determinar um fator integrante apropriado, multiplicamos a Eq. (3) por uma função $\mu(t)$ a ser determinada, obtendo

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t). \tag{28}$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio do Exemplo 1, vemos que a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (28) é a derivada de um produto $\mu(t)y$, desde que $\mu(t)$ satisfaça a equação

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t). \tag{29}$$

Supondo temporariamente que $\mu(t)$ é positiva, temos

$$\frac{d\mu(t)/dt}{\mu(t)} = p(t),$$

e, em consequência,

$$\ln \mu(t) = \int p(t) \, dt + k.$$

Escolhendo a constante arbitrária k como zero, obtemos a função mais simples possível para μ , a saber,

$$\mu(t) = \exp \int p(t) dt. \tag{30}$$

Note que $\mu(t)$ é positiva para todo t, como supusemos. Voltando para a Eq. (28), temos

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)g(t). \tag{31}$$

Portanto,

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t) dt + c, \tag{32}$$

onde c é uma constante arbitrária. Algumas vezes a integral na Eq. (32) pode ser calculada em termos de funções elementares. No entanto, isso não é possível, em geral, de modo que a solução geral da Eq. (3) é

$$y = \frac{1}{\mu(t)} \left[\int_{t_0}^{t} \mu(s)g(s) \, ds + c \right], \tag{33}$$

onde, mais uma vez, t_0 é algum limite inferior de integração conveniente. Observe que a Eq. (33) envolve duas integrações, uma para obter $\mu(t)$ da Eq. (30) e outra para determinar y da Eq. (33).

EXEMPLO I

3

Resolva o problema de valor inicial

$$ty' + 2y = 4t^2, (34)$$

$$y(1) = 2.$$
 (35)

Para determinar p(t) e g(t) corretamente, precisamos primeiro colocar a Eq. (34) na forma-padrão (3). Temos

$$y' + (2/t)y = 4t,$$
 (36)

de modo que p(t) = 2/t e g(t) = 4t. Para resolver a Eq. (36), primeiro calculamos o fator integrante $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \exp \int \frac{2}{t} dt = e^{2\ln|t|} = t^2.$$

Multiplicando a Eq. (36) por $\mu(t) = t^2$, obtemos

$$t^2 y' + 2ty = (t^2 y)' = 4t^3$$

e, portanto,

$$t^2y = t^4 + c,$$

onde c é uma constante arbitrária. Segue que

$$y = t^2 + \frac{c}{t^2} (37)$$

é a solução geral da Eq. (34). A Figura 2.1.3 mostra curvas integrais para a Eq. (34) para diversos valores de c. Para satisfazer a condição inicial (35), é necessário escolher c = 1; assim,

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2}, \quad t > 0$$
 (38)

é a solução do problema de valor inicial (34), (35). Essa solução corresponde à curva mais grossa na Figura 2.1.3. Note que ela se torna ilimitada e se aproxima assintoticamente do semieixo positivo dos y quando $t \rightarrow 0$ pela direita. Esse é o efeito da descontinuidade infinita do coeficiente p(t) na origem. A função $y = t^2 + (1/t^2)$ para t < 0 não é parte da solução desse problema de valor inicial.

Esse é o primeiro exemplo no qual a solução não existe para alguns valores de t. Novamente, isso é devido à descontinuidade infinita de p(t) em t = 0, que restringe a solução ao intervalo $0 < t < \infty$.

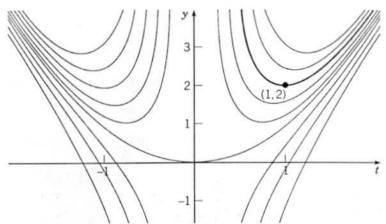


FIGURA 2.1.3 Curvas integrais para $ty' + 2y = 4t^2$.

Olhando novamente para a Figura 2.1.3, vemos que algumas soluções (aquelas para as quais c > 0) são assintóticas ao semieixo positivo dos y quando $t \to 0$ pela direita, enquanto outras soluções (para as quais c < 0) são assintóticas ao semieixo negativo dos y. A solução para a qual c = 0, a saber, $y = t^2$, permanece limitada e diferenciável até em t = 0. Se generalizarmos a condição inicial (35) para

$$y(1) = y_0,$$
 (39)

então $c = y_0 - 1$ e a solução (38) fica

$$y = t^2 + \frac{y_0 - 1}{t^2}, \quad t > 0 \text{ se } y_0 \neq 1.$$
 (40)

Como no Exemplo 2, este é outro caso particular onde existe um valor inicial crítico, a saber, $y_0 = 1$, que separa soluções que se comportam de duas maneiras bem diferentes.

EXEMPLO

Resolva o problema de valor inicial

$$2y' + ty = 2, (41)$$

$$y(0) = 1.$$
 (42)

Para colocar a equação diferencial (41) na forma-padrão (3) precisamos dividir por 2, obtendo

$$y' + (t/2)y = 1. (43)$$

Logo, p(t) = t/2 e o fator integrante é $\mu(t) = \exp(t^2/4)$. Então multiplique a Eq. (43) por $\mu(t)$, de modo que

$$e^{t^2/4}y' + \frac{t}{2}e^{t^2/4}y = e^{t^2/4}$$
. (44)

29

A expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (44) é a derivada de $e^{r^2/4}y$, portanto, integrando a Eq. (44)

$$e^{t^2/4}y = \int e^{t^2/4} dt + c. \tag{45}$$

A integral na Eq. (45) não pode ser calculada em termos das funções elementares usuais, de modo que a deixamos em forma integral. No entanto, escolhendo o limite inferior de integração como o ponto inicial t = 0podemos substituir a Eq. (45) por

$$e^{t^2/4}y = \int_0^t e^{s^2/4} ds + c,$$
 (46)

onde c é uma constante arbitrária. Segue, então, que a solução geral y da Eq. (41) é dada por

$$y = e^{-t^2/4} \int_0^t e^{s^2/4} ds + ce^{-t^2/4}.$$
 (47)

A condição inicial (42) requer que c = 1.

O principal objetivo deste exemplo é ilustrar que algumas vezes a solução tem que ser deixada em função de uma integral. Em geral, isso é no máximo ligeiramente inconveniente, e não um obstáculo sério. Para um dado valor de t. a integral na Eq. (47) é uma integral definida, e pode ser aproximada com qualquer precisão desejada usando-se integradores numéricos facilmente disponíveis. Repetindo esse processo para muitos valores de t e colocando os resultados em um gráfico, você pode obter um gráfico da solução. De maneira alternativa, você pode usar um método numérico de aproximação, como os discutidos no Capítulo 8, que partem diretamente da equação diferencial e não precisam de uma expressão para a solução. Pacotes de programas como Maple e Mathematica executam rapidamente tais procedimentos e produzem gráficos de soluções de equações diferenciais.

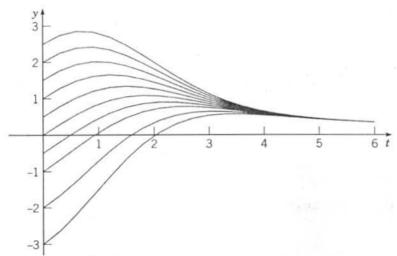


FIGURA 2.1.4 Curvas integrais para 2y' + ty = 2.

A Figura 2.1.4 mostra gráficos das soluções (47) para diversos valores de c. Da figura, parece plausível conjeturar que todas as soluções tendem a um limite quando $t \to \infty$. O limite pode ser encontrado analiticamente (veja o Problema 32).

PROBLEMAS Em cada um dos Problemas de 1 a 12:

- (a) Desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada.
- (b) Baseado em uma análise do campo de direções, descreva o comportamento das soluções para valores grandes de t.
- (c) Encontre a solução geral da equação diferencial dada e use-a para determinar o comportamento das soluções quando $t \to \infty$.

3.
$$y' + y = te^{-t} + 1$$

5.
$$y' - 2y = 3e^t$$

(2)
$$y' - 2y = t^2 e^{2t}$$

$$\begin{cases} 2 & y' - 2y = t^2 e^{2t} \\ 4 & y' + (1/t)y = 3\cos 2t, \quad t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6. & ty' + 2y = \sin t, \quad t > 0 \end{cases}$$

6.
$$ty' + 2y = \text{sen } t$$
, $t > 0$

8.
$$(1+t^2)y' + 4ty = (1+t^2)^{-2}$$

9.
$$2y' + y = 3y'$$

8.
$$(1+t^2)y' + 4ty = (1+t^2)^{-2}$$

10. $ty' - y = t^2e^{-t}$, $t > 0$
12. $2y' + y = 3t^2$

11.
$$y' + y = 5 \sin 2$$

12.
$$2y' + y = 3t^2$$

Em cada um dos Problemas de 13 a 20, encontre a solução do problema de valor inicial dado.

13.
$$y' - y = 2te^{2t}$$
, $y(0) = 1$

$$(14.)$$
 $y' + 2y = te^{-2t}$, $y(1) = 0$

15.
$$ty' + 2y = t^2 - t + 1$$
, $y(1) = \frac{1}{2}$, $t > 0$

13.
$$y' - y = 2te^{2t}$$
, $y(0) = 1$
14. $y' + 2y = te^{-2t}$, $y(1) = 0$
15. $ty' + 2y = t^2 - t + 1$, $y(1) = \frac{1}{2}$, $t > 0$
16. $y' + (2/t)y = (\cos t)/t^2$, $y(\pi) = 0$, $t > 0$

17.
$$y' - 2y = e^{2t}$$
, $y(0) = 2$

18.
$$ty' + 2y = \text{sen}t$$
, $y(\pi/2) = 1$, $t > 0$

19.
$$t^3y' + 4t^2y = e^{-t}$$
, $y(-1) = 0$, $t < 0$

20.
$$ty' + (t+1)y = t$$
, $y(\ln 2) = 1$, $t > 0$

Em cada um dos Problemas de 21 a 23:

- (a) Desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Como parece que as soluções se comportam quando t assume valores grandes? O comportamento depende da escolha do valor inicial a? Seja ano valor de a no qual ocorre a transição de um tipo de comportamento para outro. Estime o valor de a₀,
- (b) Resolva o problema de valor inicial e encontre precisamente o valor crítico a₀.
- (c) Descreva o comportamento da solução correspondente ao valor inicial a₀.

(2) 21.
$$y' - \frac{1}{2}y = 2\cos t$$
, $y(0) = a$

22.
$$2y' - y = e^{t/3}$$
, $y(0) = a$

22.
$$2y' - y = e^{t/3}$$
, $y(0) = a$
23. $3y' - 2y = e^{-\pi t/2}$, $y(0) = a$

Em cada um dos Problemas de 24 a 26:

- (a) Desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Como parece que as soluções se comportam quando $t \to 0$? O comportamento depende da escolha do valor inicial a? Seja a_0 o valor de a no qual ocorre a transição de um tipo de comportamento para outro. Estime o valor de a_0 .
- (b) Resolva o problema de valor inicial e encontre precisamente o valor crítico a_0 .
- (c) Descreva o comportamento da solução correspondente ao valor inicial a₀.

24.
$$ty' + (t+1)y = 2te^{-t}$$
, $y(1) = a$, $t > 0$

25.
$$ty' + 2y = (\text{sen}t)/t$$
, $y(-\pi/2) = a$, $t < 0$

25.
$$ty' + 2y = (\text{sen}t)/t$$
, $y(-\pi/2) = a$, $t < 0$
26. $(\text{sen}t)y' + (\cos t)y = e^t$, $y(1) = a$, $0 < t < \pi$

$$y' + \frac{1}{2}y = 2\cos t$$
, $y(0) = -1$.

Encontre as coordenadas do primeiro ponto de máximo local da solução para t > 0.

(S) Considere o problema de valor inicial

$$y' + \frac{2}{3}y = 1 - \frac{1}{2}t$$
, $y(0) = y_0$.

Encontre o valor de y₀ para o qual a solução toca, mas não cruza, o eixo dos t. Considere o problema de valor inicial

$$y' + \frac{1}{4}y = 3 + 2\cos 2t$$
, $y(0) = 0$.

- (a) Encontre a solução deste problema de valor inicial e descreva seu comportamento para valores grandes de t.
- (b) Determine o valor de t para o qual a solução intersecta pela primeira vez a reta y = 12.
- 30. Encontre o valor de y₀ para o qual a solução do problema de valor inicial

$$y' - y = 1 + 3 \operatorname{sen} t$$
, $y(0) = y_0$

permanece finita quando $t \rightarrow \infty$.

31.) Considere o problema de valor inicial
$$y' - \frac{3}{2}y = 3t + 2e^t, \qquad y(0) = y_0.$$

31

Encontre o valor de y_0 que separa as soluções que crescem positivamente quando $t \to \infty$ das que crescem em módulo, mas permanecem negativas. Como a solução que corresponde a esse valor crítico de y_0 se comporta quando $t \to \infty$?

32. Mostre que todas as soluções de 2y' + ty = 2 [veja a Eq. (41) do texto] tendem a um limite quando t → x e encontre esse limite.

Sugestão: considere a solução geral, Eq. (47), e use a regra de L'Hospital no primeiro termo.

 Mostre que, se a e λ são constantes positivas e se b é um número real arbitrário, então toda solução da equação

$$y' + ay = be^{-\lambda t}$$

tem a propriedade de que $y \to 0$ quando $t \to \infty$.

Sugestão: Considere os casos $a = \lambda$ e $a \neq \lambda$ separadamente.

Em cada um dos Problemas de 34 a 37, construa uma equação diferencial linear de primeira ordem cujas soluções têm o comportamento descrito quando $t \to \infty$. Depois resolva sua equação e confirme que todas as soluções têm, de fato, a propriedade especificada.

- 34. Todas as soluções têm limite 3 quando $t \rightarrow \infty$.
- 35. Todas as soluções são assintóticas à reta y = 3 t quando $t \to \infty$.
- 36. Todas as soluções são assintóticas à reta y = 2t 5 quando $t \rightarrow \infty$.
- 37. Todas as soluções se aproximam da curva $y = 4 t^2$ quando $t \rightarrow \infty$.
- 38. Variação dos Parâmetros. Considere o seguinte método de resolução da equação linear de primeira ordem geral:

$$y' + p(t)y = g(t). (i)$$

(a) Se g(t) = 0 para todo t, mostre que a solução é

$$y = A \exp \left[-\int p(t) dt \right], \tag{ii}$$

onde A é uma constante.

(b) Se g(t) não é identicamente nula, suponha que a solução da Eq. (i) é da forma

$$y = A(t) \exp\left[-\int p(t) dt\right], \tag{iii}$$

onde A agora é uma função de t. Substituindo y na equação diferencial por essa expressão, mostre que A(t) tem que satisfazer a condição

$$A'(t) = g(t) \exp\left[\int p(t) dt\right].$$
 (iv)

(c) Encontre A(t) da Eq. (iv). Depois substitua A(t) na Eq. (iii) por essa solução para determinar y. Verifique que a solução obtida dessa maneira é igual à solução da Eq. (33) no texto. Essa técnica é conhecida como o método de variação dos parâmetros; é discutida em detalhes na Seção 3.6 em conexão com equações lineares de segunda ordem.

Em cada um dos Problemas de 39 a 42, use o método do Problema 38 para resolver a equação diferencial dada.

39.
$$y' - 2y = t^2 e^{2t}$$

40.
$$y' + (1/t)y = 3\cos 2t$$
, $t > 0$

41.
$$ty' + 2y = \text{sen}t$$
, $t > 0$

42.
$$2y' + y = 3t^2$$

2.2 Equações Separáveis

Nas Seções 1.2 e 2.1 usamos um processo de integração direta para resolver equações lineares de primeira ordem da forma

$$\frac{dy}{dt} = ay + b, (1)$$

onde a e *b* são constantes. Vamos mostrar agora que esse processo pode ser aplicado, de fato, a uma classe muito maior de equações.

Vamos usar x, em vez de t, para denotar a variável independente nesta seção por duas razões. Em primeiro lugar, letras diferentes são utilizadas com frequência para as variáveis em uma equação diferencial, e você não deve ficar acostumado a um único par. Em particular, a letra x é muito usada para a variável independente. Além disso, queremos reservar t para outra coisa mais adiante na seção.

A equação geral de primeira ordem é

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). (2)$$

Consideramos equações lineares na seção precedente, mas se a Eq. (2) não for linear, então não existe método universalmente aplicável. Vamos considerar aqui uma subclasse das equações de primeira ordem que podem ser resolvidas por integração direta.

Para identificar essa classe de equações, vamos primeiro colocar a Eq. (2) na forma

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0. (3)$$

Sempre é possível fazer isso definindo M(x,y) = -f(x,y) e N(x,y) = 1, mas também existem outras maneiras. Se acontecer que M só depende de x e que N só depende de y, então a Eq. (3) fica

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0. (4)$$

Tal equação é dita separável porque, se for escrita na forma diferencial

$$M(x) dx + N(y) dy = 0, (5)$$

então, se você quiser, as parcelas envolvendo cada variável podem ser colocadas em lados opostos do sinal de igualdade. A forma diferencial (5) também é mais simétrica e tende a diminuir a diferença entre a variável independente e a dependente.

Uma equação separável pode ser resolvida integrando-se as funções M e N. Vamos ilustrar o processo em um exemplo e depois discuti-lo em geral para a Eq. (4).

EXEMPLO

1

Mostre que a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 - y^2} \tag{6}$$

é separável e depois encontre uma equação para suas curvas integrais.

Se colocarmos a Eq. (6) na forma

$$-x^2 + (1 - y^2)\frac{dy}{dx} = 0, (7)$$

ela tem a forma (4) e é, portanto, separável. Lembre-se do cálculo que, se y é uma função de x, então, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}f(y) = \frac{d}{dy}f(y) \frac{dy}{dx} = f'(y)\frac{dy}{dx}.$$

Por exemplo, se $f(y) = y - y^3/3$, então

$$\frac{d}{dx}(y - y^3/3) = (1 - y^2)\frac{dy}{dx}.$$

Logo, o segundo termo na Eq. (7) é a derivada de $y - y^3/3$ em relação a x e o primeiro é a derivada de $-x^3/3$. Assim, a Eq. (7) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{3}\right) + \frac{d}{dx}\left(y - \frac{y^3}{3}\right) = 0,$$

ou

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{3} + y - \frac{y^3}{3}\right) = 0.$$

Portanto, integrando, obtemos

$$-x^3 + 3y - y^3 = c, (8)$$

onde c é uma constante arbitrária. A Eq. (8) é uma equação para as curvas integrais da Eq. (6). A Figura 2.2.1 mostra um campo de direções e diversas curvas integrais. Qualquer função diferenciável $y = \phi(x)$ que satisfaz a Eq. (8) é uma solução da Eq. (6). Uma equação para a curva integral que contém um ponto particular (x_0, y_0) pode ser encontrada substituindo-se x e y, respectivamente, por x_0 e y_0 na Eq. (8) para determinar o valor correspondente de c.

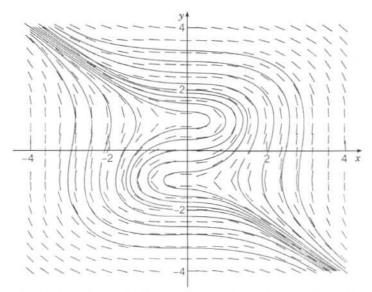


FIGURA 2.2.1 Campo de direções e curvas integrais para $y' = x^2/(1 - y^2)$.

Essencialmente o mesmo procedimento pode ser seguido para qualquer equação separável. Voltando à Eq. (4), sejam H_1 e H_2 duas primitivas quaisquer de M e N, respectivamente. Logo

$$H'_1(x) = M(x), H'_2(y) = N(y),$$
 (9)

e a Eq. (4) fica

$$H'_1(x) + H'_2(y)\frac{dy}{dx} = 0.$$
 (10)

De acordo com as regra da cadeia,

$$H_2'(y)\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}H_2(y)\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}H_2(y).$$
 (11)

Em consequência, podemos escrever a Eq. (10) como

$$\frac{d}{dx}[H_1(x) + H_2(y)] = 0. {(12)}$$

Integrando a Eq. (12), obtemos

$$H_1(x) + H_2(y) = c,$$
 (13)

onde c é uma constante arbitrária. Qualquer função diferenciável $y = \phi(x)$ que satisfaz a Eq. (13) é uma solução da Eq. (4); em outras palavras, a Eq. (13) define a solução implicitamente, em vez de explicitamente. Na prática a Eq. (13) é obtida, em geral, da Eq. (5) integrando-se a primeira parcela em relação a x e a segunda em relação a y.

A equação diferencial (4), junto com uma condição inicial

$$y(x_0) = y_0,$$
 (14)

forma um problema de valor inicial. Para resolver esse problema de valor inicial, precisamos determinar o valor apropriado da constante c na Eq. (13). Esse valor é obtido fazendo-se $x = x_0$ e $y = y_0$ na Eq. (13), resultando em

$$c = H_1(x_0) + H_2(y_0). (15)$$

Substituindo c na Eq. (13) por esse valor e observando que

$$H_1(x) - H_1(x_0) = \int_{x_0}^x M(s) \, ds, \qquad H_2(y) - H_2(y_0) = \int_{y_0}^y N(s) \, ds,$$

obtemos

$$\int_{x_0}^x M(s) \, ds + \int_{y_0}^y N(s) \, ds = 0. \tag{16}$$

A Eq. (16) é uma representação implícita da solução da equação diferencial (4) que satisfaz a condição inicial (14). Você deve ter em mente o fato de que, para obter uma fórmula explícita para a solução, é preciso resolver a Eq. (16) para y como função de x. Infelizmente, muitas vezes isso é impossível analiticamente; em tais casos, você pode apelar para métodos numéricos para encontrar valores aproximados de y para valores dados de x.

EXEMPLO 2

Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}, \qquad y(0) = -1,$$
(17)

e determine o intervalo no qual a solução existe.

A equação diferencial pode ser escrita como

$$2(y-1) dy = (3x^2 + 4x + 2) dx.$$

Integrando a expressão à esquerda do sinal de igualdade em relação a y e a expressão à direita em relação a x, obtemos

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c, (18)$$

onde c é uma constante arbitrária. Para determinar a solução que satisfaz a condição inicial dada, fazemos x = 0 e y = -1 na Eq. (18), obtendo c = 3. Logo a solução do problema de valor inicial é dada implicitamente por

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3. (19)$$

Para obter a solução explícita, precisamos resolver a Eq. (19) para y em função de x. Isso é fácil neste caso, já que a Eq. (19) é do segundo grau em y; obtemos então

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}. (20)$$

A Eq. (20) nos fornece duas soluções da equação diferencial, mas apenas uma delas satisfaz a condição inicial. Essa é a solução correspondente ao sinal de menos na Eq. (20), de modo que, finalmente, obtemos

$$y = \phi(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$
 (21)

como solução do problema de valor inicial (17). Note que, se o sinal de mais fosse escolhido erradamente na Eq. (20), obteríamos a solução da mesma equação diferencial que satisfaz a condição inicial y(0) = 3. Finalmente, para determinar o intervalo no qual a solução (21) é válida, precisamos encontrar o intervalo no qual a expressão dentro da raiz quadrada é positiva. O único zero real dessa expressão é x = -2, de modo que o intervalo desejado é x > -2. A solução do problema de valor inicial e algumas outras curvas integrais da equação diferencial estão ilustradas na Figura 2.2.2. Observe que a fronteira do intervalo de validade da solução (21) é determinado pelo ponto (-2,1) no qual a reta tangente é vertical.

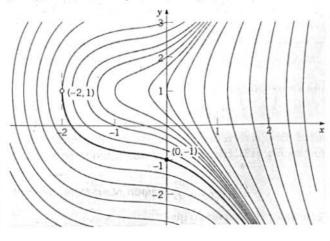


FIGURA 2.2.2 Curvas integrais para $y' = (3x^2 + 4x + 2)/[2(y-1)].$

EXEMPLO

Resolva a equação

3

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - x^3}{4 + y^3} \tag{22}$$

e desenhe gráficos de diversas curvas integrais. Encontre, também, a solução que contém o ponto (0,1) e determine seu intervalo de validade.

Colocando a Eq. (22) na forma

$$(4 + y^3) dy = (4x - x^3) dx$$

integrando, multiplicando por 4 e arrumando os termos, obtemos

$$y^4 + 16y + x^4 - 8x^2 = c, (23)$$

onde c é uma constante arbitrária. Qualquer função diferenciável $y = \phi(x)$ que satisfaz a Eq. (23) é uma solução da equação diferencial (22). A Figura 2.2.3 mostra gráficos da Eq. (23) para diversos valores de c.

Para encontrar a solução particular que contém o ponto (0,1), fazemos x = 0 e y = 1 na Eq. (23), obtendo c = 17. Logo, a solução em pauta é dada implicitamente por

$$y^4 + 16y + x^4 - 8x^2 = 17. (24)$$

Ela corresponde à curva mais grossa na Figura 2.2.3. O intervalo de validade dessa solução estende-se dos dois lados do ponto inicial enquanto a função permanecer diferenciável. Da figura, vemos que o intervalo termina quando encontramos pontos onde a tangente é vertical. Segue da equação diferencial (22) que esses pontos correspondem a $4 + y^3 = 0$, ou $y = (-4)^{1/3} \equiv -1,5874$. Da Eq. (24), os valores correspondentes de x são $x \equiv \pm 3,3488$. Esses pontos estão marcados na Figura 2.2.3.

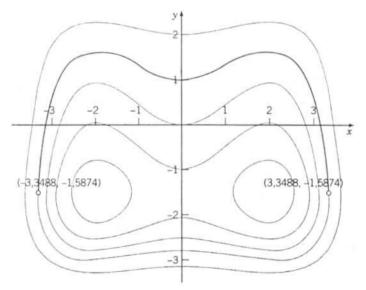


FIGURA 2.2.3 Curvas integrais para $y' = (4x - x^3)/(4 + y^3)$. A curva mais grossa corresponde à solução contendo o ponto (0, 1).

Nota 1: Algumas vezes uma equação da forma (2),

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

tem uma solução constante $y = y_0$. Em geral, tal solução é fácil de encontrar porque, se $f(x,y_0) = 0$ para algum valor de y_0 e para todo x, então a função constante $y = y_0$ é solução da equação diferencial (2). Por exemplo, a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y-3)\cos x}{1+2y^2}$$
 (25)

tem a solução constante y = 3. Outras soluções dessa equação podem ser obtidas separando-se as variáveis e integrando-se.

Nota 2: A investigação de uma equação não linear de primeira ordem pode ser facilitada, algumas vezes, considerando-se tanto x quanto y como funções de uma terceira variável t. Assim,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}.$$
 (26)

Se a equação diferencial é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F(x,y)}{G(x,y)},\tag{27}$$

então, comparando os numeradores e denominadores nas Eqs. (26) e (27) obtemos o sistema

$$dx/dt = G(x,y), dy/dt = F(x,y). (28)$$

À primeira vista pode parecer estranho que um problema possa ser simplificado substituindo-se uma única equação por duas, mas de fato o sistema (28) pode ser mais simples de analisar do que a Eq. (27). O Capítulo 9 trata de sistemas não lineares da forma (28).

Nota 3: Não foi difícil, no Exemplo 2, resolver explicitamente para y em função de x. No entanto, essa situação é excepcional e, muitas vezes, é melhor deixar a solução em forma implícita, como nos Exemplos 1 e 3. Assim, nos problemas a seguir e em outras seções onde aparecem equações não lineares as palavras "resolva a equação diferencial a seguir" significam encontrar a solução explicitamente se for conveniente, mas, caso contrário, encontrar uma equação que defina a solução implicitamente.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 8, resolva a equação diferencial dada.

1.
$$y' = x^2/y$$

2. $y' = x^2/y(1 + x^3)$
3. $y' + y^2 \sin x = 0$
4. $y' = (3x^2 - 1)(3 + 2y)$
5. $y' = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)$
6. $xy' = (1 - y^2)^{1/2}$
7. $\frac{dy}{dx} = \frac{x - e^{-x}}{y + e^y}$
8. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 + y^2}$

Em cada um dos Problemas de 9 a 20:

- (a) Encontre a solução do problema de valor inicial dado em forma explícita.
- (b) Desenhe o gráfico da solução.
- (c) Determine (pelo menos aproximadamente) o intervalo no qual a solução está definida.

19.
$$\sec 2x \, dx + \cos 3y \, dy = 0$$
, $y(\pi/2) = \pi/3$
20. $y^2(1 - x^2)^{1/2} dy = \arcsin x \, dx$, $y(0) = 1$

Alguns dos resultados pedidos nos Problemas de 21 a 28 podem ser obtidos resolvendo-se a equação dada analiticamente ou gerando-se gráficos de aproximações numéricas das soluções. Tente formar uma opinião sobre as vantagens e desvantagens de cada abordagem.

21. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = (1 + 3x^2)/(3y^2 - 6y),$$
 $y(0) = 1$

e determine o intervalo de validade da solução.

Sugestão: Para encontrar o intervalo de validade, procure pontos onde a curva integral tem uma tangente vertical.

22. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = 3x^2/(3y^2 - 4),$$
 $y(1) = 0$

37

e determine o intervalo de validade da solução.

Sugestão: Para encontrar o intervalo de validade, procure pontos onde a curva integral tem uma tangente vertical.

23. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = 2y^2 + xy^2$$
, $y(0) = 1$

e determine onde a solução atinge seu valor mínimo.

$$y' = (2 - e^x)/(3 + 2y),$$
 $y(0) = 0$

e determine onde a solução atinge seu valor máximo.

25. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = 2\cos 2x/(3+2y),$$
 $y(0) = -1$

e determine onde a solução atinge seu valor máximo. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = 2(1+x)(1+y^2), y(0) = 0$$

e determine onde a solução atinge seu valor mínimo.

27. Considere o problema de valor inicial

$$y' = ty(4 - y)/3,$$
 $y(0) = y_0.$

- (a) Determine o comportamento da solução em função do valor inicial y₀ quando t aumenta.
- (b) Suponha que $y_0 = 0.5$. Encontre o instante T no qual a solução atinge, pela primeira vez, o valor 3,98. Considere o problema de valor inicial

$$y' = ty(4 - y)/(1 + t),$$
 $y(0) = y_0 > 0.$

- (a) Determine o comportamento da solução quando $t \to \infty$.
- (b) Se $y_0 = 2$, encontre o instante T no qual a solução atinge, pela primeira vez, o valor 3,99.
- (c) Encontre o intervalo de valores iniciais para os quais a solução fica no intervalo 3,99 < y < 4,01 no instante t = 2.</p>

29. Resolva a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay + b}{cy + d}.$$

onde a, b, c e d são constantes.

Equações Homogêneas. Se a função f na equação dy/dx = f(x, y) puder ser expressa como uma função só de y/x, então a equação é dita homogênea¹. Tais equações sempre podem ser transformadas em equações separáveis por uma mudança da variável dependente. O Problema 30 ilustra como resolver equações homogêneas de primeira ordem.

30. Considere a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 4x}{x - y}. ag{i}$$

(a) Mostre que a Eq. (i) pode ser colocada na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y/x) - 4}{1 - (y/x)};$$
(ii)

logo, a Eq. (i) é homogênea.

(b) Introduza uma nova variável dependente v de modo que v = y/x, ou y = xv(x). Expresse dy/dx em função de x, v e dv/dx.

¹A palavra "homogênea" tem significados diferentes em contextos matemáticos distintos. As equações homogêneas consideradas aqui não têm nada a ver com as equações homogêneas que aparecerão no Capítulo 3 e em outros lugares.

(c) Substitua y e dy/dx na Eq. (ii) pelas expressões no item (b) envolvendo v e dv/dx. Mostre que a equação diferencial resultante é

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{v - 4}{1 - v},$$

ou

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 4}{1 - v}.\tag{iii}$$

Note que a Eq. (iii) é separável.

- (d) Resolva a Eq. (iii) obtendo v implicitamente como função de x.
- (e) Encontre a solução da Eq. (i) substituindo v por y/x na solução encontrada no item (d).
- (f) Desenhe um campo de direções e algumas curvas integrais para a Eq. (i). Lembre-se de que a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (i) depende, de fato, apenas da razão y/x. Isso significa que as curvas integrais têm a mesma inclinação em todos os pontos pertencentes a uma mesma reta contendo a origem, embora essa inclinação varie de uma reta para outra. Portanto, o campo de direções e as curvas integrais são simétricos em relação à origem. Essa propriedade de simetria é evidente em seus gráficos?

O método esboçado no Problema 30 pode ser usado em qualquer equação homogênea. Isto é, a substituição y = xv(x) transforma uma equação homogênea em uma equação separável. Essa última equação pode ser resolvida por integração direta e depois a substituição de v por y/x fornece a solução da equação original. Em cada um dos Problemas de 31 a 38:

- (a) Mostre que a equação dada é homogênea.
- (b) Resolva a equação diferencial.
- (c) Desenhe um campo de direções e algumas curvas integrais. Elas são simétricas em relação à origem?

$$31. \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$$

$$32. \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}$$

$$33. \ \frac{dy}{dx} = \frac{4y - 3x}{2x - y}$$

$$34. \frac{dy}{dx} = -\frac{4x + 3y}{2x + y}$$

$$35. \ \frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{x-y}$$

36.
$$(x^2 + 3xy + y^2) dx - x^2 dy = 0$$

37.
$$\frac{dy}{dx} + \frac{x^2 - 3y^2}{2xy}$$

38.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$$

2.3 Modelagem com Equações de Primeira Ordem

Equações diferenciais são de interesse para não matemáticos, principalmente por causa da possibilidade de serem usadas para investigar uma variedade de problemas nas ciências físicas, biológicas e sociais. Uma razão para isso é que modelos matemáticos e suas soluções levam a equações que relacionam as variáveis e os parâmetros no problema. Essas equações permitem, muitas vezes, fazer previsões sobre como os processos naturais se comportarão em diversas circunstâncias. Muitas vezes é fácil permitir a variação dos parâmetros no modelo matemático em um amplo intervalo, enquanto isso poderia levar muito tempo ou ser muito caro, se não impossível, em um ambiente experimental. De qualquer modo, a modelagem matemática e a experimentação ou observação são criticamente importantes e têm papéis um tanto complementares nas investigações científicas. Modelos matemáticos são validados comparando-se suas previsões com resultados experimentais. Por outro lado, análises matemáticas podem sugerir as direções mais promissoras para exploração experimental e podem indicar, com boa precisão, que dados experimentais serão mais úteis.

Nas Seções 1.1 e 1.2 formulamos e investigamos alguns modelos matemáticos simples. Vamos começar recordando e expandindo algumas das conclusões a que chegamos naquelas seções. Independente do campo específico de aplicação, existem três passos identificáveis que estão sempre presentes na modelagem matemática.

Construção do Modelo. Neste estágio você traduz a situação física em expressões matemáticas, muitas vezes usando os passos listados no final da Seção 1.1. Talvez o ponto mais crítico neste estágio seja enunciar claramente o(s) princípio(s) físico(s) que, acredita-se, governam o processo. Por exemplo, foi observado em algumas circunstâncias que o calor passa de um corpo mais quente para um mais frio a uma taxa proporcional à diferença de temperaturas, que objetos se movem de acordo com a lei do movimento de Newton e que populações isoladas de insetos crescem a uma taxa proporcional à população atual. Cada uma dessas afirmações envolve uma taxa de variação (derivada) e, em consequência, quando expressas matematicamente levam a uma equação diferencial. A equação diferencial é um modelo matemático do processo.

É importante compreender que as equações matemáticas são, quase sempre, apenas uma descrição aproximada do processo real. Por exemplo, corpos movimentando-se a velocidades próximas à velocidade da luz não são governados pelas leis de Newton, as populações de insetos não crescem indefinidamente como enunciado devido a limitações de comida ou de espaço, e a transferência de calor é afetada por outros fatores além da diferença de temperatura. Assim, você deve estar sempre atento às limitações do modelo, de modo a só usá-lo quando for razoável acreditar em sua precisão. De maneira alternativa, você poderia adotar o ponto de vista de que as equações matemáticas descrevem exatamente as operações de um modelo físico simplificado ou ideal, que foi construído (ou imaginado) de maneira a incorporar as características mais importantes do processo real. Algumas vezes o processo de modelagem matemática envolve a substituição conceitual de um processo discreto por um contínuo. Por exemplo, o número de elementos em uma população de insetos varia em quantidades discretas; no entanto, se a população for muito grande, pode parecer razoável considerá-la como uma variável contínua e até falar de sua derivada.

Análise do Modelo. Uma vez formulado matematicamente o problema, você encontra, muitas vezes, o problema de resolver equações diferenciais ou, se não for possível, descobrir tudo que for possível sobre as propriedades da solução. Pode acontecer que o problema matemático seja muito difícil e, nesse caso, podem ser necessárias outras aproximações neste estágio que tornem o problema tratável matematicamente. Por exemplo, uma equação não linear pode ser aproximada por uma linear, ou um coeficiente que varia vagarosamente pode ser substituído por uma constante. É claro que tais aproximações também têm que ser examinadas sob o ponto de vista físico, para se ter certeza de que o problema matemático simplificado ainda reflete as características essenciais do processo físico que está sendo investigado. Ao mesmo tempo, um conhecimento profundo da física do problema pode sugerir aproximações matemáticas razoáveis que tornarão o problema matemático mais suscetível a análises. Esse jogo entre a compreensão do fenômeno físico e o conhecimento das técnicas matemáticas e de suas limitações é característico da matemática aplicada em sua melhor forma e é indispensável na construção de modelos matemáticos úteis e de sucesso para processos físicos complicados.

Comparação com Experimentos ou Observações. Finalmente, tendo obtido a solução (ou, pelo menos, alguma informação sobre ela) você precisa interpretar essa informação no contexto do problema. Em particular, você sempre deve verificar se a solução matemática parece ser fisicamente razoável. Se possível, calcule os valores da solução em pontos selecionados e compare-os com valores observados experimentalmente. Ou pergunte se o comportamento da solução depois de um longo período de tempo é consistente com as observações. Ou examine as soluções correspondentes a determinados valores particulares dos parâmetros do problema. É claro que o fato de que a solução matemática parece ser razoável não garante que está correta. No entanto, se as previsões do modelo matemático estão seriamente inconsistentes com as observações do sistema físico que o modelo supostamente deve descrever, isso sugere que foram cometidos erros na resolução do problema matemático, que o modelo matemático propriamente dito precisa ser refinado ou que as observações devem ser feitas com mais cuidado.

Os exemplos nesta seção são típicos de aplicações nas quais aparecem equações diferenciais de primeira ordem.

1 Mistura

No instante t = 0 um tanque contém Q_0 libras de sal dissolvidos em 100 galões de água; veja a Figura 2.3.1. Suponha que está entrando no tanque, a uma taxa de r galões por minuto, água contendo ¼ de libra de sal por galão † e que a mistura bem mexida está saindo do tanque à mesma taxa. Escreva o problema de valor inicial que descreve esse fluxo. Encontre a quantidade de sal Q(t) no tanque em qualquer instante t e encontre, tam-

[†] Uma libra é da ordem de 435,5 gramas e um galão americano corresponde a 3,785 litros, de modo que essa taxa corresponde a aproximadamente 0,3 g/L. (N.T.)

bém, a quantidade limite Q_L presente após um período de tempo bem longo. Se r=3 e $Q_0=2Q_L$, encontre o instante T após o qual o nível de sal está a 2% de Q_L . Encontre, também, a taxa de fluxo necessária para que o valor de T não seja maior do que 45 minutos.



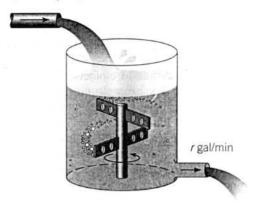


FIGURA 2.3.1 O tanque de água do Exemplo 1.

Vamos supor que o sal não é criado nem destruído no tanque. Portanto, as variações na quantidade de sal são devidas somente aos fluxos de entrada e de saída do tanque. Mais precisamente, a taxa de variação de sal no tanque, dQ/dt, é igual à taxa segundo a qual o sal está entrando menos a taxa segundo a qual ele está saindo. Em símbolos,

$$\frac{dQ}{dt} = \tan \theta - \tan \theta - \sin \theta. \tag{1}$$

A taxa de entrada de sal no tanque é a concentração $\frac{1}{4}$ lb/gal (libra por galão) vezes a taxa de fluxo r gal/min (galões por minuto), ou (r/4) lb/min. Para encontrar a taxa segundo a qual o sal deixa o tanque precisamos multiplicar a concentração de sal no tanque pela taxa de fluxo, r gal/min. Como as taxas de fluxo de saída e de entrada são iguais, o volume de água no tanque permanece constante e igual a 100 gal: como a mistura está "bem mexida", a concentração é uniforme no tanque, a saber, [Q(t)/100] lb/gal. Portanto, a taxa de saída do sal no tanque é [rQ(t)/100] lb/min. Logo, a equação diferencial que governa esse processo é

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{r}{4} - \frac{rQ}{100}. (2)$$

A condição inicial é

$$Q(0) = Q_0.$$
 (3)

Pensando no problema fisicamente, poderíamos antecipar que em alguma hora a mistura original será essencialmente substituída pela mistura que está entrando, cuja concentração é $\frac{1}{4}$ lb/gal. Em consequência, poderíamos esperar que a quantidade de sal no tanque finalmente devesse ficar bem próxima de 25 lb. Também podemos encontrar a quantidade limite $Q_L = 25$ fazendo dQ/dt igual a zero na Eq. (2) e resolvendo a equação algébrica resultante para Q.

Para resolver o problema de valor inicial (2), (3) analiticamente, note que a Eq. (2) é tanto linear quanto separável. Colocando-a na forma-padrão para uma equação linear, temos

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}.\tag{4}$$

Assim, o fator integrante é er/100 e a solução geral é

$$Q(t) = 25 + ce^{-rt/100}, (5)$$

onde c é uma constante arbitrária. Para satisfazer a condição inicial (3) precisamos escolher $c = Q_0 - 25$. Portanto, a solução do problema de valor inicial (2), (3) é

$$Q(t) = 25 + (Q_0 - 25)e^{-rt/100}, (6)$$

ou

stoled was to

$$Q(t) = 25(1 - e^{-rt/100}) + Q_0 e^{-rt/100}. (7)$$

Da Eq. (6) ou da (7) você pode ver que $Q(t) \to 25$ (lb) quando $t \to \infty$, de modo que o valor limite Q_L é 25, confirmando nossa intuição física. Além disso, Q(t) se aproxima desse limite mais rapidamente quando r aumenta. Ao interpretar a solução (7), note que a segunda parcela à direita do sinal de igualdade é a porção do sal original que permanece no tanque no instante t, enquanto a primeira parcela fornece a quantidade de sal no tanque devida à ação dos fluxos. Gráficos das soluções para r=3 e diversos valores de Q_0 estão ilustrados na Figura 2.3.2.

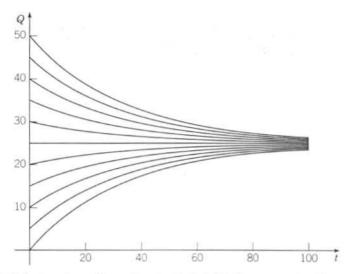


FIGURA 2.3.2 Soluções do problema de valor inicial (2), (3) para r = 3 e diversos valores de Q_0 .

Suponha agora que r = 3 e $Q_0 = 2Q_L = 50$; então a Eq. (6) fica

$$Q(t) = 25 + 25e^{-0.05t}$$
 (8)

Como 2% de 25 é 0,5, queremos encontrar o instante T no qual Q(t) tem o valor 25,5. Fazendo t = T e Q = 25,5 na Eq. (8) e resolvendo para T, obtemos

$$T = (\ln 50)/0.03 \approx 130.4 \text{ (min)}.$$
 (9)

Para determinar r de modo que T = 45, vamos voltar à Eq. (6), fazer t = 45, $Q_0 = 50$, Q(t) = 25, 5 e resolver para r. O resultado é

$$r = (100/45) \ln 50 \approx 8,69 \text{ gal/min.}$$
 (10)

Como esse exemplo é hipotético, a validade do modelo não está em discussão. Se as taxas de fluxo são como enunciadas e se a concentração de sal no tanque é uniforme, então a equação diferencial (1) é uma descrição precisa do processo de fluxo. Embora esse exemplo particular não tenha significado especial, modelos desse tipo são usados muitas vezes em problemas envolvendo poluentes em um lago ou um remédio em um órgão do corpo, por exemplo, em vez de um tanque com água salgada. Nesses casos, as taxas de fluxo podem não ser fáceis de determinar ou podem variar com o tempo. De maneira semelhante, a concentração pode estar longe de ser uniforme em alguns casos. Finalmente, as taxas de fluxo de entrada e de saída podem ser diferentes, o que significa que a variação de líquido no problema também tem que ser levada em consideração.

EXEMPLO

2

Juros Compostos Suponha que é depositada uma quantia em dinheiro em um banco que paga juros a uma taxa anual r. O valor S(t) do investimento em qualquer instante t depende tanto da frequência de capitalização dos juros quanto da taxa de juros. As instituições financeiras têm políticas variadas em relação à capitalização: em algumas a capitalização é mensal, em outras é semanal e algumas até capitalizam diariamente. Se supusermos que a capitalização é feita *continuamente*, podemos montar um problema de valor inicial simples que descreve o crescimento do investimento.

A taxa de variação do valor do investimento é dS/dt, e essa quantidade é igual à taxa segundo a qual os juros acumulam, que é a taxa de juros r vezes o valor atual do investimento S(t). Então,

$$dS/dt = rS (11)$$

é a equação diferencial que governa o processo. Suponha que sabemos também o valor do investimento em algum instante particular, digamos

$$S(0) = S_0.$$
 (12)

Então a solução do problema de valor inicial (11), (12) fornece o saldo total S(t) na conta em qualquer instante t. Esse problema de valor inicial pode ser resolvido facilmente, já que a equação diferencial (11) é linear e separável. Logo, resolvendo as Eqs. (11) e (12), encontramos

$$S(t) = S_0 e^{rt}. (13)$$

Portanto, uma conta bancária com juros capitalizados continuamente cresce exponencialmente.

Vamos agora comparar os resultados desse modelo contínuo com a situação em que a capitalização acontece em intervalos finitos de tempo. Se os juros são capitalizados uma vez por ano, depois de t anos

$$S(t) = S_0(1+r)^t$$
.

Se os juros são capitalizados duas vezes por ano, ao final de seis meses o valor do investimento é $S_0[1+(r/2)]$, e ao final do primeiro ano é $S_0[1+(r/2)]^2$. Então, depois de t anos temos

$$S(t) = S_0 \left(1 + \frac{r}{2} \right)^{2t}.$$

Em geral, se os juros são capitalizados m vezes por ano, então

$$S(t) = S_0 \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{mt}. \tag{14}$$

A relação entre as fórmulas (13) e (14) fica mais clara se lembrarmos do cálculo que

$$\lim_{m \to \infty} S_0 \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{mt} = S_0 e^{rt}.$$

O mesmo modelo também pode ser aplicado a investimentos mais gerais, onde podem ser acumulados dividendos e ganhos de capital, além dos juros. Em reconhecimento desse fato, vamos nos referir a r como sendo a taxa de retorno.

A Tabela 2.3.1 mostra o efeito da mudança na frequência da capitalização para uma taxa de retorno r de 8%. As segunda e terceira colunas foram calculadas da Eq. (14) para capitalização trimestral e diária, respectivamente, enquanto a quarta coluna foi calculada da Eq. (13) para capitalização contínua. Os resultados mostram que a frequência de capitalização não é tão importante na maioria dos casos. Por exemplo, durante um período de 10 anos a diferença entre capitalização trimestral e diária é de R\$17,50 por R\$1.000,00 investidos, ou menos de R\$2,00 por ano. A diferença seria um pouco maior para taxas de retorno maiores e menor para taxas menores. Da primeira linha na tabela, vemos que para uma taxa de retorno de 8% o rendimento anual com capitalização trimestral é de 8,24%, e com capitalização diária ou contínua é de 8,33%.

TABELA 2.3.1 Crescimento de Capital para uma Taxa de Retorno *r* = 8% para Diversos Tipos de Capitalização

Anos	$S(t)/S(t_0)$ da Eq. (14)		$S(t)/S(t_0)$
	m = 4	m = 365	da Eq. (13)
1	1,0824	1,0833	1,0833
2	1,1717	1,1735	1,1735
5	1,4859	1,4918	1,4918
10	2,2080	2,2253	2,2255
20	4,8754	4,9522	4,9530
30	10,7652	11,0203	11,0232
40	23,7699	24,5239	24,5325

Retornando ao caso de capitalização contínua, vamos supor que podem existir depósitos ou retiradas, além do acúmulo de juros, dividendos ou ganhos de capital. Se supusermos que os depósitos ou retiradas ocorrem a uma taxa constante k, então a Eq. (11) é substituída por

$$dS/dt = rS + k$$
.

ou, em forma-padrão,

$$dS/dt - rS = k, (15)$$

onde k é positivo para depósitos e negativo para retiradas.

A Eq. (15) é linear com fator integrante e^{-n} , de modo que sua solução geral é

$$S(t) = ce^{rt} - (k/r).$$

onde c é uma constante arbitrária. Para satisfazer a condição inicial (12), precisamos escolher $c = S_0 + (k/r)$. Logo, a solução do problema de valor inicial (15), (12) é

$$S(t) = S_0 e^n + (k/r)(e^n - 1).$$
(16)

A primeira parcela na expressão (16) é a parte devida à acumulação de retornos na quantidade inicial S_0 , e a segunda parcela é a parte referente a depósitos ou retiradas a uma taxa k.

A vantagem de enunciar o problema desse modo geral, sem valores específicos para S_0 , r ou k, é a generalidade da fórmula resultante (16) para S(t). Com essa fórmula, podemos imediatamente comparar resultados de diferentes programas de investimento ou taxas de retorno diferentes.

Por exemplo, suponha que alguém abre uma conta para um plano de previdência privada (PPP) aos 25 anos com investimentos anuais de R\$2.000,00 continuamente. Supondo uma taxa de retorno de 8%, qual será o saldo no PPP aos 65 anos? Temos $S_0 = 0$, r = 0,08, k = R\$2.000,00 e queremos determinar S(40). Da Eq. (16), temos

$$S(40) = (25.000)(e^{3.2} - 1) = R$588.313.00.$$
 (17)

É interessante notar que a quantidade total investida é R\$80.000,00, de modo que a quantia restante de R\$508.313,00 resulta do retorno acumulado do investimento. O saldo depois de 40 anos também é bastante sensível à taxa. Por exemplo, S(40) = R\$508.948,00 se r = 0,075 e S(40) = R\$681.508,00 se r = 0,085.

Vamos examinar as hipóteses que foram usadas no modelo. Primeiro, supusemos que o retorno é capitalizado continuamente e que o capital adicional é investido continuamente. Nenhuma dessas hipóteses é verdadeira em uma situação financeira real. Também supusemos que a taxa de retorno r é constante por todo o período envolvido, quando, de fato, ela provavelmente flutuará bastante. Embora não possamos prever taxas futuras com confiança, podemos usar a expressão (16) para determinar o efeito aproximado de projeções de taxas diferentes. Também é possível considerar r e k na Eq. (15) como funções de t, em vez de constantes; nesse caso, é claro que a solução pode ser muito mais complicada do que a Eq. (16).

O problema de valor inicial (15), (12) e a solução (16) também podem ser usados para analisar diversas outras situações financeiras, incluindo financiamentos para a casa própria, hipotecas e financiamentos para a compra de carros.

EXEMPLO

Produtos Químicos em uma Lagoa Considere uma lagoa que contém, inicialmente, 10 milhões de galões de água fresca. A água de um rio contendo um produto químico indesejável flui para a lagoa a uma taxa de 5 milhões de galões por ano, e a mistura sai da lagoa através de um canal à mesma taxa. A concentração $\gamma(t)$ do produto químico na água que entra varia periodicamente com o tempo t de acordo com a expressão $\gamma(t) = 2 + \sec(2t)$ g/gal (gramas por galão). Construa um modelo matemático desse fluxo e determine a quantidade de produto químico na lagoa em qualquer instante. Desenhe o gráfico da solução e descreva em palavras o efeito da variação na concentração da água que entra na lagoa.

Como os fluxos de entrada e de saída de água são iguais, a quantidade de água na lagoa permanece constante, com 10^7 galões. Vamos denotar o tempo por t, medido em anos, e a massa do produto químico por Q(t), medida em gramas. Este exemplo é semelhante ao Exemplo 1, e o mesmo princípio de entrada/saída pode ser aplicado. Assim,

$$\frac{dQ}{dt} = \tan \theta = \arctan - \tan \theta = \sin \theta,$$

onde "taxa de entrada" e "taxa de saída" referem-se às taxas segundo as quais o produto químico flui para dentro e para fora da lagoa, respectivamente. A taxa segundo a qual o produto químico entra na lagoa é dada por

taxa de entrada =
$$(5 \times 10^6)$$
 gal/ano $(2 + \text{sen } 2t)$ g/gal. (18)

A concentração de produto químico na lagoa é de $Q(t)/10^7$ g/gal, de modo que a taxa de saída é

taxa de saída =
$$(5 \times 10^6)$$
 gal/ano $[Q(t)/10^7]$ g/gal = $Q(t)/2$ g/ano. (19)

Obtemos, então, a equação diferencial

$$\frac{dQ}{dt} = (5 \times 10^6)(2 + \sin 2t) - \frac{Q(t)}{2},\tag{20}$$

onde cada termo tem unidades de g/ano.

Para tornar os coeficientes mais facilmente administráveis, é conveniente introduzir uma nova variável dependente definida por $q(t) = Q(t)/10^{6}$ ou $Q(t) = 10^{6}q(t)$. Isso significa que q(t) é medida em milhões de grama, ou megagramas (toneladas). Se fizermos essa substituição na Eq. (20), então cada termo contém o fator 10^{6} , que pode ser cancelado. Se também transpusermos o termo envolvendo q(t) para o lado esquerdo do sinal de

igualdade, temos, finalmente,

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{2}q = 10 + 5 \sec 2t. \tag{21}$$

Originalmente não havia produto químico na lagoa, de modo que a condição inicial é

$$q(0) = 0.$$
 (22)

A Eq. (21) é linear e, embora a expressão à direita do sinal de igualdade seja uma função de t, o coeficiente de q é constante. Logo, o fator integrante é $e^{t/2}$. Multiplicando a Eq. (21) por esse fator e integrando a equação resultante, obtemos a solução geral

$$q(t) = 20 - \frac{40}{17}\cos 2t + \frac{10}{17}\sin 2t + ce^{-t/2}.$$
 (23)

A condição inicial (22) obriga c = -300/17, de modo que a solução do problema de valor inicial (21). (22) é

$$q(t) = 20 - \frac{40}{17}\cos 2t + \frac{10}{17}\sin 2t - \frac{300}{17}e^{-t/2}.$$
 (24)

A Figura 2.3.3 mostra um gráfico da solução (24), junto com a reta q = 20. O termo exponencial na solução é importante para valores pequenos de t, mas diminui rapidamente quando t aumenta. Mais tarde, a solução vai consistir em uma oscilação, devido aos termos sen(2t) e cos(2t), em torno do nível constante q = 20. Note que se o termo sen(2t) não estivesse presente na Eq. (21), então q = 20 seria a solução de equilíbrio daquela equação.

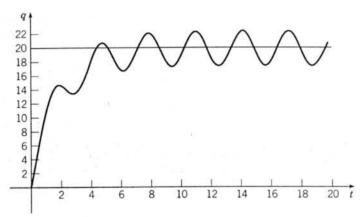


FIGURA 2.3.3 Solução do problema de valor inicial (21), (22).

Vamos considerar, agora, o quão adequado é o modelo matemático para esse problema. O modelo baseiase em diversas hipóteses que ainda não foram enunciadas explicitamente. Em primeiro lugar, a quantidade de
água na lagoa é inteiramente controlada pelas taxas de entrada e saída—nada se perde por evaporação ou por
absorção pelo solo, e nada se ganha com a chuva. O mesmo é verdade do produto químico; ele entra e sai da
lagoa, mas nada é absorvido por peixes ou outros organismos que vivem na lagoa. Além disso, supusemos que
a concentração do produto químico é uniforme em toda a lagoa. Se os resultados obtidos com esse modelo são
precisos ou não vai depender fortemente da validade dessas hipóteses simplificadoras.

EXEMPLO

4

Velocidade de Escape Um corpo de massa constante m é projetado da Terra em uma direção perpendicular à superfície da Terra com uma velocidade inicial v_0 . Supondo que não há resistência do ar, mas levando em consideração a variação do campo gravitacional da terra com a distância, encontre uma expressão para a velocidade durante o movimento resultante. Encontre, também, a velocidade inicial necessária para levantar o corpo até uma altitude máxima ξ acima da superfície da Terra e encontre a menor velocidade inicial para a qual o corpo não retornará à superfície; esta última é a **velocidade de escape**.

Coloque o semieixo positivo dos x apontando para fora do centro da Terra ao longo da linha de movimento, com x=0 correspondendo à superfície da Terra; veja a Figura 2.3.4. A figura está desenhada horizontalmente para lembrar você de que a gravidade está direcionada para o centro da terra, que não é necessariamente para baixo se olhado de uma perspectiva de longe da superfície da Terra. A força gravitacional agindo no corpo (isto é, seu peso) é inversamente proporcional ao quadrado da distância do centro da Terra e é dada por $w(x) = -k/(x+R)^2$, onde k é uma constante, k é o raio da Terra e o sinal de menos significa que w(x) está orientada no sentido negativo do eixo dos k. Sabemos que na superfície da Terra k0) é dada por k0 e a aceleração devida à gravidade no nível do mar. Portanto k0 e k0 e k0 e k1 e k2 e k3 gravidade no nível do mar. Portanto k3 e k4 e k5 e k6 e k6 e k6 e k9 e

$$w(x) = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2}. (25)$$

FIGURA 2.3.4 Um corpo no campo gravitacional da Terra.

Como não há outras forças agindo sobre o corpo, a equação de movimento é

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2}\,, (25)$$

e a condição inicial é

$$v(0) = v_0.$$
 (27)

Infelizmente, a Eq. (26) envolve variáveis demais, já que depende de t, x e v. Para consertar essa situação vamos eliminar t da Eq. (26) pensando em x, em vez de t, como a variável independente. Então, podemos expressar dv/dt em função de dv/dx pela regra da cadeia; portanto,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx},$$

e a Eq. (26) é substituída por

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{(R+x)^2} \,. \tag{28}$$

A Eq. (28) é separável, mas não linear, de modo que, separando as variáveis e integrando, obtemos

$$\frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{R+x} + c. {(29)}$$

Como x = 0 quando t = 0, a condição inicial (27) em t = 0 pode ser substituída pela condição $v = v_0$ quando x = 0. Logo $c = (v_0^2/2) - gR$ e

$$v = \pm \sqrt{v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{R + x}}.$$
 (30)

Note que a Eq. (30) fornece a velocidade como função da altitude, em vez do tempo. Deve-se escolher o sinal de mais se o corpo está subindo e o sinal de menos se está caindo.

Para determinar a altitude máxima ξ que o corpo alcança, fazemos v = 0 e $x = \xi$ na Eq. (30), e depois resolvemos para ξ , obtendo

$$\xi = \frac{v_0^2 R}{2gR - v_0^2} \,. \tag{31}$$

Resolvendo a Eq. (31) para v_0 , encontramos a velocidade inicial necessária para levantar o corpo até a altitude ξ , a saber,

$$v_0 = \sqrt{2gR \frac{\xi}{R + \xi}} . \tag{32}$$

A velocidade de escape v_e é encontrada, então, fazendo $\xi \to \infty$. Logo,

$$v_e = \sqrt{2gR}. (33)$$

O valor numérico de v, é aproximadamente 6,9 mi/s (milhas por segundo), ou 11,1 km/s.

O cálculo precedente da velocidade de escape não leva em consideração o efeito da resistência do ar, de modo que a velocidade de escape real (incluindo o efeito da resistência do ar) é um pouco maior. Por outro lado, a velocidade de escape efetiva pode ser significativamente reduzida se o corpo for transportado a uma altura considerável acima do nível do mar antes de ser lançado. Ambas as forças, gravitacional e de atrito, são reduzidas; a resistência do ar, em particular, diminui muito rapidamente com o aumento da altitude. Você deve ter em mente, também, que pode muito bem ser impraticável dar uma velocidade inicial instantaneamente muito grande; veículos espaciais, por exemplo, recebem sua aceleração inicial durante alguns minutos.

PROBLEMAS

- 1. Considere um tanque usado em determinados experimentos em hidrodinâmica. Depois de um experimento, o tanque contém 200 litros de uma solução de tinta com uma concentração de 1 grama por litro. Para preparar o tanque para o próximo experimento, ele é lavado com água fresca fluindo a uma taxa de 2 litros por minuto, e a solução bem misturada flui para fora à mesma taxa. Encontre o tempo gasto até a concentração de tinta no tanque atingir 1% de seu valor original.
- 2. Um tanque contém inicialmente 120 litros de água pura. Uma mistura contendo uma concentração de γ gramas por litro de sal entra no tanque a uma taxa de 2 litros por minuto, e a mistura bem mexida sai do tanque à mesma taxa. Encontre uma expressão para a quantidade de sal no tanque em qualquer instante t em termos de γ. Encontre, também, a quantidade limite de sal no tanque quando t → ∞.
- 3. Um tanque contém inicialmente 100 galões de água fresca. Joga-se, então, água contendo ½ libra de sal por galão a uma taxa de 2 galões por minuto e permite-se que a mistura saia do tanque à mesma taxa. Após 10 minutos, para-se o processo e joga-se água fresca no tanque a uma taxa de 2 galões por minuto, com a mistura deixando o tanque, novamente, à mesma taxa. Encontre a quantidade de sal no tanque ao final de 10 minutos adicionais.
- 4. Um tanque, com capacidade de 500 galões, contém originalmente 200 galões de água com uma solução de 100 libras de sal. Está entrando no tanque, a uma taxa de 3 galões por minuto, água contendo 1 libra de sal por galão, e permite-se que a mistura saia do tanque a uma taxa de 2 galões por minuto. Encontre a quantidade de sal no tanque em qualquer instante antes do momento em que a solução começa a transbordar. Encontre a concentração de sal (em libras por galão) no tanque no instante em que vai começar a transbordar. Compare essa concentração com a concentração-limite teórica se o tanque tivesse capacidade infinita.



- 5. Um tanque contém 100 galões de água e 50 onças de sal. Água contendo uma concentração de sal de (1/4) [1 + (1/2)sent] onças por galão entra no tanque a uma taxa de 2 galões por minuto, e a mistura sai do tanque à mesma taxa.
 - (a) Encontre a quantidade de sal no tanque em qualquer instante.
 - (b) Desenhe o gráfico da solução por um período de tempo longo o suficiente para que você veja o comportamento final do gráfico.
 - (c) O comportamento da solução para períodos longos de tempo é uma oscilação em torno de um nível constante. Qual é esse nível? E qual é a amplitude da oscilação?
- 6. Suponha que um tanque contendo um determinado líquido tem uma saída perto do fundo. Seja h(t) a altura da superfície do líquido acima da saída no instante t. O princípio de Torricelli² diz que a velocidade v do fluxo na saída é igual à velocidade de uma partícula em queda livre (sem atrito) caindo da altura h.
 - (a) Mostre que $v = \sqrt{2gh}$, onde g é a aceleração da gravidade.
 - (b) Igualando a taxa de saída à taxa de variação de líquido no tanque, mostre que h(t) satisfaz a equação

$$A(h)\frac{dh}{dt} = -\alpha a\sqrt{2gh},\tag{i}$$

onde A(h) é a área da seção reta do tanque na altura h e a é a área da saída. A constante α é um coeficiente de contração responsável pelo fato observado de que a seção reta do fluxo (suave) de saída é menor do que a. O valor de α para a água é cerca de 0,6.

- (c) Considere um tanque de água em forma de um cilindro circular reto 3 m (metros) acima da saída. O raio do tanque é 1 m e o raio da saída circular é 0,1 m. Se o tanque está inicialmente cheio de água, determine quanto tempo vai levar para esvaziar o tanque até o nível da saída.
- 7. Suponha que determinada quantia S_0 está investida a uma taxa anual de retorno r capitalizada continuamente.
 - (a) Encontre o tempo T necessário para a soma original dobrar de valor em função de r.
 - (b) Determine T se r = 7%.
 - (c) Encontre a taxa de retorno que precisa ser alcançada se o investimento inicial deve dobrar em 8 anos.
- Uma pessoa jovem, sem capital inicial, investe k reais por ano a uma taxa anual de retorno r. Suponha que os investimentos são feitos continuamente e que o retorno é capitalizado continuamente.
 - (a) Determine a quantia S(t) acumulada em qualquer instante t.

^{&#}x27;Uma onça tem aproximadamente 28 gramas, de modo que 50 onças têm aproximadamente 1417g. (N.T.)

²Evangelista Torricelli (1608-1647), sucessor de Galileu como matemático da corte em Florença, publicou esse resultado em 1644. Ele também é conhecido por ter construído o primeiro barômetro de mercúrio e por contribuições importantes em geometria.

- (b) Se r = 7,5%, determine k de modo que 1 milhão de reais esteja disponível para a aposentadoria em 40 anos.
- (c) Se k = R\$ 2.000,00 por ano, determine qual deve ser a taxa de retorno r para se ter 1 milhão de reais em 40 anos.
- 9. Um determinado universitário pede um empréstimo de R\$8.000,00 para comprar um carro. A financeira cobra juros de 10% ao ano. Supondo que os juros são capitalizados continuamente e que os pagamentos são feitos continuamente a uma taxa anual constante k, determine a taxa de pagamento necessária para quitar o empréstimo em 3 anos. Determine, também, quanto é pago de juros durante esses 3 anos.
- 10. O comprador de uma casa não pode gastar mais de R\$ 800,00 por mês pelo seu financiamento. Suponha que a taxa de juros é de 9% ao ano e que o financiamento é em 20 anos. Suponha que os juros são capitalizados continuamente e que os pagamentos também são feitos continuamente.
 - (a) Determine a quantia máxima que esse comprador pode financiar.
 - (b) Determine os juros totais pagos durante o financiamento.
- 11. Um recém-formado pegou emprestados R\$ 100.000,00 a uma taxa de juros de 9% ao ano para comprar um apartamento. Prevendo constantes aumentos de salário, ele espera pagar a uma taxa mensal de 800(1 + t/120), onde t é o número de meses desde o início do empréstimo.
 - (a) Supondo que o programa de pagamento pode ser mantido, quando o empréstimo estará quitado?
 - (b) Supondo o mesmo programa de pagamento, qual deve ser a quantia emprestada para que seja paga em exatamente 20 anos?
 - 12. Uma ferramenta importante em pesquisa arqueológica é a datação por carbono radioativo, desenvolvida pelo químico americano Willard F. Libby¹. Esse é um meio para determinar a idade de determinados resíduos de madeira e plantas, portanto de ossos de animais ou homens, ou artefatos encontrados enterrados nos mesmos níveis. A datação por carbono radioativo baseia-se no fato de que alguns restos de madeira ou plantas contêm quantidades residuais de carbono-14, um isótopo radioativo do carbono. Esse isótopo se acumula durante a vida da planta e começa a decair na sua morte. Como a meia-vida do carbono-14 é longa (aproximadamente 5730 anos¹), quantidades mensuráveis de carbono-14 permanecem depois de muitos milhares de anos. Se mesmo uma fração mínima da quantidade original de carbono-14 ainda está presente, então, através de medidas apropriadas em laboratório pode-se determinar com precisão a proporção da quantidade original de carbono-14 que permanece. Em outras palavras, se Q(t) é a quantidade de carbono-14 no instante t e Q₀ é a quantidade original, então a razão Q(t)/Q₀ pode ser determinada, pelo menos se essa quantidade não for pequena demais. Técnicas atuais de medida permitem o uso desse método por períodos de tempo de 50.000 anos ou mais.
 - (a) Supondo que Q satisfaz a equação diferencial Q' = -rQ, determine a constante de decaimento r para o carbono-14.
 - (b) Encontre uma expressão para Q(t) em qualquer instante t se $Q(0) = Q_0$.
 - (c) Suponha que determinados restos foram descobertos nos quais a quantidade residual atual de carbono-14 é de 20% da quantidade original. Determine a idade desses restos.
 - 13. A população de mosquitos em determinada área aumenta a uma taxa proporcional à população atual e, na ausência de outros fatores, a população dobra a cada semana. Inicialmente há 200.000 mosquitos na área e predadores (pássaros, morcegos, etc.) comem 20.000 mosquitos por dia. Determine a população de mosquitos na área em qualquer instante t.
- 14. Suponha que determinada população tem uma taxa de crescimento que varia com o tempo e que essa população satisfaz a equação diferencial

$$dv/dt = (0.5 + \text{sen}t)v/5.$$

- (a) Se y(0) = 1, encontre (ou estime) o instante τ no qual a população dobrou. Escolha outras condições iniciais e determine se o tempo de duplicação τ depende da população inicial.
- (b) Suponha que a taxa de crescimento é substituída pelo seu valor médio 1/10. Determine o tempo de duplicação τ neste caso.
- (c) Suponha que o termo sen t na equação diferencial é substituído por sen(2πt); ou seja, a variação na taxa de crescimento tem uma frequência substancialmente mais alta. Que efeito isso tem no tempo de duplicação τ?
- (d) Faça o gráfico das soluções obtidas nos itens (a), (b) e (c) em um único conjunto de eixos.

³Willard F. Libby (1908-1980) nasceu na zona rural do estado de Colorado, nos Estados Unidos, e recebeu sua educação na Universidade da Califórnia em Berkeley. Desenvolveu o método de datação por carbono radioativo a partir de 1947, quando estava na Universidade de Chicago. Recebeu o Prêmio Nobel de química em 1960 por esse trabalho.

*McGraw-Hill Encyclopedia of Science and Technology (8th ed.) (New York: McGraw-Hill, 1997), Vol. 5, p. 48.

15. Suponha que uma determinada população satisfaz o problema de valor inicial

$$dy/dt = r(t)y - k, \qquad y(0) = y_0,$$

onde a taxa de crescimento r(t) é dada por r(t) = (1 + sent)/5 e k representa a taxa predatória.

- (a) Suponha que k = 1/5. Faça gráficos de y em função de t para diversos valores de y_0 entre 1/2 e 1.
- (b) Estime a população inicial crítica y_c abaixo da qual a população será extinta.
- (c) Escolha outros valores de k e encontre a população crítica correspondente y, para cada um deles.
- (d) Use os dados encontrados nos itens (b) e (c) para fazer o gráfico de y, em função de k.
- 16. A lei do resfriamento de Newton diz que a temperatura de um objeto varia a uma razão proporcional à diferença entre sua temperatura e a temperatura ambiente. Suponha que a temperatura de uma xícara de café obedece à lei do resfriamento de Newton. Se o café está a uma temperatura de 200°F† quando colocado na xícara e 1 minuto depois esfriou e está a 190°F em uma sala à temperatura de 70°F, determine quando o café alcança a temperatura de 150°F.
- 17. O calor transferido de um corpo para seu ambiente por radiação, baseado na lei de Stefan-Boltzman⁵, é descrito pela equação diferencial

$$\frac{du}{dt} = -\alpha(u^4 - T^4),\tag{i}$$

onde u(t) é a temperatura absoluta do corpo no instante t, T é a temperatura absoluta do ambiente e α é uma constante que depende dos parâmetros físicos do corpo. No entanto, se u for muito maior do que T, as soluções da Eq. (i) podem ser bem aproximadas por soluções da equação mais simples

$$\frac{du}{dt}=-\alpha u^4. \tag{ii}$$
 Suponha que um corpo, a uma temperatura inicial de 2000 K. está em um meio à temperatura de 300 K e

que $\alpha = 2.0 \times 10^{-12} \,\mathrm{K}^{-3}/s$.

- (a) Determine a temperatura do corpo em um instante qualquer resolvendo a Eq. (ii).
- (b) Faça o gráfico de u em função de t.
- (c) Encontre o instante τ no qual $u(\tau) = 600$, ou seja, o dobro da temperatura ambiente. Até esse instante, o erro ao se usar a Eq. (ii) para aproximar as soluções da Eq. (i) não é maior do que 1%.
- 2). 18. Considere uma caixa isolada termicamente (um prédio, talvez) com temperatura interna u(t). De acordo com a lei do resfriamento de Newton, u satisfaz a equação diferencial

$$\frac{du}{dt} = -k[u - T(t)],\tag{i}$$

onde T(t) é a temperatura do ambiente (externo). Suponha que T(t) varia como uma senoide; por exemplo, suponha que $T(t) = T_0 + T_1 \cos(\omega t)$.

- (a) Resolva a Eq. (i) e expresse u(t) em termos de $t, k, T_0, T_1 \in \omega$. Observe que parte de sua solução tende a zero quando t fica muito grande; essa é chamada de parte transiente. O restante da solução é chamado de estado estacionário; denote-o por S(t).
- (b) Suponha que t está medido em horas e que $\omega = \pi/12$, correspondendo a um período de 24 horas para T(t). Além disso, sejam $T_0 = 60^{\circ}$ F, $T_1 = 15^{\circ}$ F e k = 0.2/h. Desenhe gráficos de S(t) e de T(t) em função de t nos mesmos eixos. A partir de seu gráfico, estime a amplitude R da parte oscilatória de S(t). Estime, também, a diferença de tempo τ entre os máximos correspondentes de T(t) e de S(t).
- (c) Sejam k, T_0 , $T_1 \in \omega$ não especificados. Escreva a parte oscilatória de S(t) na forma $R \cos[\omega(t-\tau)]$. Use identidades trigonométricas para encontrar expressões para $R \in \tau$. Suponha que $T_1 \in \omega$ têm os valores dados no item (b) e desenhe gráficos de R e τ em função de k.
- 19. Considere um lago de volume constante V contendo, no instante t, uma quantidade Q(t) de poluentes distribuídos uniformemente em todo o lago com uma concentração c(t), onde c(t) = Q(t)/V. Suponha que está entrando no lago água contendo uma concentração k de poluentes a uma taxa r e que está saindo água do lago à mesma taxa. Suponha também que são adicionados poluentes diretamente no lago a uma taxa constante P. Note que as hipóteses feitas não consideram uma série de fatores que podem ser importantes em alguns casos—por exemplo, a água que é adicionada ou perdida devido à precipitação, à absorção ou à evaporação; a estratificação em consequência das diferenças de temperatura em um lago profundo; a produção de baías protegidas, por causa de irregularidades na borda; e o fato de que os poluentes não

A fórmula para conversão de Fahrenheit para Celsius é (F – 32)/9 = C/5. Então 200°F é, aproximadamente, 93°C. (N.T.) ⁵Jozef Stefan (1835-1893), professor de física em Viena, enunciou a lei de radiação empiricamente em 1879. Seu aluno Ludwig Boltzman (1844-1906) deduziu-a teoricamente dos princípios da termodinâmica em 1884. Boltzman é mais conhecido por seu trabalho pioneiro em mecânica estatística.

são depositados uniformemente em todo o lago (em geral), mas em pontos isolados em sua periferia. Os resultados a seguir têm que ser interpretados levando em consideração que não foram contemplados esses fatores.

- (a) Se a concentração de poluentes no instante t = 0 é c₀, encontre uma expressão para a concentração c(t) em qualquer instante t. Qual a concentração limite quando t → ∞?
- (b) Se a adição de poluentes no lago termina (k = 0 e P = 0 para t > 0), determine o intervalo de tempo T necessário para que a concentração de poluentes seja reduzida a 50% de seu valor original; e a 10% de seu valor original.
- (c) A Tabela 2.3.2 contém dados⁶ para os Grandes Lagos¹. Usando esses dados, determine a partir do item (b) o tempo T necessário para reduzir a contaminação desses lagos a 10% de seu valor original.

TABELA 2.3.2 Dados sobre Volume e Fluxo dos Grandes Lagos

Lago	$V (\mathrm{km}^3 \times 10^3)$	r (km ³ /ano)
Superior	12,2	65,2
Michigan	4,9	158
Erie	0,46	175
Ontário	1,6	209

- 20. Uma bola com a massa de 0,15 kg é jogada para cima com velocidade inicial de 20 m/s do teto de um prédio com 30 m de altura. Não leve em consideração a resistência do ar.
 - (a) Encontre a altura máxima acima do solo alcançada pela bola.
 - (b) Supondo que a bola não atinge o prédio quando desce, encontre o instante em que ela bate no chão.
 - (c) Desenhe os gráficos da velocidade e da posição em função do tempo.
- 21. Suponha que as condições são como no Problema 20, exceto que existe uma força devido à resistência do ar de |v|/30, onde v é medida em m/s.
 - (a) Encontre a altura máxima acima do solo alcançada pela bola.
 - (b) Encontre o instante em que ela bate no chão.
 - (c) Desenhe os gráficos da velocidade e da posição em função do tempo. Compare esses gráficos com os gráficos correspondentes no Problema 20.
- 22. Suponha que as condições são como no Problema 20, exceto que existe uma força devido à resistência do ar de v²/1325, onde v é medida em m/s.
 - (a) Encontre a altura máxima acima do solo alcançada pela bola.
 - (b) Encontre o instante em que ela bate no chão.
 - (c) Desenhe os gráficos da velocidade e da posição em função do tempo. Compare esses gráficos com os gráficos correspondentes nos Problemas 20 e 21.
- 23. Um paraquedista pesando 180 lb (incluindo o equipamento) cai verticalmente de uma altura de 5000 pés^{††} e abre o paraquedas depois de 10 s de queda livre. Suponha que a força de resistência do ar é de 0,75|v| quando o paraquedas está fechado e de 12|v| quando está aberto, onde a velocidade v está em pés/s.
 - (a) Encontre a velocidade do paraquedista quando o paraquedas abre.
 - (b) Encontre a distância percorrida até o paraquedas abrir.
 - (c) Qual a velocidade limite v_L depois que o paraquedas abre?
 - (d) Determine quanto tempo o paraquedista fica no ar depois que o paraquedas abre.
 - (e) Desenhe o gráfico da velocidade em função do tempo desde o início da queda até o paraquedista atingir o solo.
 - 24. Um trenó-foguete, com velocidade inicial de 150 milhas/h, é freado por um canal de água. Suponha que, enquanto está sendo freado, a aceleração a do trenó é dada por a(v) = -μv², onde v é a velocidade e μ é uma constante.
 - (a) Como no Exemplo 4 do texto, use a relação dv/dt = v(dv/dx) para escrever a equação de movimento em termos de v e de x.

⁶Esse problema baseia-se no artigo "Natural Displacement of Pollution from the Great Lakes", de R. H. Rainey, publicado em Science 155(1967), pp.1242–1243; a informação na tabela foi tirada dessa fonte.

^{&#}x27;Esses lagos ficam na fronteira entre os Estados Unidos e o Canadá. (N.T.)

[&]quot;Um pé é da ordem de 30,5 centímetros, de modo que 5000 pés é aproximadamente 1524 m. (N.T.)

- (b) Se for necessária uma distância de 2000 pés para diminuir a velocidade do trenó para 15 milhas/h, determine o valor de μ.
- (c) Encontre o tempo τ necessário para diminuir a velocidade do trenó para 15 milhas/h.
- 25. Um corpo de massa m é projetado verticalmente para cima com uma velocidade inicial v₀ em um meio que oferece uma resistência k|v|, onde k é constante. Não leve em consideração variações na força gravitacional.
 - (a) Encontre a altura máxima x_m alcançada pelo corpo e o instante t_m no qual essa altura máxima é atingida.
 - (b) Mostre que, se $kv_0/mg < 1$, então t_m e x_m podem ser expressos como

$$t_{m} = \frac{v_{0}}{g} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{k v_{0}}{mg} + \frac{1}{3} \left(\frac{k v_{0}}{mg} \right)^{2} - \cdots \right],$$

$$x_{m} = \frac{v_{0}^{2}}{2g} \left[1 - \frac{2}{3} \frac{k v_{0}}{mg} + \frac{1}{2} \left(\frac{k v_{0}}{mg} \right)^{2} - \cdots \right].$$

- (c) Mostre que a quantidade kvo/mg é adimensional.
- 26. Um corpo de massa m é projetado verticalmente para cima com uma velocidade inicial v₀ em um meio que oferece uma resistência klvl, onde k é constante. Suponha que a atração gravitacional da Terra é constante.
 - (a) Encontre a velocidade v(t) do corpo em qualquer instante t.
 - (b) Use o resultado do item (a) para calcular o limite de v(t) quando $k \to 0$, ou seja, quando a resistência tende a zero. Esse resultado é igual à velocidade de uma massa m projetada para cima com uma velocidade inicial v_0 no vácuo?
 - (c) Use o resultado do item (a) para calcular o limite de v(t) quando m → 0, isso é, quando a massa se aproxima de zero.
- 27. Um corpo caindo em um fluido relativamente denso, óleo, por exemplo, está sob a ação de três forças (veja a Figura 2.3.5): uma força de resistência R, um empuxo B e seu peso w devido à gravidade. O empuxo é igual ao peso do fluido deslocado pelo objeto. Para um corpo esférico de raio a se movimentando lentamente, a força de resistência é dada pela lei de Stokes, R = 6πμa|v|, onde v é a velocidade do corpo e μ é o coeficiente de viscosidade do fluido⁷.

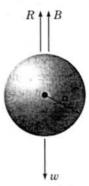


FIGURA 2.3.5 Um corpo caindo em um fluido denso.

- (a) Encontre a velocidade limite de uma esfera sólida de raio a e densidade ρ caindo livremente em um meio de densidade ρ' e coeficiente de viscosidade μ .
- (b) Em 1910, R. A. Millikan⁸ estudou o movimento de gotículas de óleo caindo em um campo elétrico. Um campo de intensidade E exerce uma força Ee em uma gotícula com carga e. Suponha que E foi ajustado de modo que a gotícula é mantida estacionária (v = 0) e que w e B são dados como acima. Encontre uma expressão para e. Millikan repetiu esse experimento muitas vezes e, a partir dos dados coletados, deduziu a carga de um elétron.

⁷George Gabriel Stokes (1819-1903), professor em Cambridge, foi um dos primeiros matemáticos aplicados do século XIX. As equações básicas da mecânica dos fluidos (equações de Navier-Stokes) são nomeadas em parte em sua homenagem, e um dos teoremas fundamentais do cálculo vetorial leva seu nome. Ele também foi um dos pioneiros na utilização de séries divergentes (assintóticas), um assunto de grande interesse e importância hoje em dia.

⁸Robert A. Millikan (1868-1953) estudou na Faculdade de Oberlin e na Universidade de Columbia. Mais tarde foi professor na Universidade de Chicago e no Instituto de Tecnologia da Califórnia. Publicou em 1910 um trabalho contendo a determinação da carga do elétron. Recebeu o Prêmio Nobel em 1923 por esse trabalho e por outros estudos sobre o efeito fotoelétrico.

- 28. Uma massa de 0,25 kg cai a partir do repouso em um meio que oferece uma resistência de 0,21vl, onde v está em m/s.
 - (a) Se a massa cai de uma altura de 30 m, encontre sua velocidade ao atingir o solo.
 - (b) Se a massa não pode atingir uma velocidade maior do que 10 m/s, encontre a altura máxima da qual ela pode ser largada.
 - (c) Suponha que a força de resistência é k|v|, onde v está em m/s e k é constante. Se a massa cai de uma altura de 30 m e tem que atingir o solo com uma velocidade menor ou igual a 10 m/s, determine o coeficiente de resistência k necessário.
 - 29. Suponha que um foguete é lançado verticalmente a partir da superfície da Terra com velocidade inicial $v_0 = \sqrt{2gR}$, onde R é o raio da Terra. Não considere a resistência do ar.
 - (a) Encontre uma expressão para a velocidade v em função da distância x da superfície da Terra.
 - (b) Encontre o tempo necessário para o foguete atingir 240.000 milhas (a distância aproximada da Terra à Lua). Suponha que R = 4000 milhas.
- 30. Sejam v(t) e w(t) as componentes horizontal e vertical, respectivamente, da velocidade de uma bola de beisebol rebatida (ou lançada). Na ausência de resistência do ar, v e w satisfazem as equações

$$dv/dt = 0$$
, $dw/dt = -g$.

(a) Mostre que

$$v = u \cos A$$
, $w = -gt + u \sin A$,

onde u é a velocidade escalar inicial da bola e A é o ângulo inicial de elevação.

- (b) Sejam x(t) e y(t), respectivamente, as coordenadas horizontal e vertical da bola no instante t. Se x(0) = 0 e y(0) = h, encontre x(t) e y(t) em qualquer instante t.
- (c) Sejam g = 32 pés/s², u = 125 pés/s e h = 3 pés. Desenhe a trajetória da bola para diversos valores do ângulo A, ou seja, faça os gráficos de x(t) e y(t) parametricamente.
- (d) Suponha que o muro que delimita o campo está a uma distância L e tem altura H. Encontre uma relação entre u e A que tem que ser satisfeita se a bola passa por cima do muro.
- (e) Suponha que L = 350 pés e H = 10 pés. Usando a relação no item (d), encontre (ou estime a partir de um gráfico) o intervalo de valores de A que correspondem a uma velocidade escalar inicial u = 110 pés/s.
- (f) Para L = 350 e H = 10, encontre a velocidade escalar mínima u e o ângulo ótimo correspondente A para o qual a bola passa por cima do muro.
- 31. Um modelo mais realista (do que o no Problema 30) para a trajetória de uma bola de beisebol inclui o efeito da resistência do ar. Nesse caso as equações de movimento são

$$dv/dt = -rv$$
, $dw/dt = -g - rw$,

onde r é o coeficiente de resistência.

- (a) Determine v(t) e w(t) em termos da velocidade escalar inicial u e do ângulo inicial de elevação A.
- (b) Encontre x(t) e y(t) se x(0) = 0 e y(0) = h.
- (c) Desenhe as trajetórias da bola para r = 1/5, u = 125, h = 3 e para diversos valores de A. Como essas trajetórias diferem das do Problema 31 com r = 0?
- (d) Supondo r = 1/5 e h = 3, encontre a velocidade inicial mínima u e o ângulo ótimo correspondente A para o qual a bola passa por cima de um muro a uma distância de 350 pés com 10 pés de altura. Compare esse resultado com o do Problema 30(f).
- 32. O Problema da Braquistócrona. Um dos problemas famosos na história da matemática é o problema da braquistócronaº: encontrar uma curva ao longo da qual uma partícula desliza sem atrito em um tempo mínimo de um ponto dado P até outro ponto Q, onde o segundo ponto está mais baixo do que o primeiro, mas não diretamente debaixo (veja a Figura 2.3.6). Este problema foi proposto por Johann Bernoulli em 1696 como um desafio para os matemáticos da época. Johann Bernoulli e seu irmão Jakob Bernoulli, Isaac Newton, Gottfried Leibniz e o Marquês de L'Hospital encontraram soluções corretas. O problema da braquistócrona é importante no desenvolvimento da matemática como um dos precursores do cálculo das variações.

Ao resolver este problema, é conveniente colocar a origem no ponto superior P e orientar os eixos conforme ilustrado na Figura 2.3.6. O ponto mais baixo Q tem coordenadas (x_0, y_0) . É possível mostrar, então, que a curva de tempo mínimo é dada por uma função $y = \phi(x)$ que satisfaz a equação diferencial

⁹A palavra "braquistócrona" vem das palavras gregas brachisto, que significa a mais curta, e chronos, que significa tempo.

$$(1 + y'^2)y = k^2$$
, (i)

onde k^2 é uma certa constante positiva a ser determinada mais tarde.

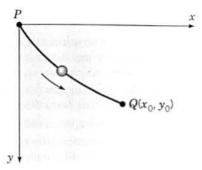


FIGURA 2.3.6 A braquistócrona.

- (a) Resolva a Eq. (i) para y'. Por que é necessário escolher a raiz quadrada positiva?
- (b) Introduza uma nova variável t pela relação

$$y = k^2 \operatorname{sen}^2 t. (ii)$$

Mostre que a equação encontrada no item (a) fica, então, na forma

$$2k^2 \operatorname{sen}^2 t \, dt = dx. \tag{iii}$$

(c) Fazendo $\theta = 2t$, mostre que a solução da Eq. (iii) para a qual x = 0 quando y = 0 é dada por

$$x = k^2(\theta - \sin\theta)/2, \quad y = k^2(1 - \cos\theta)/2.$$
 (iv)

As Equações (iv) são equações paramétricas da solução da Eq. (i), que contém o ponto (0,0). O gráfico das Eq. (iv) é chamado de cicloide.

(d) Se fizermos uma escolha apropriada da constante k, então a cicloide também contém o ponto (x_0, y_0) e é a solução do problema da braquistócrona. Encontre k se $x_0 = 1$ e $y_0 = 2$.

2.4 Diferenças entre Equações Lineares e Não Lineares

Até agora estivemos basicamente interessados em mostrar que equações de primeira ordem podem ser usadas para investigar muitos tipos diferentes de problemas nas ciências naturais e em apresentar métodos para resolver tais equações se forem lineares ou separáveis. Agora está na hora de considerar algumas questões mais gerais de equações diferenciais e explorar com mais detalhes algumas diferenças importantes entre equações lineares e não lineares.

Existência e Unicidade de Soluções. Até agora discutimos uma série de problemas de valor inicial, cada um dos quais tinha uma solução e, aparentemente, apenas uma. Isso levanta a questão sobre se isso é verdade para todos os problemas de valor inicial para equações de primeira ordem. Em outras palavras, todo problema de valor inicial tem exatamente uma solução? Esse é um ponto importante até para nãomatemáticos. Se você encontrar um problema de valor inicial ao investigar algum problema físico, você pode querer saber se ele tem solução antes de gastar muito tempo e esforço tentando resolvê-lo. Além disso, se você encontrar uma solução você pode estar interessado em saber se deve continuar a busca por outras soluções possíveis ou se pode ter certeza de que não existem outras soluções. Para equações lineares, as respostas para essas questões são dadas pelo teorema fundamental a seguir.

Teorema 2.4.1 Se as funções p e q são contínuas em um intervalo aberto I: $\alpha < t < \beta$ contendo o ponto $t = t_0$, então existe uma única função $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação diferencial

$$y' + p(t)y = g(t) \tag{1}$$

para cada t em I e que também satisfaz a condição inicial

$$y(t_0) = y_0, (2)$$

onde y₀ é um valor inicial arbitrário dado.

Observe que o Teorema 2.4.1 diz que o problema de valor inicial dado tem uma solução e também que o problema tem apenas uma solução. Em outras palavras, o teorema afirma tanto a existência quanto a unicidade da solução do problema de valor inicial (1), (2). Além disso, ele diz que a solução existe em qualquer intervalo I contendo o ponto inicial t_0 e no qual os coeficientes p e q são contínuos. Isto é, a solução pode ser descontínua ou deixar de existir apenas em pontos onde pelo menos uma das funções p ou q é descontínua. Frequentemente tais pontos podem ser identificados de modo fácil.

A demonstração desse teorema está parcialmente contida na discussão na Seção 2.1 que nos levou à fórmula [Eq. (32) na Seção 2.1]

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t) dt + c, \tag{3}$$

onde [Eq. (30) na Seção 2.1]

$$\mu(t) = \exp \int p(t) dt. \tag{4}$$

A dedução dessas fórmulas na Seção 2.1 mostra que se a Eq. (1) tem solução, então ela tem que ser dada pela Eq. (3). Analisando um pouco melhor aquela dedução, também podemos concluir que a equação diferencial (1) tem que ter, de fato, uma solução. Como p é contínua para $\alpha < t < \beta$, segue que μ está definida nesse intervalo e é uma função diferenciável que nunca se anula. Multiplicando a Eq. (1) por $\mu(t)$, obtemos

$$[\mu(t)y]' = \mu(t)g(t). \tag{5}$$

Como μ e g são contínuas, a função μg é integrável e a Eq. (3) segue da Eq. (5). Além disso, a integral de μg é diferenciável, de modo que y dado pela Eq. (3) existe e é diferenciável no intervalo $\alpha < t < \beta$. Substituindo a expressão para y da Eq. (3) na Eq. (1) ou (5), você pode verificar que essa expressão satisfaz a equação diferencial no intervalo $\alpha < t < \beta$. Finalmente, a condição inicial (2) determina a constante c unicamente, de modo que o problema de valor inicial só tem uma solução, o que completa a demonstração.

A Eq. (4) determina o fator integrante $\mu(t)$ a menos de um fator multiplicativo que depende do limite inferior de integração. Se escolhermos esse limite como sendo t_0 , então

$$\mu(t) = \exp \int_{t_0}^t p(s) \, ds,\tag{6}$$

e segue que $\mu(t_0) = 1$. Usando o fator integrante dado pela Eq. (6) e escolhendo também como t_0 o limite inferior de integração na Eq. (3), obtemos a solução geral da Eq. (1) na forma

$$y = \frac{1}{\mu(t)} \left[\int_{t_0}^{t} \mu(s)g(s) \, ds + c \right]. \tag{7}$$

Para satisfazer a condição inicial (2), precisamos escolher $c = y_0$. Portanto, a solução do problema de valor inicial (1), (2) é

$$y = \frac{1}{\mu(t)} \left[\int_{t_0}^{t} \mu(s)g(s) \, ds + y_0 \right], \tag{8}$$

onde $\mu(t)$ é dado pela Eq. (6).

Voltando nossa atenção para equações diferenciais não lineares, precisamos substituir o Teorema 2.4.1 por um teorema mais geral, como a seguir.

Teorema 2.4.2 Suponha que as funções $f \in \partial f/\partial y$ são contínuas em algum retângulo $\alpha < t < \beta, \gamma < y < \delta$ contendo o ponto (t_0, y_0) . Então, em algum intervalo $t_0 - h < t < t_0 + h$ contido em $\alpha < t < \beta$ existe uma única solução do problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), y(t_0) = y_0.$$
 (9)

Observe que as hipóteses no Teorema 2.4.2 se reduzem às do Teorema 2.4.1 se a equação diferencial for linear. De fato, f(t,y) = -p(t)y + g(t) e $\partial f/\partial y = -p(t)$, de modo que a continuidade de f e de $\partial f/\partial y$ é equivalente à continuidade de f e de f nesse caso. A demonstração do Teorema 2.4.1 foi relativamente simples porque se baseou na expressão (3), que fornece a solução de uma equação linear arbitrária. Não existe expressão correspondente para a solução da equação diferencial em (9), de modo que a demonstração do Teorema 2.4.2 é muito mais difícil. Ela é discutida até certo ponto na Seção 2.8 e, em mais profundidade, em livros mais avançados de equações diferenciais.

Observamos aqui que as condições enunciadas no Teorema 2.4.2 são suficientes para garantir a existência de uma única solução do problema de valor inicial (9) em algum intervalo $t_0 - h < t < t_0 + h$, mas elas não são necessárias. Em outras palavras, a conclusão permanece verdadeira sob hipóteses ligeiramente mais fracas sobre a função f. De fato, a existência de uma solução (mas não sua unicidade) pode ser estabelecida supondo-se apenas a continuidade de f.

Uma consequência geométrica importante da unicidade nos Teoremas 2.4.1 e 2.4.2 é que os gráficos de duas soluções não podem se intersectar. Caso contrário, existiriam duas soluções satisfazendo a condição inicial correspondente no ponto de interseção, em violação do Teorema 2.4.1 ou 2.4.2.

Vamos ver alguns exemplos.

EXEMPLO 1

Use o Teorema 2.4.1 para encontrar um intervalo no qual o problema de valor inicial

$$ty' + 2y = 4t^2, (10)$$

$$y(1) = 2 \tag{11}$$

tem uma única solução.

Colocando a Eq. (10) na forma-padrão (1), temos

$$y' + (2/t)y = 4t,$$

de modo que p(t) = 2/t e g(t) = 4t. Logo, para essa equação g é contínua para todo t, enquanto p só é contínua para t < 0 ou t > 0. O intervalo t > 0 contém o ponto inicial; portanto, o Teorema 2.4.1 garante que o problema (10), (11) tem uma única solução no intervalo $0 < t < \infty$, No Exemplo 3 da Seção 2.1, vimos que a solução desse problema de valor inicial é

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2}, \quad t > 0.$$
 (12)

Suponha agora que mudamos a condição inicial (11) para y(-1) = 2. Então o Teorema 2.4.1 afirma que existe uma única solução para t < 0. Como você pode verificar facilmente, a solução é dada, de novo pela Eq. (12), só que agora no intervalo $-\infty < t < 0$.

EXEMPLO

2

Aplique o Teorema 2.4.2 ao problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}, \qquad y(0) = -1.$$
 (13)

Note que o Teorema 2.4.1 não é aplicável neste caso, já que a equação diferencial não é linear. Para aplicar o Teorema 2.4.2, observe que

$$f(x,y) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)^2}.$$

Assim, cada uma dessas funções é contínua em toda parte, exceto na reta y = 1. Logo, podemos desenhar um retângulo em torno do ponto inicial (0,-1) no qual as funções $f \in \partial f/\partial y$ são contínuas. Portanto, o Teorema $\overline{2.4.2}$ garante que o problema de valor inicial tem uma única solução em algum intervalo em torno de x = 0. No entanto, embora o retângulo possa ser esticado indefinidamente para x positivo e negativo isso não significa, necessariamente, que a solução existe para todo x. De fato, o problema de valor inicial (13) foi resolvido no Exemplo 2 da Seção 2.2, e a solução só existe para x > -2.

Suponha que mudamos a condição inicial para y(0) = 1. O ponto inicial agora está na reta y = 1, de modo que não podemos desenhar nenhum retângulo em torno dele no qual $f \in \partial f/\partial y$ sejam contínuas. Então o Teorema 2.4.2 não diz nada sobre soluções possíveis para esse problema modificado. No entanto, se separarmos as variáveis e integrarmos, como na Seção 2.2, veremos que

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c.$$

Além disso, se x = 0 e y = 1, então c = -1. Finalmente, resolvendo para y, obtemos

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x}. (14)$$

A Eq. (14) nos dá duas funções que satisfazem a equação diferencial para x > 0 e também satisfazem a condição inicial y(0) = 1.

EXEMPLO 3

Considere o problema de valor inicial

$$y' = y^{1/3}, y(0) = 0$$
 (15)

para $t \ge 0$. Aplique o Teorema 2.4.2 a este problema de valor inicial e depois resolva o problema.

A função $f(t, y) = y^{1/3}$ é contínua em toda a parte, mas $\partial f/\partial y$ não existe quando y = 0, logo não é contínua aí. Assim, o Teorema 2.4.2 não pode ser aplicado a este problema, e não podemos tirar nenhuma conclusão a partir dele. No entanto, pela observação após o Teorema 2.4.2 a continuidade de f garante a existência de soluções, mas não sua unicidade.

Para compreender melhor a situação, vamos resolver o problema, o que é fácil, já que a equação é separável. Temos

$$v^{-1/3}dy = dt,$$

de modo que

$$\frac{3}{5}y^{2/3} = t + c$$

e

$$y = \left[\frac{2}{3}(t+c)\right]^{3/2}$$
.

A condição inicial é satisfeita se c = 0, logo

$$y = \phi_1(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}, \quad t \ge 0$$
 (16)

satisfaz ambas as Eqs. (15). Por outro lado, a função

$$y = \phi_2(t) = -\left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}, \quad t \ge 0$$
 (17)

também é solução do problema de valor inicial. Além disso, a função

$$y = \psi(t) = 0, \quad t \ge 0$$
 (18)

é mais uma solução. De fato, para qualquer to positivo, as funções

$$y = \chi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \le t < t_0, \\ \pm \left[\frac{2}{3}(t - t_0)\right]^{3/2}, & \text{se } t \ge t_0 \end{cases}$$
 (19)

são contínuas, diferenciáveis (em particular em $t = t_0$) e são soluções do problema de valor inicial (15). Portanto, este problema tem uma família infinita de soluções; veja a Figura 2.4.1, onde estão ilustradas algumas dessas soluções.

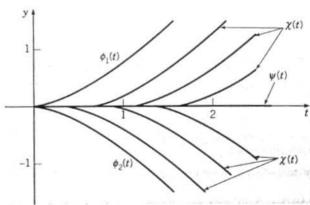


FIGURA 2.4.1 Diversas soluções do problema de valor inicial $y' = y^{1/3}$, y(0) = 0.

Como já observamos, a falta de unicidade de soluções do problema (15) não contradiz o teorema de existência e unicidade, já que ele não é aplicável se o ponto inicial pertencer ao eixo dos t. Se (t_0, y_0) é qualquer ponto que não pertence ao eixo dos t, no entanto, o teorema garante que existe uma única solução da equação diferencial $y' = y^{1/3}$ que contém o ponto (t_0, y_0) .

Intervalo de Definição. De acordo com o Teorema 2.4.1, a solução de uma equação linear (1)

$$y' + p(t)y = g(t),$$

sujeita à condição inicial $y(t_0) = y_0$, existe em qualquer intervalo em torno de t_0 no qual as funções p e q são contínuas. Assim, assíntotas verticais ou outras descontinuidades da solução só podem ocorrer em pontos de descontinuidade de p ou de q. Por exemplo, as soluções no Exemplo 1 (com uma exceção) são assintóticas ao eixo dos y, correspondendo à descontinuidade em t = 0 do coeficiente p(t) = 2/t, mas nenhuma das soluções tem outro ponto onde ela não existe ou não é diferenciável. A solução excepcional mostra que as soluções podem permanecer contínuas, às vezes, mesmo em pontos de descontinuidade dos coeficientes.

Por outro lado, para um problema de valor inicial não linear satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.4.2, o intervalo onde a solução existe pode ser difícil de determinar. A solução $y = \phi(t)$ certamente existe enquanto o ponto $[t,\phi(t)]$ permanece em uma região na qual as hipóteses do Teorema 2.4.2 são satisfeitas. Isso é o que determina o valor de h no teorema. No entanto, como $\phi(t)$ não é conhecida em geral, pode ser impossível localizar o ponto $[t,\phi(t)]$ em relação a essa região. De qualquer modo, o intervalo de existência da solução pode não ter uma relação simples com a função f na equação diferencial y' = f(t,y). Isso está ilustrado no próximo exemplo.

EXEMPLO

Resolva o problema de valor inicial

$$y' = y^2, y(0) = 1,$$
 (20)

e determine o intervalo no qual a solução existe.

O Teorema 2.4.2 garante que este problema tem uma única solução, já que $f(t, y) = y^2$ e $\partial f/\partial y = 2y$ são contínuas em toda parte. Para encontrar a solução, separamos as variáveis e integramos, com o resultado que

$$y^{-2} dy = dt (21)$$

e

$$-y^{-1} = t + c.$$

Então, resolvendo para y, temos

$$y = -\frac{1}{t+c} \,. \tag{22}$$

Para satisfazer a condição inicial, precisamos escolher c = -1, de modo que

$$y = \frac{1}{1 - t} \tag{23}$$

é a solução do problema de valor inicial dado. É claro que a solução torna-se ilimitada quando $t \to 1$; portanto, a solução só existe no intervalo $-\infty < t < 1$. Não há nenhuma indicação na equação diferencial propriamente dita, entretanto, que mostre que o ponto t = 1 é diferente de alguma maneira. Além disso, se a condição inicial for substituída por

$$y(0) = y_0,$$
 (24)

então a constante c na Eq. (22) tem que ser igual a $c = -1/y_0$ e segue que

$$y = \frac{y_0}{1 - y_0 t} \tag{25}$$

é a solução do problema de valor inicial com condição inicial (24). Observe que a solução (25) torna-se ilimitada quando $t \to 1/y_0$, de modo que o intervalo de existência da solução é $-\infty < t < 1/y_0$ se $y_0 > 0$ e é $1/y_0 < t < \infty$ se $y_0 < 0$. Este exemplo ilustra outra característica de problemas de valor inicial para equações não lineares, a saber, que as singularidades da solução podem depender, de maneira essencial, tanto da condição inicial quanto da equação diferencial.

Solução Geral. Outro aspecto no qual as equações lineares e não lineares diferem está relacionado ao conceito de solução geral. Para uma equação linear de primeira ordem é possível obter uma solução contendo uma constante arbitrária, de onde podem ser obtidas todas as soluções possíveis atribuindo-se valores a essa constante. Isso pode não ocorrer para equações não lineares; mesmo que seja possível encontrar uma solução contendo uma constante arbitrária, podem existir outras soluções que não podem ser obtidas atribuindo-se valores a essa constante. Por exemplo, para a equação diferencial $y' = y^2$ no Exemplo 4, a expressão na Eq. (22) contém uma constante arbitrária, mas não inclui todas as soluções da

4

equação diferencial. Para mostrar isso, observe que a função y=0 para todo t é, certamente, uma solução da equação diferencial, mas não pode ser obtida da Eq. (22) atribuindo-se um valor para c. Poderíamos prever, nesse exemplo, que algo desse tipo poderia ocorrer porque, para colocar a equação diferencial original na forma (21), tivemos que supor que y não se anula. Entretanto, a existência de soluções "adicionais" não é incomum para equações não lineares; um exemplo menos óbvio é dado no Problema 22. Assim, só usaremos a expressão "solução geral" quando discutirmos equações lineares.

Soluções Implícitas. Lembre-se novamente de que, para um problema de valor inicial para uma equação linear de primeira ordem, a Eq. (8) fornece uma fórmula explícita para a solução $y = \phi(t)$. Desde que seja possível encontrar as primitivas necessárias, o valor da solução em qualquer ponto pode ser determinado substituindo-se simplesmente o valor apropriado de t na equação. A situação para equações não lineares é muito menos satisfatória. Em geral, o melhor que podemos esperar é encontrar uma equação da forma

$$F(t,y) = 0 (26)$$

envolvendo t e y que é satisfeita pela solução $y = \phi(t)$. Mesmo isso só pode ser feito para equações de certos tipos particulares, entre as quais as equações separáveis são as mais importantes. A Eq. (26) é chamada uma integral, ou primeira integral, da equação diferencial, e (como já observamos) seu gráfico é uma curva integral ou, talvez, uma família de curvas integrais. A Eq. (26), supondo que possa ser encontrada, define a solução implicitamente; isto é, para cada valor de t, precisamos resolver a Eq. (26) para encontrar o valor correspondente de y. Se a Eq. (26) for suficientemente simples, pode ser possível resolvê-la analiticamente para y, obtendo assim uma fórmula explícita para a solução. No entanto, com maior frequência isso não será possível, e você terá que recorrer a cálculos numéricos para determinar o valor (aproximado) de y para um valor dado de t. Uma vez calculados diversos pares de valores de t e de y, muitas vezes é útil colocá-los em um gráfico e depois esboçar a curva integral que os contém. Você deveria usar um computador para isso, se possível.

Os Exemplos 2, 3 e 4 são problemas não lineares nos quais é fácil encontrar uma fórmula explícita para a solução $y = \phi(t)$. Por outro lado, os Exemplos 1 e 3 na Seção 2.2 são casos nos quais é melhor deixar a solução em forma implícita e usar métodos numéricos para calculá-la para valores particulares da variável independente. Essa última situação é mais típica; a menos que a relação implícita seja quadrática em y ou tenha alguma outra forma particularmente simples, provavelmente não será possível resolvê-la exatamente por métodos analíticos. De fato, com frequência é impossível até encontrar uma expressão implícita para a solução de uma equação não linear de primeira ordem.

Construção Gráfica ou Numérica de Curvas Integrais. Devido à dificuldade em obter soluções analíticas exatas de equações não lineares, métodos que geram soluções aproximadas ou outras informações qualitativas sobre as soluções acabam tendo uma importância maior. Já descrevemos, na Seção 1.1, como o campo de direções de uma equação diferencial pode ser construído. O campo de direções pode mostrar, muitas vezes, a forma qualitativa das soluções, e também pode ser útil na identificação das regiões no plano ty onde as soluções exibem propriedades interessantes, que merecem uma investigação mais detalhada, analítica ou numérica. Métodos gráficos para equações de primeira ordem são mais discutidos na Seção 2.5. Uma introdução a métodos de aproximação numérica para equações de primeira ordem é dada na Seção 2.7, e uma discussão mais sistemática de métodos numéricos aparece no Capítulo 8. Entretanto, não é necessário estudar os algoritmos numéricos propriamente ditos para usar eficazmente um dos muitos pacotes de programas que geram e fazem gráficos de aproximações numéricas de soluções de problemas de valor inicial.

Sumário. A equação linear y' + p(t)y = g(t) tem diversas propriedades boas que podem ser resumidas nas afirmações a seguir:

- Supondo que os coeficientes são contínuos, existe uma solução geral, contendo uma constante arbitrária, que inclui todas as soluções da equação diferencial. Uma solução particular que satisfaz uma condição inicial dada pode ser encontrada escolhendo-se o valor apropriado para a constante arbitrária.
- Existe uma expressão para a solução, a saber, Eq. (7) ou (8). Além disso, embora envolva duas integrações, a expressão fornece uma solução explícita para a solução y = φ(t), em vez de implícita.
- 3. Os possíveis pontos de descontinuidade, ou singularidades, da solução podem ser identificados (sem resolver o problema) simplesmente encontrando os pontos de descontinuidade dos coeficientes. Assim, se os coeficientes forem contínuos para todo t, a solução também existe e é contínua para todo t.

Nenhuma das afirmações acima é verdadeira, em geral, para equações não lineares. Embora uma equação não linear possa ter uma solução envolvendo uma constante arbitrária, também podem existir outras

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6, determine (sem resolver o problema) um intervalo no qual a solução do problema de valor inicial dado certamente existe.

1.
$$(t-3)y' + (\ln t)y = 2t$$
, $y(1) = 2$
2. $t(t-4)y' + y = 0$, $y(2) = 1$
3. $y' + (\tan t)y = \operatorname{sen}t$, $y(\pi) = 0$
4. $(4-t^2)y' + 2ty = 3t^2$, $y(-3) = 1$
5. $(4-t^2)y' + 2ty = 3t^2$, $y(-3) = 1$
6. $(\ln t)y' + y = \cot t$, $y(2) = 3$

Em cada um dos Problemas de 7 a 12, diga onde, no plano ty, as hipóteses do Teorema 2.4.2 são satisfeitas.

7.
$$y' = \frac{t - y}{2t + 5y}$$

8. $y' = (1 - t^2 - y^2)^{1/2}$
9. $y' = \frac{\ln|ty|}{1 - t^2 + y^2}$
10. $y' = (t^2 + y^2)^{3/2}$
11. $\frac{dy}{dt} = \frac{1 + t^2}{3y - y^2}$
12. $\frac{dy}{dt} = \frac{(\cot t)y}{1 + y}$

Em cada um dos Problemas de 13 a 16, resolva o problema de valor inicial dado e determine como o intervalo no qual a solução existe depende do valor inicial y_0 .

13.
$$y' = -4t/y$$
, $y(0) = y_0$
15. $y' + y^3 = 0$, $y(0) = y_0$
16. $y' = 2ty^2$. $y(0) = y_0$
16. $y' = t^2/y(1+t^3)$, $y(0) = y_0$

Em cada um dos Problemas de 17 a 20, desenhe um campo de direções e desenhe (ou esboce) o gráfico de diversas soluções da equação diferencial dada. Descreva como as soluções parecem se comportar quando t aumenta e como seus comportamentos dependem do valor inicial y_0 quando t = 0.

17.
$$y' = ty(3 - y)$$

18. $y' = y(3 - ty)$
19. $y' = -y(3 - ty)$
20. $y' = t - 1 - y^2$

- 21. Considere o problema de valor inicial $y' = y^{1/3}$, y(0) = 0, do Exemplo 3 no texto.
 - (a) Existe uma solução que contém o ponto (1,1)? Se existe, encontre-a.
 - (b) Existe uma solução que contém o ponto (2,1)? Se existe, encontre-a.
 - (c) Considere todas as soluções possíveis do problema de valor inicial dado. Determine o conjunto de valores que essas soluções têm em t = 2.
- 22. (a) Verifique que ambas as funções $y_1(t) = 1 t$ e $y_2(t) = -t^2/4$ são soluções do problema de valor inicial

$$y' = \frac{-t + (t^2 + 4y)^{1/2}}{2}$$
, $y(2) = -1$.

Onde essas soluções são válidas?

- (b) Explique por que a existência de duas soluções para o problema dado não contradiz a unicidade no Teorema 2.4.2.
- (c) Mostre que $y = ct + c^2$, onde c é uma constante arbitrária, satisfaz a equação diferencial no item (a) para $t \ge -2c$. Se c = -1, a condição inicial também é satisfeita e obtemos a solução $y = y_1(t)$. Mostre que não existe escolha de c que fornece a segunda solução $y = y_2(t)$.
- 23. (a) Mostre que $\phi(t) = e^{2t}$ é uma solução de y' 2y = 0 e que $y = c\phi(t)$ também é solução dessa equação para qualquer valor da constante c.
 - (b) Mostre que $\phi(t) = 1/t$ é uma solução de $y' + y^2 = 0$ para t > 0, mas que $y = c\phi(t)$ não é solução dessa equação, a menos que c = 0 ou c = 1. Note que a equação no item (b) é não linear, enquanto a no item (a) é linear.
- 24. Mostre que se $y = \phi(t)$ é uma solução de y' + p(t)y = 0, então $y = c\phi(t)$ também é solução para qualquer valor da constante c.
- 25. Seja $y = y_1(t)$ uma solução de

$$y' + p(t)y + 0, (i)$$

e seja $y = y_2(t)$ uma solução de

$$y' + p(t)y = g(t). (ii)$$

Mostre que $y = y_1(t) + y_2(t)$ também é solução da Eq. (ii).

26. (a) Mostre que a solução (7) da equação linear geral (1) pode ser colocada na forma

$$y = cy_1(t) + y_2(t),$$
 (i)

onde c é uma constante arbitrária. Identifique as funções y_1 e y_2 .

(b) Mostre que y₁ é uma solução da equação diferencial

$$y' + p(t)y = 0, (ii)$$

correspondente a g(t) = 0.

(c) Mostre que y₂ é solução da equação linear geral (1). Veremos mais tarde (por exemplo, na Seção 3.5) que soluções de equações lineares de ordem mais alta têm um padrão semelhante ao da Eq. (i).

Equações de Bernoulli. Algumas vezes é possível resolver uma equação não linear fazendo uma mudança da variável dependente que a transforma em uma equação linear. O exemplo mais importante de tal equação é da forma

$$y' + p(t)y = q(t)y'',$$

e é chamada de equação de Bernoulli em honra a Jakob Bernoulli. Os Problemas de 27 a 31 tratam de equações desse tipo.

- 27. (a) Resolva a equação de Bernoulli quando n = 0 e n = 1.
 - (b) Mostre que, se $n \neq 0$ e $n \neq 1$, então a substituição $v = y^{1-n}$ reduz a equação de Bernoulli a uma equação linear. Esse método de solução foi encontrado por Leibniz em 1696.

Em cada um dos Problemas de 28 a 31 é dada uma equação de Bernoulli. Em cada caso, resolva-a usando a substituição mencionada no Problema 27(b).

28.
$$t^2y' + 2ty - y^3 = 0$$
, $t > 0$

- 29. $y' = ry ky^2$, r > 0 e k > 0. Esta equação é importante em dinâmica populacional, e é discutida em detalhes na Seção 2.5.
- 30. $y' = \varepsilon y \sigma y', \varepsilon > 0$ e $\sigma > 0$. Esta equação aparece no estudo da estabilidade do fluxo de fluidos.
- 31. $dy/dt = (\Gamma \cos t + T)y y^3$, onde Γ e T são constantes. Esta equação também aparece no estudo da estabilidade do fluxo de fluidos.

Coeficientes Descontínuos. Algumas vezes ocorrem equações diferenciais lineares com uma ou ambas as funções p e g tendo descontinuidades do tipo salto. Se t_0 é tal ponto de descontinuidade, é necessário resolver a equação separadamente para $t < t_0$ e para $t > t_0$. Depois, junta-se as duas soluções de modo que y seja contínua em t_0 . Isso é feito por uma escolha apropriada das constantes arbitrárias. Os dois problemas a seguir ilustram essa situação. Note em cada caso que é impossível fazer y' contínua em t_0 .

32. Resolva o problema de valor inicial

$$y' + 2y = g(t),$$
 $y(0) = 0,$

onde

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

33. Resolva o problema de valor inicial

$$y' + p(t)y = 0,$$
 $y(0) = 1,$

onde

$$p(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t \le 1, \\ 1, & t > 1. \end{cases}$$

2.5 Equações Autônomas e Dinâmica Populacional

Uma classe importante de equações de primeira ordem consiste naquelas nas quais a variável independente não aparece explicitamente. Tais equações são ditas **autônomas**, e têm a forma

$$dy/dt = f(y). (1)$$

Vamos discutir essas equações no contexto de crescimento ou declínio populacional de uma espécie dada, um assunto importante em campos que vão da medicina à ecologia, passando pela economia global. Algumas outras aplicações são mencionadas em alguns dos problemas. Lembre-se de que consideramos, nas Seções 1.1 e 1.2, o caso especial da Eq. (1) no qual f(y) = ay + b.

A Eq. (1) é separável, de modo que podemos aplicar a discussão feita na Seção 2.2, mas o objetivo principal desta seção é mostrar como métodos geométricos podem ser usados para se obter informação qualitativa importante sobre as soluções diretamente da equação diferencial sem resolvê-la. Os conceitos de estabilidade e instabilidade de soluções de equações diferenciais são fundamentais nesse esforço. Essas ideias foram introduzidas informalmente no Capítulo 1, mas sem usar essa terminologia. Vamos discuti-las mais aqui, e examiná-las em maior profundidade e em um contexto mais geral no Capítulo 9.

Crescimento Exponencial. Seja $y = \phi(t)$ a população de uma determinada espécie no instante t. A hipótese mais simples em relação à variação de população é que a taxa de variação de y é proporcional ao valor atual de y; ou seja,

$$dy/dt = ry, (2)$$

onde a constante de proporcionalidade r é chamada de **taxa de crescimento ou declínio**, dependendo se é positiva ou negativa. Vamos supor aqui que r > 0, de modo que a população está crescendo.

Resolvendo a Eq. (2) sujeita à condição inicial

$$y(0) = y_0,$$
 (3)

obtemos

$$y = y_0 e^{rt}. (4)$$

Assim, o modelo matemático que consiste no problema de valor inicial (2), (3) com r > 0 prevê que a população vai crescer exponencialmente todo o tempo, como mostra a Figura 2.5.1 para diversos valores de y_0 . Sob condições ideais, observou-se que a Eq. (4) é razoavelmente precisa para muitas populações, pelo menos por períodos limitados de tempo. Entretanto, é claro que tais condições ideais não podem continuar indefinidamente; alguma hora um fator como limitações de espaço, suprimento de comida ou de outros recursos reduzirá a taxa de crescimento e terminará com o crescimento exponencial ilimitado.

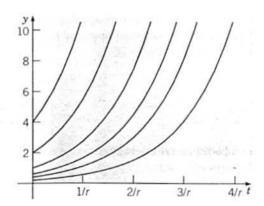


FIGURA 2.5.1 Crescimento exponencial: y em função de t para dy/dt = ry.

Crescimento Logístico. Para levar em consideração o fato de que a taxa de crescimento da população depende, de fato, da população, substituímos a constante r na Eq. (2) por uma função h(y) e obtivemos, então, a equação modificada

¹⁰Aparentemente, foi o economista inglês Thomas Malthus (1766-1834) quem observou primeiro que muitas populações biológicas aumentam a uma taxa proporcional à população. Seu primeiro artigo sobre populações apareceu em 1798.

$$dy/dt = h(y)y. (5)$$

Agora queremos escolher h(y) tal que $h(y) \cong r > 0$ quando y é pequeno, h(y) diminui quando y aumenta e h(y) < 0 quando y é suficientemente grande. A função mais simples que tem essas propriedades é h(y) = r - ay, onde a também é uma constante positiva. Usando essa função na Eq. (5), obtemos

$$dy/dt = (r - ay)y. (6)$$

A Eq. (6) é conhecida como a equação de Verhulst¹¹ ou **equação logística**. É muitas vezes conveniente escrever a equação logística na forma equivalente

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y,\tag{7}$$

onde K = r/a. A constante r é chamada de **taxa de crescimento intrínseca**, isto é, a taxa de crescimento na ausência de qualquer fator limitador. A interpretação de K ficará clara em breve.

Iremos investigar as soluções da Eq. (7) em detalhe mais tarde nesta seção. Antes disso, no entanto, vamos mostrar como você pode desenhar facilmente um esboço *qualitativamente correto* das soluções. Os mesmos métodos também se aplicam à equação mais geral (1).

Vamos primeiro procurar soluções da Eq. (7) do tipo mais simples possível, ou seja, funções constantes. Para tal solução, dy/dt = 0 para todo t, de modo que qualquer solução constante da Eq. (7) tem que satisfazer a equação algébrica

$$r(1 - y/K)y = 0.$$

Logo, as soluções constantes são $y = \phi_1(t) = 0$ e $y = \phi_2(t) = K$. Essas soluções são chamadas de **soluções de equilíbrio** da Eq. (7), já que não há variação ou mudança no valor de y quando t aumenta. Da mesma forma, soluções de equilíbrio da equação mais geral (1) podem ser encontradas localizando-se as raízes de f(y) = 0. Os zeros de f(y) também são chamados de **pontos críticos**.

Para visualizar outras soluções da Eq. (7) e esboçar seus gráficos rapidamente podemos começar desenhando o gráfico de f(y) em função de y. No caso da Eq. (7), f(y) = r(1 - y/K)y, logo o gráfico é a parábola ilustrada na Figura 2.5.2. As interseções com os eixos são (0,0) e (K,0), correspondendo aos pontos críticos da Eq. (7), e o vértice da parábola está em (K/2, rK/4). Note que dy/dt > 0 para 0 < y < K; portanto y é uma função crescente de t quando y está nesse intervalo; isso está indicado na Figura 2.5.2 pelas setas próximas ao eixo dos y apontando para a direita. Analogamente, se y > K, então dy/dt < 0, logo y é decrescente, como indicado pela seta apontando para a esquerda na Figura 2.5.2.

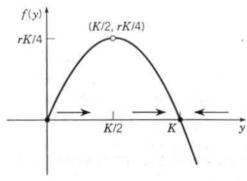


FIGURA 2.5.2 f(y) em função de y para dy/dt = r(1 - y/K)y.

Nesse contexto, o eixo dos y é chamado muitas vezes de **reta de fase** e está reproduzido em sua orientação vertical usual na Figura 2.5.3a. Os pontos em y = 0 e y = K são os pontos críticos, ou soluções de equilíbrio. As setas indicam novamente que y é crescente sempre que 0 < y < K e que y é decrescente quando y > K.

¹¹P. F. Verhulst (1804-1849) foi um matemático belga que introduziu a Eq. (6) como um modelo para o crescimento populacional em 1838. Ele referiu-se a ele como crescimento logístico; por isso a Eq. (6) é chamada muitas vezes de equação logística. Ele não foi capaz de testar a precisão de seu modelo devido a dados inadequados de censo e não recebeu muita atenção até muitos anos depois. R. Pearl (1930) demonstrou concordância razoável com dados experimentais para populações de drosophila melanogaster (mosca da fruta), e G. F. Gause (1935) fez o mesmo para populações de paramecium e de tribolium (besouro castanho).

Além disso, da Figura 2.5.2 note que se y está próximo de zero ou de K, então a inclinação f(y) está próxima de zero, de modo que as curvas-solução têm tangentes próximas da horizontal. Elas se tornam mais inclinadas quando o valor de y fica mais longe de zero ou de K.

Para esboçar os gráficos das soluções da Eq. (7) no plano ty, começamos com as soluções de equilíbrio y = 0 e y = K; depois desenhamos outras curvas que são crescentes quando 0 < y < K, decrescentes quando y > K e cujas tangentes se aproximam da horizontal quando y se aproxima de 0 ou de K. Logo, os gráficos das soluções da Eq. (7) devem ter a forma geral ilustrada na Figura 2.5.5b, independentemente dos valores de r e de K.

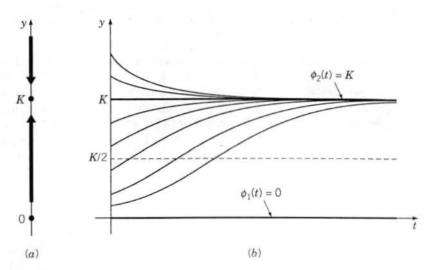


FIGURA 2.5.3 Crescimento logístico: dy/dt = r(1 - y/K)y. (a) A reta de fase. (b) Gráficos de y em função de t.

A Figura 2.5.3b parece mostrar que outras soluções intersectam a solução de equilíbrio y = K, mas isso é possível? Não, a parte de unicidade do Teorema 2.4.2, o teorema fundamental de existência e unicidade, diz que apenas uma solução pode conter um ponto dado no plano ty. Assim, embora outras soluções possam ser assintóticas à solução de equilíbrio quando $t \to \infty$, elas não podem intersectá-la em tempo finito.

Para ir um pouco mais fundo na investigação, podemos determinar a concavidade das curvas-solução e a localização dos pontos de inflexão calculando d^2y/dt^2 . Da equação diferencial (1), obtemos (usando a regra da cadeia)

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}f(y) = f'(y)\frac{dy}{dt} = f'(y)f(y). \tag{8}$$

O gráfico de y em função de t é convexo quando y'' > 0, isto é, quando f e f' têm o mesmo sinal, e é côncavo quando y'' < 0, o que ocorre quando $f \in f'$ têm sinais contrários. Os sinais de $f \in f'$ podem ser identificados facilmente do gráfico de f(y) em função de y. Podem ocorrer pontos de inflexão quando f'(y) = 0.

No caso da Eq. (7), as soluções são convexas para 0 < y < K/2, onde f é positiva e crescente (veja a Figura 2.5.2), de modo que $f \in f$ são positivas. As soluções também são convexas para y > K, onde $f \in f$ negativa e decrescente (f e f' são negativas). Para K/2 < y < K, as soluções são côncavas, já que f é positiva e decrescente, de modo que f é positiva e f' é negativa. Toda vez que o gráfico de y em função de t cruza a reta y = K/2, aí há um ponto de inflexão. Os gráficos na Figura 2.5.3b exibem essas propriedades.

Finalmente, note que K é a cota superior que é aproximada, mas nunca excedida, por populações crescentes começando abaixo desse valor. Então, é natural nos referirmos a K como sendo o nível de saturação, ou capacidade de sustentação ambiental, para a espécie em questão.

Uma comparação entre as Figuras 2.5.1 e 2.5.3b revela que soluções da equação não linear (7) são muito diferentes das soluções da equação linear (1), pelo menos para valores grandes de t. Independentemente do valor de K, isto é, não importa quão pequeno seja o termo não linear na Eq. (7), as soluções dessa equação tendem a um valor finito quando $t \rightarrow \infty$, enquanto as soluções da Eq. (1) crescem (exponencialmente) sem limite quando t → ∞. Assim, mesmo um termo não linear minúsculo na equação diferencial (7) tem um efeito decisivo na solução para valores grandes de t.

Em muitas situações, basta obter a informação qualitativa ilustrada na Figura 2.5.3b sobre uma solução $y = \phi(t)$ da Eq. (7). Essa informação foi inteiramente obtida a partir do gráfico de f(y) como função de y, sem resolver a equação diferencial (7). Entretanto, se quisermos ter uma descrição mais detalhada