UM

O Cálculo com Geometria Analítica

3ª Edição

Louis Leithold

editora HARBRA

Tradução:

CYRO DE CARVALHO PATARRA

Professor do Instituto de Matemática e Estatística
da Universidade de São Paulo
Ph. D. Northwestern University

Revisão Técnica:

WILSON CASTRO FERREIRA, Jr.
SILVIO PREGNOLATTO

Departamento de Matemática
Universidade Estadual de Campinas

UM

O Cálculo com Geometria Analítica

3ª Edição

UM

O Cálculo com Geometria Analítica

3ª Edição

LOUIS LEITHOLD

editora HARBRA ltda.

Direção Geral:	Julio E. Emöd
Supervisão Editorial:	Maria Pia Castiglia
Coordenação Editorial:	Marilu Bernardes Sória
Revisão de Estilo:	Maria Lúcia G. Leite Rosa
Assistente Editorial:	Mônica Roberta Suguiyama
Revisão de Provas:	Melissa Mesquita Ponciano
Composição e Capa:	AM Produções Gráficas Ltda.
Fotolitos:	STAP Stúdio Gráfico
Impressão e Acabamento:	Gráfica Paym

O CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA - volume 1 - 3ª edição

Rua Joaquim Távora, 629 – Vila Mariana
04015-001 – São Paulo – SP
Promoção: (011) 5084-2482 e 5571-1122. Fax: (011) 5575-6876
Vendas: (011) 5549-2244 e 5571-0276. Fax: (011) 5571-9777

Tradução de *The Calculus with Analytic Geometry, 6th edition*

Impresso no Brasil *Printed in Brazil*

Conteúdo

VOLUME I

Prefácio

"Tudo deveria se tornar o mais simples possível, mas não simplificado"

— ALBERT EINSTEIN

O Cálculo com Geometria Analítica foi planejado para futuros matemáticos e para estudantes cujo interesse primário seja Engenharia, Ciências Exatas e Humanas, ou áreas não-técnicas. As explanações passo-a-passo, os inúmeros exemplos descritos e a ampla variedade de exercícios continuam a ser os aspectos relevantes do livro nesta edição. Uma vez que um livro-texto deve ser escrito para o estudante, empenhei-me em manter uma apresentação de acordo com a experiência e a maturidade de um principiante, sem deixar que qualquer passagem fosse omitida ou ficasse sem explicação. Espero que o leitor tome consciência de que as demonstrações dos teoremas são necessárias; procurei torná-las bastante motivadoras e explicá-las cuidadosamente, de forma que sejam compreensíveis para o estudante que adquiriu um nível razoável de conhecimentos das secções que as precedem. Se um teorema está enunciado sem demonstração, a sua discussão foi ampliada com figuras e exemplos e, em tais casos, sempre ressaltei que se trata de uma ilustração do conteúdo do teorema, e não de uma demonstração. Nas Secções Suplementares do final dos capítulos aparecem algumas discussões teóricas as quais, se o estudante desejar, poderão ser omitidas sem prejuízo da seqüência do texto.

A TERCEIRA EDIÇÃO DE O CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA

Desde a primeira edição deste livro em 1968, o curso de Cálculo sofreu mudanças significativas em seu conteúdo e ensino. A cada nova edição, tentei incorporar tais mudanças e manter um equilíbrio saudável entre uma abordagem rigorosa e um ponto de vista intuitivo. Os dezenove* capítulos de ***O Cálculo com Geometria Analítica*** formam quatro segmentos: capítulo 1, revisão de tópicos de pré-cálculo; capítulos 2-11 funções de uma única variável; capítulos 12-13, séries infinitas; e capítulos 14-19, vetores e funções de mais de uma variável. A terceira edição incorpora alterações em cada um desses segmentos, algumas delas foram feitas para refletir a importância cada vez maior de computadores e calculadoras programáveis, facilitando os cálculos.

* **N. do E.:** O Capítulo 20 foi escrito especialmente para a edição brasileira e trata das equações diferenciais.

TÓPICOS DE REVISÃO DO CÁLCULO

CAPÍTULO 1 Esse capítulo, "Números Reais, Funções e Gráficos", é menos detalhado do que nas edições anteriores. Uma secção sobre aspectos básicos do sistema de números reais é seguida por uma introdução à Geometria Analítica que inclui o material tradicional sobre retas e circunferências. É apresentada uma discussão sobre a definição de uma função, operações com funções e tipos de funções. A introdução de seis tipos de funções trigonométricas permite o seu uso nos exemplos de derivação e integração de funções não-algébricas.

FUNÇÕES DE UMA ÚNICA VARIÁVEL

CAPÍTULO 2 Com a secção sobre limites no infinito introduzida neste capítulo, a discussão de limite e continuidade é concluída em um mesmo capítulo. Esses tópicos constituem a essência de um curso inicial de Cálculo. Todos os teoremas de limite são enunciados, e algumas provas são apresentadas no texto, enquanto outras são propostas como exercícios. Nesta edição há exemplos e exercícios novos que envolvem o uso de calculadoras para lançar conjecturas sobre um determinado limite.

CAPÍTULO 3 Na secção 3.1, defino a reta tangente a uma curva para demonstrar, antecipadamente, a interpretação geométrica da derivada, definida na secção 3.2. A aplicação física de velocidade instantânea no movimento retilíneo é apresentada após a demonstração de teoremas sobre diferenciação. As derivadas das seis funções trigonométricas são apresentadas, tornando-se disponíveis como exemplos para a apresentação da regra da cadeia. Há alguns execícios novos que requerem o uso de calculadora para se estimar um dado valor da derivada, a partir da definição.

CAPÍTULO 4 Esse capítulo apresenta as aplicações tradicionais da derivada a problemas envolvendo máximos e mínimos, bem como o esboço de curvas. Os tópicos sobre limites no infinito e assíntotas verticais e horizontais passam para o capítulo 2. A secção sobre aplicações na Economia que aparecia neste capítulo nas edições anteriores foi suprimida, mas parte desse assunto foi discutido em outros capítulos. A secção sobre a diferencial foi mudada para este capítulo, de modo a ficar mais próxima de sua referência no tratamento da antidiferenciação.

CAPÍTULO 5 A integral definida e a integração são assuntos tratados no capítulo 5. As duas primeiras secções envolvem a antidiferenciação. Uso o termo "antidiferenciação" em vez de "integração indefinida", mas a notação padrão $\int f(x)\,dx$ é conservada. Essa notação irá sugerir a existência de alguma relação entre integrais definidas e antiderivadas, mas não vejo nenhuma inconveniência nisso, pois a apresentação dá a visão teórica apropriada da integral definida como o limite de somas. Dois métodos numéricos para aproximar a integral definida são dados na secção final do capítulo. Esses procedimentos são importantes devido à sua adequação a computadores e calculadoras programáveis. O material sobre a aproximação de integrais definidas inclui o enunciado de teoremas sobre os limites do erro envolvido nessas aproximações. O capítulo também inclui uma secção sobre equações diferenciais com variáveis separáveis, e a discussão completa da área de uma região plana.

CAPÍTULO 6 Nesse capítulo introduzi aplicações de integral definida que esclarecem não apenas as técnicas de manipulação, mas também os princípios envolvidos. Em cada aplicação, as definições dos novos termos são intuitivamente motivadas e explicadas. O tratamento de volumes de sólidos, assunto das duas primeiras secções, foi revisado. A secção 6.1 começa com volumes apresentando secções planas, e depois volumes de sólidos de revolução por discos e anéis circulares são considerados como casos especiais de volumes por cortes. Volumes de sólidos de revolução por invólucros cilíndricos são discutidos na secção 6.2. Outra aplicação geométrica da integral definida é o comprimento de arco na secção 6.3. As secções restantes do capítulo são dedicadas a aplicações físicas incluindo centro de massa de barras e regiões planas, trabalho e pressão líquida.

CAPÍTULOS 7 e 8 Funções inversas são tratadas nas duas primeiras secções do capítulo 7, e as cinco secções seguintes são dedicadas às funções logarítmica e exponencial. A função logarítmica natural é definida primeiro e depois a função exponencial natural é definida como a sua inversa. Esse procedimento permite-nos dar um significado preciso a um expoente irracional de um número positivo. Em seguida definimos a função exponencial de base *a*, onde *a* é positivo e sua inversa é a função logarítmica de base *a*. Aplicações dessas funções incluem as leis do crescimento e decaimento, o crescimento limitado envolvendo a curva de aprendizado e a função densidade de probabilidade normal padrão. A secção 7.8, introduzida nesta edição, envolve a solução de equações diferenciais lineares de primeira ordem. No capítulo 8, as demais funções transcendentais (não-algébricas) são introduzidas. Essas são as funções trigonométricas inversas e as funções hiperbólicas.

CAPÍTULO 9 Técnicas de integração envolvem um aspecto computacional importante do Cálculo. São discutidas nesse capítulo que foi reduzido para oito secções nesta edição. Expliquei os fundamentos teóricos de cada método diferente, após uma motivação inicial. O domínio das técnicas de integração depende de exemplos, e usei, como ilustrações, problemas que o estudante certamente encontrará na prática. Duas outras aplicações de integração são introduzidas na secção 9.5: crescimento logístico, ocorrendo em Economia, Biologia e Sociologia; e a lei da ação de massas na Química.

CAPÍTULO 10 A ordem dos tópicos da Geometria Analítica nesse capítulo foi alterada nesta edição. As quatro primeiras secções pertencem a secções cônicas: a parábola, a elipse e a hipérbole. Cada uma dessas cônicas é introduzida pela indicação de como ela é formada ao interceptarmos um plano com um cone; então a definição analítica é dada e sua equação em coordenadas retangulares é obtida. As coordenadas polares e algumas de suas aplicações são apresentadas nas secções de 10.5 a 10.7. As equações polares das cônicas aparecem na secção 10.8, onde ocorrem como parte de um tratamento unificado de secções cônicas.

CAPÍTULO 11 Esse capítulo, "Formas Indeterminadas, Integrais Impróprias e a Fórmula de Taylor", foi posicionado de modo a preceder imediatamente as séries infinitas, onde muitos dos resultados são aplicados. As aplicações de integrais impróprias, que aparecem nas secções 11.3 e 11.4, incluem a função densidade de probabilidade, além de outras usadas em Geometria e Economia.

SÉRIES INFINITAS

CAPÍTULOS 12 e 13 O estudo de séries infinitas nesses dois capítulos é considerado como um segmento separado do curso, de forma a evidenciar que se trata de um conteúdo independente, que pode ser estudado quando se desejar, uma vez que o estudo do cálculo de funções de uma única variável tenha sido completado. O capítulo 12 é dedicado a seqüências e séries infinitas de termos constantes, e sua última secção apresenta um resumo de testes para convergências de uma série infinita. O capítulo 13 trata de séries infinitas de termos variáveis denominadas séries de potências. O conjunto de exercícios foi ampliado, em relação às edições anteriores, para incluir mais aplicações.

VETORES E FUNÇÕES DE MAIS DE UMA VARIÁVEL

CAPÍTULOS 14 e 15 Esses dois capítulos contêm o cálculo de vetores, bem como uma abordagem vetorial à Geometria Analítica dos Sólidos. As primeiras secções do capítulo 14 sobre vetores no plano podem ser estudadas após o capítulo 5, se você desejar estudar os vetores mais cedo, em seu curso. O capítulo 15 trata de vetores no espaço tridimensional e, se desejado, os tópicos das secções 15.1 e 15.2 podem ser estudados simultaneamente com os seus correspondentes no capítulo 14. As aplicações de vetores à Geometria, Física e Engenharia ocorrem em ambos os capítulos.

CAPÍTULOS 16, 17* e 18* A diferencial e o cálculo integral de funções de mais de uma variável são apresentados nesses três capítulos. Limites, continuidade, derivação parcial, diferenciabilidade e a diferencial total são discutidos no capítulo 16, onde as aplicações incluem taxas de variações e cálculos aproximados. No capítulo 17, uma secção sobre derivadas direcionais e gradientes é seguida por uma secção que mostra a aplicação do gradiente para encontrarmos uma equação do plano tangente à superfície. Outras aplicações de derivadas parciais no capítulo 17 são a solução de problemas de extremos e os multiplicadores de Lagrange. As equações diferenciais exatas são resolvidas na secção 17.5. A integral dupla de uma função de duas variáveis e a integral tripla de uma função de três variáveis, juntamente com algumas aplicações à Física, Engenharia e Geometria, são tratadas no capítulo 18.

CAPÍTULO 19 O capítulo "Introdução ao Cálculo de Campos Vetoriais", recebeu um tratamento mais detalhado de Cálculo Vetorial. O conteúdo inclui integrais de linha e de superfície, o teorema de Green, o teorema da divergência de Gauss e o teorema de Stoke. A abordagem neste capítulo é intuitiva e são apresentadas aplicações à Física e à Engenharia.

---

* **N. do E.:** As secções 17.4, sobre funções implícitas e sua derivação, e 18.8, sobre mudança de variáveis e integrais múltiplas, foram especialmente elaboradas para a edição brasileira.

CAPÍTULO EXCLUSIVO PARA A EDIÇÃO BRASILEIRA

CAPÍTULO 20 Escrito pelo prof. Cyro Patarra, prof. do IME-USP, este capítulo sobre equações diferenciais foi especialmente concebido para atender às exigências do currículo das faculdades brasileiras. As suas secções apresentam os conceitos básicos das diferentes equações diferenciais e os métodos de resolução.

SECÇÕES SUPLEMENTARES

Dez secções, que aparecem no final de alguns capítulos, são designadas como suplementares. Esses tópicos independentes podem ser estudados ou omitidos sem afetar o entendimento da matéria subseqüente. As secções suplementares são de dois tipos. Algumas apresentam material adicional que não faz necessariamente parte do conteúdo tradicional de um curso de Cálculo: as secções 4.10, 6.7, 7.8, 8.5, 9.8, 10.9, 14.8. Outras incluem discussões teóricas, inserindo provas de alguns teoremas: as secções 2.9, 2.10 e 16.8. Ambos os tipos aumentam a flexibilidade do texto.

EXEMPLOS E ILUSTRAÇÕES

Os exemplos e ilustrações — quase 1.000 no total — aparecem em todas as secções. Os exemplos, que foram cuidadosamente escolhidos para preparar os estudantes para os exercícios, deveriam ser usados como modelos para suas soluções. Uma ilustração é utilizada para demonstrar um conceito particular, uma definição ou teorema; é um protótipo da idéia apresentada.

EXERCÍCIOS

Há, agora, mais de 7.400 exercícios, revisados e ordenados de acordo com o grau de dificuldade, para propiciar uma ampla variedade de tipos, abrangendo desde problemas téoricos e aplicados, até aqueles que são computacionais. Eles aparecem no final das secções e como exercícios de revisão seguindo a última secção de cada capítulo. As respostas aos exercícios de número ímpar são dadas no final do livro.

GRÁFICOS TRIDIMENSIONAIS

Para atender às necessidades dos estudantes de ter uma apresentação de gráficos tridimensionais mais moderna e fácil de visualizar, mais de 200 figuras fazem parte desta nova edição. Muitas delas foram geradas por computadores, para assegurar a precisão matemática. Essas figuras, que os instrutores acharão mais claras que o estilo de sólidos geométricos feitos com aerógrafo na edição anterior e nos textos mais antigos, foram criadas com auxílio do programa Mathematica e o uso de *Illustrator 88*.

Louis Leithold.

Agradecimentos

Aos professores que mais me influenciaram:

Florence Balensiefer; Inglês, Lowell High Scholl, São Francisco
Ivan Barker; Matemática, Lowell High Schooll, São Francisco
Alan McKeever; Jornalismo, Lowell High Scholl, São Francisco
Benjamin Bernstein; Matemática, University of California, Berkeley
Pauline Sperry; Matemática, University of California, Berkeley
Virginia Wakerling; Matemática, University of California, Berkeley

Aos que foram meus alunos em:

Phoenix College; California State University, Los Angeles; University of Southern California; Open University of Great Britain; Pepperdine University

Aprendi com todos eles.

Aos revisores da edição americana:

Peter P. Andre, United States Naval Academy; Leon E. Arnold, Delaware County Community College; Harold R. Bennett, Texas Tech University; Michael L. Berry, West Virginia Wesleyan College; John Broughton, Indiana University of Pennsylvania; Floyd A. Cohen, California State University, Long Beach; Joel Davis, Oregon State University; K. Joe Davis, East Carolina University; N. J. DeLillo, Manhattan College; William A. Echols, Houston Community College; John Garlow, Tarrant Country Junior College; Stuart Goldenberg, California Polytechnic State University, San Luis Obispo; Joel K. Haack, Oklahoma State University; Norvin Holm, Charles S. Mott Community College; Roy A. Johnson, Washington State University; Dan Kemp, South Dakota State University; Joh Klippert, James Madison University; Walter F. Martens, University of Alabama, Birmingham; Roger B. Nelsen, Lewis and Clark College; William L. Perry, Texas A&M University; Walter A. Rosenkrantz, University of Massachusetts, Amherst; Daniel B. Shapiro, Ohio State University; Charles R. Stone, Dekalb College; Jere Strickland, James H. Faulkner State Junior College; Richard B. Thompson, University of Arizona; G. B. Turney, University of Texas, Arlington; J. Terry Wilson, San Jacinto College; Richard M. Witt, University of Wisconsin-Eau Claire

Aos que auxiliaram na resolução dos exercícios:

Leon Gerber, St. John's University; Gloria Langer, University of Colorado

A essas pessoas e a todos aqueles que usaram as primeiras edições e sugeriram mudanças, expresso a minha profunda admiração.

Um Pouco de História

Algumas idéias do Cálculo podem ser encontradas nos trabalhos dos matemáticos gregos da Antiguidade, da época de Arquimedes (287-212 A.C.) e em trabalhos do início do século dezessete por René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), John Wallis (1616-1703) e Isaac Barrow (1630-1677). Entretanto, a invenção do Cálculo é frequentemente atribuída a Sir Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) pois eles começaram a efetuar a generalização e unificação do assunto. Havia outros matemáticos do século dezessete e dezoito que contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo; alguns deles foram Jakob Bernoulli (1654-1705), Johann Bernoulli (1667-1748), Leonhard Euler (1707-1783) e Joseph L. Lagrange (1736-1813). No entanto, não foi antes do século dezenove que os processos do Cálculo receberam fundamentação sólida por parte de matemáticos como Bernhard Bolzano (1781-1848), Augustin L. Cauchy (1789-1857), Karl Weierstrass (1815-1897) e Richard Dedekind (1831-1916).

UM

Números Reais, Funções e Gráficos

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Aprender Cálculo pode ser sua experiência educacional mais empolgante e estimulante pois é a base para quase toda a Matemática e para muitas das grandes realizações no mundo moderno. Você deverá iniciar o estudo de Cálculo com o conhecimento de certos conceitos matemáticos. Em primeiro lugar, pressupõe-se que você possua conhecimentos de Álgebra e Geometria, do primeiro e do segundo graus. Além disso, existem tópicos que são de extrema importância. Talvez você já os tenha estudado em algum curso de Matemática; senão, você terá um primeiro contato com eles neste capítulo.

Você precisa ter familiaridade com fatos sobre os *números reais* e fazer operações envolvendo desigualdades com desenvoltura; esse material será o objeto da primeira secção. As três secções a seguir contêm uma introdução a algumas noções de *Geometria Analítica* que serão necessárias posteriormente.

Função é um dos conceitos básicos em Cálculo e será definida aqui como um conjunto de pares ordenados. Essa idéia é usada para enfatizar o conceito de função como uma correspondência entre conjuntos de números reais. A notação de função, tipos de funções e operações com funções também serão discutidos na Secção 1.4, enquanto os gráficos de funções serão tratados na Secção 1.5.

Provavelmente você já tenha estudado *funções trigonométricas* em algum curso anterior, mas uma revisão das definições básicas será apresentada na Secção 1.6. Há também uma aplicação da função tangente à inclinação de uma reta.

Dependendo de seu preparo, esse capítulo poderá ser estudado em detalhes, ser tratado como uma revisão ou omitido.

1.1 NÚMEROS REAIS E DESIGUALDADES

O **sistema numérico real** consiste em um conjunto de elementos chamados de **números reais** e duas operações denominadas **adição** e **multiplicação**, denotadas pelos símbolos + e $\cdot$, respectivamente. Se a e b forem elementos do conjunto R, $a + b$ denotará a **soma** de a e b e $a \cdot b$ (ou ab) denotará o seu **produto**. A operação de subtração é definida pela igualdade

$$a - b = a + (-b)$$

onde $-b$ denota o **negativo** de b, tal que $b + (-b) = 0$. A operação de **divisão** é definida pela igualdade

$$a \div b = a \cdot b^{-1} \qquad b \neq 0$$

onde b^{-1} denota o **recíproco** de b, tal que $b \cdot b^{-1} = 1$.

O sistema numérico real pode ser inteiramente descrito por um conjunto de axiomas (a palavra **axioma** é usada para indicar uma afirmação formal considerada verdadeira, dispensando provas). Com esses axiomas podemos deduzir as propriedades dos números reais das quais seguem as operações algébricas de adição, subtração, multiplicação e divisão, bem como os conceitos algébricos de resolução de equações, fatoração e assim por diante.

As propriedades que podem ser obtidas como conseqüências lógicas dos axiomas são os **teoremas**. No enunciado da maioria dos teoremas existem duas partes: a parte do "se", chamada de **hipótese** e a parte do "então", chamada de **conclusão**. A argumentação que verifica a veracidade de um teorema é uma **demonstração** (ou **prova**), a qual consiste em mostrar que a conclusão é conseqüência de se admitir a hipótese como verdadeira.

Um número real é positivo, negativo ou zero e qualquer número real pode ser classificado como *racional* ou *irracional*. Um **número racional** é qualquer número que pode ser expresso como a razão de dois inteiros. Isto é, um número racional é da forma p/q, onde p e q são inteiros e $q \neq 0$. Os números racionais consistem em:

Os **inteiros** (positivos, negativos e zero)

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

As **frações** positivas e negativas, como

$$\tfrac{2}{7} \qquad -\tfrac{4}{5} \qquad \tfrac{83}{5}$$

Os **decimais que terminam** positivos e negativos, como

$$2{,}36 = \frac{236}{100} \qquad -0{,}003251 = -\frac{3.251}{1.000.000}$$

Os **decimais que não terminam mas apresentam repetição periódica**, como
$0{,}333\ldots = \frac{1}{3} \qquad -0{,}549549549\ldots = -\frac{61}{111}$

Os números reais que não são racionais são chamados de **números irracionais.** Esses são os decimais **que não terminam e não são periódicos**, por exemplo,

$$\sqrt{3} = 1{,}732\ldots \qquad \pi = 3{,}14159\ldots$$

Vamos usar na discussão a seguir a notação e terminologia da teoria dos conjuntos. A idéia de *conjunto* é usada amplamente em Matemática, sendo esse um conceito tão básico que dele não será dada aqui uma definição formal. Podemos dizer que um *conjunto* é uma coleção de objetos e os objetos de um conjunto são chamados de **elementos**. Se todo elemento de um conjunto S for também elemento de um conjunto T, então S será um **subconjunto** de T. Em Cálculo estamos interessados no conjunto R dos números reais. Dois exemplos de subconjuntos de R são o conjunto N dos números naturais (os inteiros positivos) e o conjunto Z dos inteiros.

Vamos usar o símbolo $\in$ para indicar que um determinado elemento pertence a um conjunto. Assim, podemos escrever que $8 \in N$, e lemos: "8 é um elemento de N". A notação a, $b \in S$ indica que ambos a e b são elementos de S. O símbolo $\notin$ indica "não é um elemento de". Assim, entendemos $\frac{1}{2} \notin N$ como "$\frac{1}{2}$ não é um elemento de N".

Um par de chaves { } usadas para delimitar palavras ou símbolos pode descrever um conjunto. Se S for o conjunto dos números naturais menores do que 6, podemos escrever o conjunto S como

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Podemos também escrever o conjunto S como

$$\{x, \text{ tal que } x \text{ seja um número natural menor do que } 6\}$$

onde o símbolo x é chamado de *variável*. Uma **variável** é um símbolo usado para representar qualquer elemento de um conjunto dado. Outra maneira de escrever o conjunto S acima é usar a chamada **notação construtiva de conjunto,** onde uma barra vertical é usada em lugar das palavras *tal que*:

$$\{x \mid x \text{ seja um número natural menor do que } 6\}$$

que lemos: "o conjunto de todos os x, tal que x seja um número natural menor do que 6".

Dois conjuntos A e B serão **iguais**, e escrevemos $A = B$, se A e B tiverem elementos idênticos. A **união** de dois conjuntos A e B, denotada por $A \cup B$, que lemos "A união B", é o conjunto de todos os elementos que estão em A ou em B, ou em ambos. A **intersecção** de A e B, denotada por $A \cap B$, que lemos "A intersecção B", é o conjunto dos elementos que estão em A e B. O conjunto que não contém nenhum elemento é chamado de **conjunto vazio**, sendo denotado por $\varnothing$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Suponha $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B = \{1, 4, 9, 16\}$, e $C = \{2, 10\}$. Então

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 16\} \qquad A \cap B = \{4\}$$
$$B \cup C = \{1, 2, 4, 9, 10, 16\} \qquad B \cap C = \varnothing$$ ◀

Há uma ordenação para o conjunto R através de uma relação denotada pelos símbolos $<$ (lemos "é menor do que") e $>$ (lemos "é maior do que").

1.1.1 DEFINIÇÃO

Se a, $b \in R$,

(i) $a < b$ se e somente se $b - a$ for positivo;
(ii) $a > b$ se e somente se $a - b$ for positivo.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2**

$3 < 5$ pois $5 - 3 = 2$, e 2 é positivo
$-10 < -6$ pois $-6 - (-10) = 4$, e 4 é positivo
$7 > 2$ pois $7 - 2 = 5$, e 5 é positivo
$-2 > -7$ pois $-2 - (-7) = 5$, e 5 é positivo
$\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ pois $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$, e $\frac{1}{12}$ é positivo ◀

Vamos definir agora os símbolos $\leqslant$ (lemos "é menor do que ou igual a") e $\geqslant$ (lemos "é maior do que ou igual a").

1.1.2 DEFINIÇÃO

Se a, $b \in R$,

(i) $a \leqslant b$ se e somente se for válida qualquer uma das duas relações $a < b$ ou $a = b$;
(ii) $a \geqslant b$ se e somente se for válida qualquer uma das duas relações $a > b$ ou $a = b$.

As afirmações $a < b$, $a > b$, $a \leqslant b$ e $a \geqslant b$ são chamadas de **desigualdades**. Especificando, $a < b$ e $a > b$ são chamadas de desigualdades **estritas**, enquanto que $a \leqslant b$ e $a \geqslant b$ são denominadas desigualdades **não-estritas**.

O teorema a seguir decorre imediatamente da Definição 1.1.1.

1.1.3 TEOREMA

(i) $a > 0$ se e somente se a for positivo;
(ii) $a < 0$ se e somente se a for negativo.

Um número x está **entre** a e b se $a < x$ e $x < b$. Podemos escrever isso como uma **seqüência de desigualdades**, da seguinte forma:

$a < x < b$

Outra seqüência de desigualdades é

$a \leqslant x \leqslant b$

que significa que acontecem ambas as desigualdades $a \leqslant x$ e $x \leqslant b$. Outras seqüências de desigualdades são $a \leqslant x < b$ e $a < x \leqslant b$.

O teorema a seguir pode ser provado usando os axiomas sobre o conjunto R e os teoremas de 1.1.1 a 1.1.3.

1.1.4 TEOREMA

(i) Se $a > 0$ e $b > 0$ então $a + b > 0$.
(ii) Se $a > 0$ e $b > 0$ então $ab > 0$.

A parte (i) do teorema acima estabelece que a soma de dois números positivos é positiva e a parte (ii) estabelece que o produto de dois números positivos é positivo.

1.1.5 TEOREMA
Propriedade Transitiva da Ordem

Se a, b, $c \in R$, e
se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Se $x < 5$ e $5 < y$, então, pela propriedade transitiva da ordem, decorre $x < y$. ◀

1.1.6 TEOREMA Suponhamos que $a, b, c \in R$.

(i) Se $a < b$ então $a + c < b + c$.
(ii) Se $a < b$ e $c > 0$ então $ac < bc$.
(iii) Se $a < b$ e $c < 0$ então $ac > bc$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** (a) Se $x < y$, segue, do Teorema 1.1.6(i), que $x + 4 < y + 4$. Por exemplo, $3 < 9$; assim $3 + 4 < 9 + 4$ ou, equivalentemente, $7 < 13$. Além disso, se $x < y$, então $x - 11 < y - 11$. Por exemplo, $3 < 9$; assim $3 - 11 < 9 - 11$ ou, equivalentemente, $-8 < -2$.

(b) Se $x < y$, segue do Teorema 1.1.6(ii) que $7x < 7y$. Por exemplo, como $5 < 8$, então $7 \cdot 5 < 7 \cdot 8$ ou, equivalentemente, $35 < 56$.

(c) Como $4 < 6$, então se $z < 0$, segue do Teorema 1.1.6(iii) que $4z > 6z$. Por exemplo, como $4 < 6$, então $4(-3) > 6(-3)$ ou, equivalentemente, $-12 > -18$. ◀

A parte (ii) do Teorema 1.1.6 estabelece que se ambos os membros de uma desigualdade forem multiplicados por um número positivo, o sentido da desigualdade permanecerá inalterado, enquanto que a parte (iii) estabelece que se ambos os membros de uma desigualdade forem multiplicados por um número negativo, o sentido da desigualdade será invertido. As partes (ii) e (iii) também são válidas para a divisão, pois dividir ambos os membros de uma desigualdade por um número $d(d \neq 0)$ é equivalente a multiplicá-los por $\frac{1}{d}$.

1.1.7 TEOREMA Se $a < b$ e $c < d$ então $a + c < b + d$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** Se $x < 8$ e $y < -3$, então temos, pelo Teorema 1.1.7, que $x + y < 8 + (-3)$; isto é, $x + y < 5$. ◀

Vamos impor ao conjunto R a condição chamada de **axioma do completamento** (Axioma 12.2.5). O enunciado desse axioma será adiado até a Secção 12.2, pois requer uma terminologia que será melhor introduzida e discutida mais adiante. Entretanto, daremos agora uma interpretação geométrica do conjunto dos números reais, associando-os aos pontos de uma reta, chamada **eixo**. O axioma do completamento garante que existe uma correspondência um a um, ou seja, biunívoca, entre o conjunto R e o conjunto de pontos de um eixo.

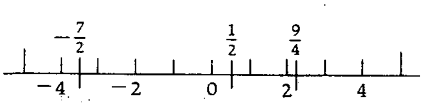


FIGURA 1

Veja a Figura 1, onde o eixo é uma reta horizontal. Um ponto do eixo é escolhido para representar o número 0. Esse ponto é chamado de **origem**. Uma unidade de distância é escolhida. Então, cada número positivo x é representado pelo ponto localizado a uma distância de x unidades à direita da origem, e cada número negativo x é representado pelo ponto localizado a uma distância de $-x$ unidades à esquerda da origem (note que se x for negativo, então $-x$ será positivo). A cada número real corresponde um único ponto sobre o eixo e a cada ponto sobre o eixo está associado um único número real; logo, há uma correspondência biunívoca entre R e os pontos do eixo. Assim, os pontos do eixo são identificados com os números que eles representam, e o mesmo símbolo será usado tanto para o número como para o ponto sobre o eixo que representa o número. Identificamos R como o eixo, que por sua vez é chamado de **reta numérica real**.

Vemos que $a < b$ se e somente se o ponto que representa o número a estiver à esquerda do ponto que representa o número b. Da mesma forma, $a > b$ se e somente se o ponto que representa a estiver à direita do ponto que representa

b. Por exemplo, o número 2 é menor do que o número 5 e o ponto 2 está à esquerda do ponto 5. Poderíamos escrever também $5 > 2$ e dizer que o ponto 5 está à direita do ponto 2.

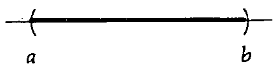


FIGURA 2

O conjunto de todos os números x que satisfazem a seqüência de desigualdades $a < x < b$ é chamado de **intervalo aberto**, sendo denotado por (a, b). Logo

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

FIGURA 3

O **intervalo fechado** de a até b é o intervalo aberto (a, b) mais os dois pontos extremos a e b, sendo denotado por $[a, b]$. Assim

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

A Figura 2 ilustra o intervalo aberto (a, b), e a Figura 3 ilustra o intervalo fechado $[a, b]$.

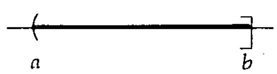


FIGURA 4

O **intervalo semi-aberto à esquerda** é o intervalo aberto (a, b), mais o extremo direito b. É denotado por $(a, b]$; assim

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$$

FIGURA 5

Definimos **intervalo semi-aberto à direita** de forma análoga e o denotamos por $[a, b)$. Assim

$$[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$$

A Figura 4 ilustra o intervalo $(a, b]$ e a Figura 5 ilustra o intervalo $[a, b)$.

Usaremos o símbolo $+\infty$ (infinito positivo) e o símbolo $-\infty$ (infinito negativo); contudo, é necessário cuidado para não confundir esses símbolos com os números reais, pois eles não satisfazem as propriedades dos números reais. Temos os seguintes intervalos:

$$\begin{aligned}
(a, +\infty) &= \{x \mid x > a\} \\
(-\infty, b) &= \{x \mid x < b\} \\
[a, +\infty) &= \{x \mid x \geqslant a\} \\
(-\infty, b] &= \{x \mid x \leqslant b\} \\
(-\infty, +\infty) &= R
\end{aligned}$$

FIGURA 6

FIGURA 7

A Figura 6 ilustra o intervalo $(a, +\infty)$ e a Figura 7 ilustra o intervalo $(-\infty, b)$. Note que $(-\infty, +\infty)$ denota o conjunto de todos os números reais.

Para cada um dos intervalos (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$ e $(a, b]$ os números a e b são chamados de **extremos** do intervalo. O intervalo fechado $[a, b]$ contém ambos os extremos, enquanto que o intervalo aberto (a, b) não contém nenhum extremo. O intervalo $[a, b)$ contém o extremo esquerdo, mas não o direito, enquanto que o intervalo $(a, b]$ contém o extremo direito, mas não o esquerdo. Um intervalo aberto pode ser considerado como aquele que não contém nenhum extremo e o intervalo fechado pode ser considerado como aquele que contém ambos os extremos. Conseqüentemente, o intervalo $[a, +\infty)$ é considerado como fechado, pois contém o seu único extremo a. Da mesma forma, $(-\infty, b]$ é um intervalo fechado, enquanto que $(a, +\infty)$ e $(-\infty, b)$ são abertos. Os intervalos $[a, b)$ e $(a, b]$ não são fechados nem abertos. O intervalo $(-\infty, +\infty)$ não tem extremos, sendo considerado tanto aberto como fechado.

São usados intervalos para representar *conjuntos-soluções* de desigualdades. O **conjunto-solução** de uma desigualdade é o conjunto de todos os números que satisfazem a desigualdade.

EXEMPLO 1 Ache e mostre na reta numérica real o conjunto-solução da desigualdade

$$2 + 3x < 5x + 8$$

Solução As seguintes desigualdades são equivalentes

$$\begin{aligned} 2 + 3x &< 5x + 8 \\ 2 + 3x - 2 &< 5x + 8 - 2 \\ 3x &< 5x + 6 \\ -2x &< 6 \\ x &> -3 \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto-solução é o intervalo $(-3, +\infty)$, ilustrado na Figura 8.

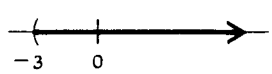


FIGURA 8

EXEMPLO 2 Ache e mostre na reta numérica real o conjunto-solução da desigualdade

$$4 < 3x - 2 \leqslant 10$$

Solução Adicionando 2 a cada membro da desigualdade obtemos desigualdades equivalentes

$$\begin{aligned} 6 &< 3x \leqslant 12 \\ 2 &< x \leqslant 4 \end{aligned}$$

Assim, o conjunto-solução é o intervalo $(2, 4]$, conforme ilustrado na Figura 9.

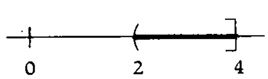


FIGURA 9

EXEMPLO 3 Ache e mostre na reta numérica real o conjunto-solução da desigualdade

$$\frac{7}{x} > 2$$

Solução Queremos multiplicar ambos os membros da desigualdade por x. Mas, o sentido da desigualdade resultante dependerá de x ser positivo ou negativo. Observe que se $x < 0$, então

$$\frac{7}{x} < 0$$

o que contradiz a desigualdade dada. Logo, precisamos considerar somente $x > 0$. Multiplicando ambos os membros da desigualdade dada por x, obtemos as seguintes desigualdades equivalentes:

$$\begin{aligned} 7 &> 2x \\ \tfrac{7}{2} &> x \\ x &< \tfrac{7}{2} \end{aligned}$$

O conjunto-solução da desigualdade é $\{x \mid x > 0\} \cap \{x \mid x < \frac{7}{2}\}$ ou, equivalentemente, $\{x \mid 0 < x < \frac{7}{2}\}$, que é o intervalo $(0, \frac{7}{2})$, conforme a Figura 10.

FIGURA 10

EXEMPLO 4 Ache e mostre na reta numérica real o conjunto-solução da desigualdade

$$\frac{x}{x - 3} < 4$$

Solução Para multiplicar ambos os membros da desigualdade por $x - 3$, precisamos considerar dois casos.

Caso 1: $x - 3 > 0$; isto é, $x > 3$.

Multiplicando ambos os membros da desigualdade por $(x - 3)$ obtemos

$$\begin{aligned} x &< 4x - 12 \\ -3x &< -12 \\ x &> 4 \end{aligned}$$

Assim, o conjunto-solução do Caso 1 é $\{x|x > 3\} \cap \{x|x > 4\}$ ou, equivalentemente, $\{x|x > 4\}$, que é o intervalo $(4, +\infty)$.

Caso 2: $x - 3 < 0$; isto é, $x < 3$.

Multiplicando ambos os membros da desigualdade por $(x - 3)$ e invertendo o sentido da desigualdade, temos

$$\begin{aligned} x &> 4x - 12 \\ -3x &> -12 \\ x &< 4 \end{aligned}$$

Logo, x deve ser menor do que 4 e também menor do que 3. Assim, o conjunto-solução do Caso 2 será o intervalo $(-\infty, 3)$.

Se os conjuntos-soluções para os Casos 1 e 2 forem combinados, obteremos $(-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$, que está ilustrado na Figura 11.

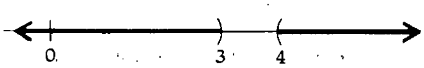


FIGURA 11

O conceito de *valor absoluto* de um número é usado em algumas definições importantes. Além disso, você precisará trabalhar com desigualdades envolvendo valores absolutos.

1.1.8 DEFINIÇÃO

O **valor absoluto** de x, denotado por $|x|$, é definido por

$$|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 6**

$$|3| = 3 \qquad \begin{aligned} |-5| &= -(-5) \\ &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} |8 - 14| &= |-6| \\ &= -(-6) \\ &= 6 \end{aligned}$$ ◀

Da definição, o valor absoluto de um número é um número positivo ou zero; isto é, não-negativo.

Em termos geométricos, o valor absoluto de um número x é sua distância ao 0. Em geral, $|a - b|$ é a distância entre a e b, sem levar em conta qual é o maior número. Veja a Figura 12.

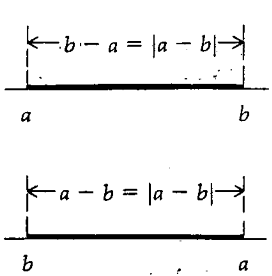


FIGURA 12

A desigualdade $|x| < a$, onde $a > 0$, estabelece que na reta numérica real a distância da origem até o ponto x é menor que a unidades; ou seja, $-a < x < a$. Portanto, x está no intervalo aberto $(-a, a)$. Veja a Figura 13. Parece então que o conjunto-solução de $|x| < a$ é $\{x| -a < x < a\}$. De fato, este é o caso estabelecido no teorema a seguir. A seta dupla é usada aqui e em todo o texto para indicar que as afirmações antes e depois dela são *equivalentes*.

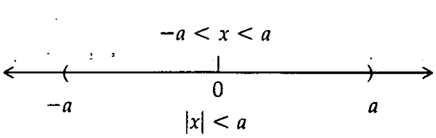


FIGURA 13

1.1.9 TEOREMA $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \quad$ onde $a > 0$

Prova Como $|x| = x$ se $x \geqslant 0$ e $|x| = -x$ se $x < 0$, segue que o conjunto-solução da desigualdade $|x| \leqslant a$ é a união dos conjuntos

$$\{x | x < a \text{ e } x \geqslant 0\} \text{ e } \{x | -x < a \text{ e } x < 0\}$$

Observe que o primeiro desses conjuntos é equivalente a $\{x | 0 \leqslant x < a\}$, e o segundo é equivalente a $\{x | -a < x < 0\}$ pois $-x < a$ é equivalente a $x > -a$. Assim, o conjunto-solução de $|x| < a$ é

$$\{x | 0 \leqslant x < a\} \cup \{x | -a < x < 0\}$$

$$\Leftrightarrow \{x | -a < x < a\}$$

Comparando a desigualdade dada e o seu conjunto-solução, concluímos que

$$|x| < a \quad \Leftrightarrow \quad -a < x < a$$ ■

1.1.10 COROLÁRIO $|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a \quad$ onde a > 0

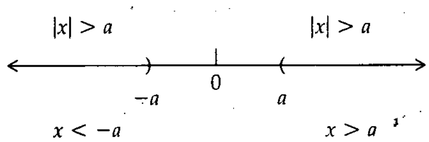


FIGURA 14

A desigualdade $|x| > a$, onde $a > 0$, estabelece que na reta numérica real a distância da origem ao ponto x é maior que a unidades; isto é, $x > a$ ou $x < -a$. Portanto, x está em $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$. Veja a Figura 14. Assim, parece que o conjunto-solução de $|x| > a$ é $\{x | x > a\} \cup \{x | x < -a\}$. O teorema a seguir estabelece que é esse o caso. Você deverá prová-lo no Exercício 61.

1.1.11 TEOREMA $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ ou $x < -a \quad$ onde $a > 0$

1.1.12 COROLÁRIO $|x| \geqslant a \Leftrightarrow x \geqslant a$ ou $x \leqslant -a \quad$ onde $a > 0$

Os exemplos a seguir ilustram a solução de equações e desigualdades envolvendo valores absolutos.

EXEMPLO 5 Resolva cada uma das equações para x: (a) $|3x + 2| = 5$; (b) $|2x - 1| = |4x + 3|$; (c) $|5x + 4| = -3$.

Solução

(a) $|3x + 2| = 5$

Essa equação será satisfeita se

$$3x + 2 = 5 \quad \text{ou} \quad -(3x + 2) = 5$$
$$x = 1 \qquad\qquad x = -\tfrac{7}{3}$$

(b) $|2x - 1| = |4x + 3|$

Essa equação será satisfeita se

$$2x - 1 = 4x + 3 \quad \text{ou} \quad 2x - 1 = -(4x + 3)$$
$$x = -2 \qquad\qquad x = -\tfrac{1}{3}$$

(c) $|5x + 4| = -3$

Como o valor absoluto de um número não pode ser negativo nunca, essa equação não tem solução.

EXEMPLO 6 Ache e mostre na reta numérica real o conjunto-solução da inequação

$$|x - 5| < 4$$

Solução Do Teorema 1.1.9, as seguintes desigualdades são equivalentes:

$$|x - 5| < 4$$
$$-4 < x - 5 < 4$$
$$1 < x < 9$$

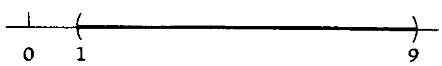


FIGURA 15

Assim, o conjunto-solução da inequação dada é o intervalo aberto (1, 9), que está ilustrado na Figura 15.

EXEMPLO 7 Ache o conjunto-solução da inequação

$$|3x + 2| > 5$$

Solução Pelo Teorema 1.1.11, a inequação dada é equivalente a

$$3x + 2 > 5 \quad \text{ou} \quad 3x + 2 < -5$$

Isto é, a inequação dada estará satisfeita se qualquer uma das desigualdades acima for satisfeita.

Considerando a primeira inequação, temos que

$$3x + 2 > 5$$
$$x > 1$$

Logo, todo número no intervalo $(1, +\infty)$ é uma solução.

Da segunda inequação

$$3x + 2 < -5$$
$$x < -\tfrac{7}{3}$$

Assim, todo número no intervalo $(-\infty, -\frac{7}{3})$ é uma solução.

O conjunto-solução da inequação dada é, portanto, $(-\infty, -\frac{7}{3}) \cup (1, +\infty)$.

Você deve-se lembrar da Álgebra que o símbolo $\sqrt{a}$, onde $a \geqslant 0$, é definido como o único número *não-negativo* x, tal que $x^2 = a$. Lemos $\sqrt{a}$ como "a raiz quadrada principal de a". Por exemplo,

$$\sqrt{4} = 2 \qquad \sqrt{0} = 0 \qquad \sqrt{\tfrac{9}{25}} = \tfrac{3}{5}$$

Nota: $\sqrt{4} \neq -2$ mesmo que $(-2)^2 = 4$, pois $\sqrt{4}$ denota somente a raiz quadrada *positiva* de 4. A raiz quadrada *negativa* de 4 é designada por $-\sqrt{4}$.

Como estamos interessados somente em números reais neste livro, $\sqrt{a}$ não está definida para $a < 0$.

EXEMPLO 8 Ache todos os valores de x para os quais $\sqrt{x^2 + 7x + 12}$ é real.

Solução

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

$$\sqrt{(x + 3)(x + 4)} \text{ é real quando } (x + 3)(x + 4) \geqslant 0$$

Vamos encontrar o conjunto-solução dessa inequação. A inequação estará satisfeita quando ambos os fatores forem não-negativos ou quando forem não-positivos, isto é, se $x + 3 \geqslant 0$ e $x + 4 \geqslant 0$, ou se $x + 3 \leqslant 0$ e $x + 4 \leqslant 0$. Consideraremos dois casos.

Caso 1: $x + 3 \geqslant 0$ e $x + 4 \geqslant 0$. Isto é,

$x \geqslant -3$ e $x \geqslant -4$

Ambas as desigualdades estarão satisfeitas para $x \geqslant -3$ ou seja, o intervalo $[-3, +\infty)$ é o conjunto-solução.

Caso 2: $x + 3 \leqslant 0$ e $x + 4 \leqslant 0$. Isto é,

$x \leqslant -3$ e $x \leqslant -4$

Ambas as desigualdades estarão satisfeitas para $x \leqslant -4$, ou seja, o intervalo $(-\infty, -4]$ é o conjunto-solução.

Se combinarmos os conjuntos-soluções dos Casos 1 e 2, teremos $(-\infty, -4] \cup [-3, +\infty)$.

Da definição de $\sqrt{a}$ segue que

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 7**

$$\sqrt{5^2} = |5| \qquad \sqrt{(-3)^2} = |-3|$$
$$= 5 \qquad\qquad = 3$$

◀

Os teoremas a seguir sobre valores absolutos serão úteis mais adiante.

1.1.13 TEOREMA Se $a, b \in R$, então

$$|ab| = |a| \cdot |b|$$

Prova

$$\begin{aligned} |ab| &= \sqrt{(ab)^2} \\ &= \sqrt{a^2b^2} \\ &= \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} \\ &= |a| \cdot |b| \end{aligned}$$

■

1.1.14 TEOREMA Se $a, b \in R$ e $b \neq 0$,

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

A demonstração do Teorema 1.1.14 será deixada como exercício (veja o Exercício 62).

1.1.15 TEOREMA A Desigualdade Triangular Se $a, b \in R$, então

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

Prova Pela Definição 1.1.8, temos $a = |a|$ ou $a = -|a|$; assim

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a| \tag{1}$$

Da mesma forma,

$$-|b| \leqslant b \leqslant |b| \tag{2}$$

Das desigualdades (1) e (2) e do Teorema 1.1.7,

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|$$

Logo, do Corolário 1.1.10 segue que

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$ ■

O Teorema 1.1.15 tem dois corolários importantes que serão enunciados e provados a seguir.

1.1.16 COROLÁRIO Se $a, b \in R$, então

$$|a - b| \leqslant |a| + |b|$$

Prova

$$|a - b| = |a + (-b)| \leqslant |a| + |(-b)| = |a| + |b|$$ ■

1.1.17 COROLÁRIO Se $a, b \in R$, então

$$|a| - |b| \leqslant |a - b|$$

Prova

$$|a| = |(a - b) + b| \leqslant |a - b| + |b|$$

assim, subtraindo $|b|$ de ambos os membros da desigualdade, temos

$$|a| - |b| \leqslant |a - b|$$ ■

EXERCÍCIOS 1.1

Nos Exercícios de 1 a 22, ache a conjunto-solução da desigualdade dada a mostre-o na reta numérica real.

1. $5x + 2 > x - 6$
2. $3 - x < 5 + 3x$
3. $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} \leqslant 0$
4. $3 - 2x \geqslant 9 + 4x$
5. $13 \geqslant 2x - 3 \geqslant 5$
6. $-2 < 6 - 4x \leqslant 8$
7. $2 > -3 - 3x \geqslant -7$
8. $2 \leqslant 5 - 3x < 11$
9. $\frac{4}{x} - 3 > \frac{2}{x} - 7$
10. $\frac{5}{x} < \frac{3}{4}$
11. $\frac{1}{x+1} < \frac{2}{3x-1}$
12. $\frac{x+1}{2-x} < \frac{x}{3+x}$
13. $x^2 > 4$
14. $x^2 \leqslant 9$
15. $(x - 3)(x + 5) > 0$
16. $x^2 - 3x + 2 > 0$
17. $1 - x - 2x^2 \geqslant 0$
18. $x^2 + 3x + 1 > 0$
19. $4x^2 + 9x < 9$
20. $2x^2 - 6x + 3 < 0$
21. $\frac{1}{3x-7} \geqslant \frac{4}{3-2x}$
22. $x^3 + 1 > x^2 + x$

Nos Exercícios de 23 a 30, resolva em x.

23. $|4x + 3| = 7$
24. $|3x - 8| = 4$
25. $|5x - 3| = |3x + 5|$
26. $|x - 2| = |3 - 2x|$
27. $|7x| = 4 - x$
28. $2x + 3 = |4x + 5|$
29. $\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = 5$
30. $\left|\frac{3x+8}{2x-3}\right| = 4$

Nos Exercícios de 31 a 36, ache todos os valores de x para os quais o número é real.

31. $\sqrt{8x - 5}$
32. $\sqrt{x^2 - 16}$
33. $\sqrt{x^2 - 3x - 10}$
34. $\sqrt{2x^2 + 5x - 3}$
35. $\sqrt{x^2 - 5x + 4}$
36. $\sqrt{x^2 + 2x - 1}$

Nos Exercícios de 37 a 52, ache o conjunto-solução da desigualdade dada e mostre-o na reta numérica real.

37. $|x + 4| < 7$
38. $|2x - 5| < 3$
39. $|3x - 4| \leqslant 2$
40. $|3x + 2| \geqslant 1$
41. $|5 - x| > 7$
42. $|3 - x| < 5$
43. $|7 - 4x| \leqslant 9$
44. $|6 - 2x| \geqslant 7$
45. $|2x - 5| > 3$
46. $|x + 4| \leqslant |2x - 6|$
47. $|3x| > |6 - 3x|$
48. $|3 + 2x| < |4 - x|$
49. $|9 - 2x| \geqslant |4x|$
50. $|5 - 2x| \geqslant 7$
51. $\left|\frac{x+2}{2x-3}\right| < 4$
52. $\left|\frac{6-5x}{3+x}\right| \leqslant \frac{1}{2}$

Nos Exercícios de 53 a 56 resolva em x e escreva a resposta com a notação de valor absoluto.

53. $\dfrac{x-a}{x+a} > 0$

54. $\dfrac{a-x}{a+x} \geqslant 0$

55. $\dfrac{x-2}{x-4} > \dfrac{x+2}{x}$

56. $\dfrac{x+5}{x+3} < \dfrac{x+1}{x-1}$

57. Prove o Teorema 1.1.5.
58. Prove o Teorema 1.1.6(i).
59. Prove o Teorema 1.1.6(ii) e (iii).
60. Prove que se $x < y$, então $x < \frac{1}{2}(x + y) < y$.
61. Prove o Teorema 1.1.11.
62. Prove o Teorema 1.1.14.

1.2 RETAS E COORDENADAS

Os *pares ordenados* de números reais são importantes em nossas discussões. Quaisquer dois números reais formam um par, e quando a ordem de aparecimento do número é significativa, são chamados de **par ordenado**. Se x for o primeiro número real e y for o segundo, esse par ordenado será denotado por (x, y). Observe que o par ordenado $(3, 7)$ é diferente do par ordenado $(7, 3)$.

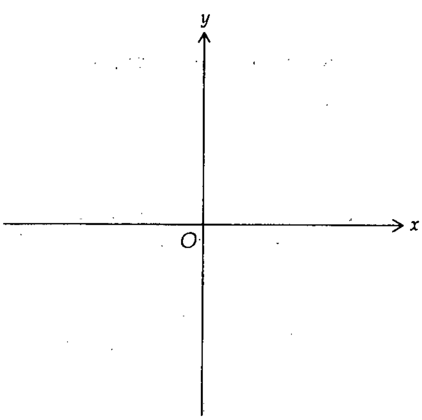


FIGURA 1

O conjunto de todos os pares de números reais é chamado de **plano numérico**, denotado por R^2, e cada par ordenado (x, y) será um **ponto** no plano numérico. Da mesma forma que podemos identificar R com os pontos de um eixo (um espaço unidimensional), podemos identificar R^2 com os pontos de um plano geométrico (um espaço bidimensional). O método usado em R^2 deve-se ao matemático francês René Descartes (1596-1650) a quem é atribuída a criação da Geometria Analítica em 1637. Uma reta horizontal é escolhida no plano geométrico, sendo chamada de **eixo x**. Uma reta vertical é escolhida, sendo denominada **eixo y**. O ponto de intersecção entre os eixos x e y é chamado de **origem**, sendo denotado pela letra O. Uma unidade de comprimento é escolhida. Usualmente a unidade de comprimento para os dois eixos é a mesma. Estabelecemos a direita da origem como sendo a parte positiva do eixo x; para o eixo y, a parte positiva fica acima da origem. Veja a Figura 1.

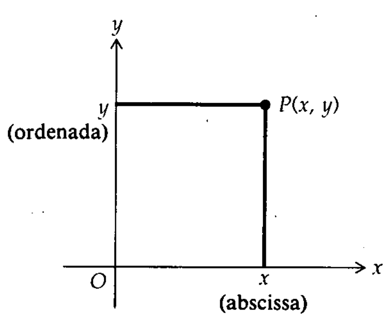


FIGURA 2

Associaremos um par ordenado de números reais (x, y) com um ponto no plano geométrico. No ponto x sobre o eixo horizontal e no ponto y sobre o eixo vertical, os segmentos de reta são desenhados perpendicularmente aos respectivos eixos. A intersecção desses dois segmentos de reta perpendiculares é o ponto P, associado ao par ordenado (x, y). Veja a Figura 2. O primeiro número x do par é chamado a **abscissa** (ou **coordenada x**) de P, e o segundo número y é chamado a **ordenada** (ou **coordenada y**) de P. Se a abscissa for positiva, P estará à direita do eixo y; e se for negativa, P estará à esquerda do eixo y. Se a ordenada for positiva, P estará acima do eixo x; e se for negativa, P estará abaixo do eixo x.

A abscissa e a ordenada de um ponto são denominadas **coordenadas cartesianas retangulares** do ponto. Há uma correspondência biunívoca entre os pontos em um plano geométrico e R^2; isto é, a cada ponto corresponde um único par ordenado (x, y) e a cada par ordenado (x, y) está associado um único ponto. Essa correspondência é denominada **sistema de coordenadas cartesianas retangulares**. A Figura 3 ilustra esse sistema onde são apresentados alguns pontos.

Os eixos x e y são chamados de **eixos coordenados**. Eles dividem o plano em quatro partes denominadas **quadrantes**. O primeiro quadrante é aquele no qual a abscissa e a ordenada são ambas positivas, isto é, o quadrante superior direito. Os outros quadrantes são numerados na direção anti-horária, ficando o quarto quadrante na parte inferior direita. Veja a Figura 4.

Dada a correspondência biunívoca, identificamos R^2 com o plano geométrico. Por essa razão, um par ordenado (x, y) é chamado de um *ponto*.

Vamos discutir agora o problema de encontrar a distância entre dois pontos em R^2. Se A for o ponto (x_1, y_1) e B for o ponto (x_2, y_1) (isto é, A e B têm a

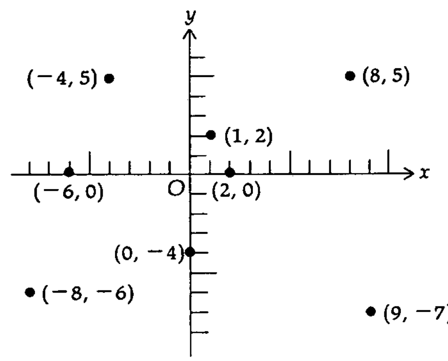


FIGURA 3

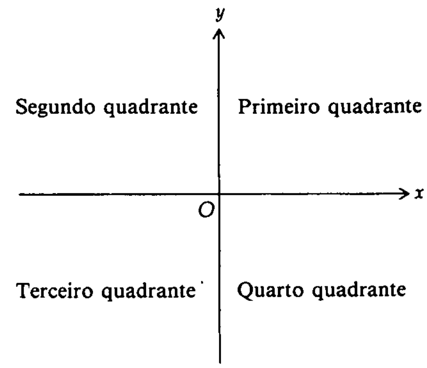
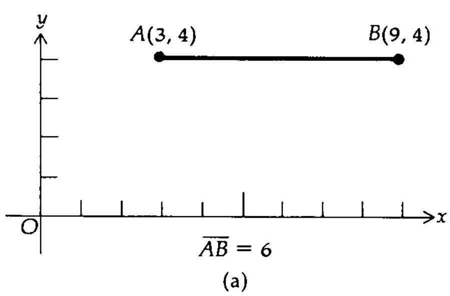


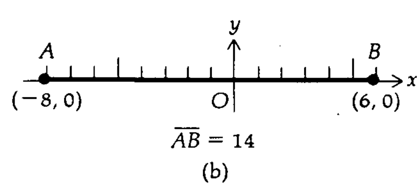
FIGURA 4

mesma ordenada, mas abscissas diferentes), então a **distância orientada** de A para B será denotada por $\overline{AB}$ e definimos

$$\boxed{\overline{AB} = x_2 - x_1}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Veja a Figura 5(a)-(c). Se A for o ponto (3, 4) e B for o ponto (9, 4), então $\overline{AB} = 9 - 3$; isto é $\overline{AB} = 6$. Se A for o ponto $(-8, 0)$ e B for o ponto (6, 0), então $\overline{AB} = 6 - (-8)$, ou seja, $\overline{AB} = 14$. Se A for o ponto (4, 2) e B for o ponto (1, 2), então $\overline{AB} = 1 - 4$; isto é, $\overline{AB} = -3$. Vemos que $\overline{AB}$ será positivo, se B estiver à direita de A e $\overline{AB}$ será negativo, se B estiver à esquerda de A. ◀





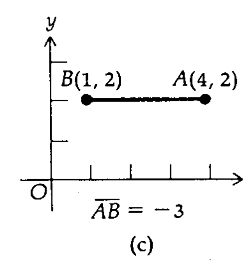


FIGURA 5

Se C for o ponto (x_1, y_1) e D for o ponto (x_1, y_2), então a distância orientada de C para D, denotada por $\overline{CD}$, será definida por

$$\boxed{\overline{CD} = y_2 - y_1}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Veja a Figura 6(a) e (b). Se C for o ponto $(1, -2)$ e D for o ponto $(1, -8)$, então $\overline{CD} = -8 - (-2)$, isto é, $\overline{CD} = -6$. Se C for o ponto $(-2, -3)$ e D for o ponto $(-2, 4)$ então $\overline{CD} = 4 - (-3)$; isto é, $\overline{CD} = 7$. O número $\overline{CD}$ será positivo se D estiver acima de C e $\overline{CD}$ será negativo se D estiver abaixo de C. ◀

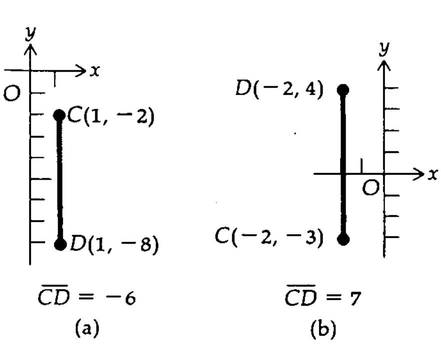


FIGURA 6

Observe que a terminologia *distância orientada* indica ao mesmo tempo a distância e um sentido (positivo ou negativo). Se estivermos interessados apenas no comprimento do segmento de reta entre os pontos P_1 e P_2 (isto é, na distância entre os pontos P_1 e P_2, sem levar em conta o sentido), então usaremos a terminologia *distância não-orientada*. Denotamos a **distância não-orientada** de P_1 a P_2 por $|\overline{P_1P_2}|$, que é um número não-negativo. Se usamos a palavra *distância* sem um adjetivo, *orientada* ou *não-orientada*, fica subentendido que queremos nos referir à distância não-orientada.

Queremos obter agora uma fórmula para calcular $|\overline{P_1P_2}|$ se $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ forem pontos quaisquer do plano. Usamos o teorema de Pitágoras da Geometria Plana, que é o seguinte:

> Num triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos é igual ao quadrado do comprimento da hipotenusa.

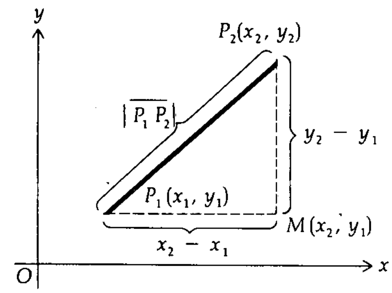


FIGURA 7

A Figura 7 mostra P_1 e P_2 no primeiro quadrante e o ponto $M(x_2, y_1)$. Note que $|\overline{P_1P_2}|$ é o comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo P_1MP_2. Usando o teorema de Pitágoras temos

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = |\overline{P_1M}|^2 + |\overline{MP_2}|^2$$
$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{|\overline{P_1M}|^2 + |\overline{MP_2}|^2}$$
$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Note que na fórmula acima não temos o símbolo $\pm$ na frente do radical do segundo membro, pois $|\overline{P_1P_2}|$ é um número não-negativo. A fórmula é verdadeira para todas as posições possíveis de P_1 e P_2 nos quatro quadrantes. O comprimento da hipotenusa é sempre $|\overline{P_1P_2}|$ e os comprimentos dos catetos são sempre $|\overline{P_1M}|$ e $|\overline{MP_2}|$. O resultado é enunciado como um teorema.

1.2.1 TEOREMA A distância entre dois pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ é dada por

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Observe que se P_1 e P_2 estiverem sobre uma mesma reta horizontal, então $y_1 = y_2$ e

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 0^2}$$
$$|\overline{P_1P_2}| = |x_2 - x_1| \qquad (\text{pois } \sqrt{a^2} = |a|)$$

Além disso, se P_1 e P_2 estiverem sobre uma mesma reta vertical, então $x_1 = x_2$ e

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{0^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$|\overline{P_1P_2}| = |y_2 - y_1|$$

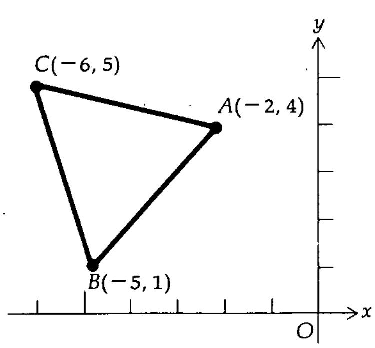


FIGURA 8

EXEMPLO 1 Mostre que o triângulo com vértices em $A(-2, 4)$, $B(-5, 1)$ e $C(-6, 5)$ é isósceles.

Solução O triângulo aparece na Figura 8.

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(-6 + 5)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17} \qquad |\overline{AC}| = \sqrt{(-6 + 2)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

Como $|\overline{BC}| = |\overline{AC}|$ o triângulo é isósceles.

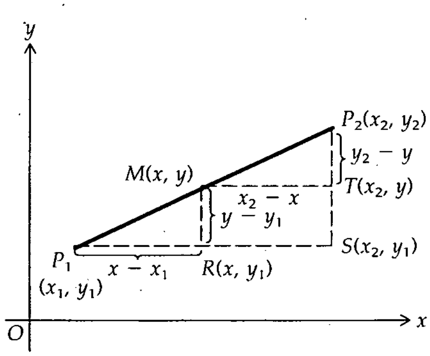


FIGURA 9

Se P_1 e P_2 são pontos extremos de um segmento de reta, denotamos esse segmento por P_1P_2. Isso não deve ser confundido com a notação $\overline{P_1P_2}$, a qual denota a distância orientada de P_1 a P_2. Ou seja, $\overline{P_1P_2}$ é um número, enquanto P_1P_2 é um segmento de reta. Veja a Figura 9, onde $M(x, y)$ é o ponto médio do segmento de reta de $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$. Como os triângulos P_1RM e MTP_2 são congruentes

$$|\overline{P_1R}| = |\overline{MT}| \quad \text{e} \quad |\overline{RM}| = |\overline{TP_2}|$$

Assim,

$$\begin{aligned} x - x_1 &= x_2 - x \qquad & y - y_1 &= y_2 - y \\ 2x &= x_1 + x_2 & 2y &= y_1 + y_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

Essas são as **fórmulas do ponto médio.** Em sua derivação supusemos que $x_2 > x_1$ e $y_2 > y_1$. As mesmas fórmulas são obtidas se usarmos qualquer ordenação desses números.

Em Geometria Analítica, a validade dos teoremas no plano geométrico é estabelecida com a aplicação de coordenadas e técnicas de Álgebra. O exemplo a seguir demonstra tal procedimento.

EXEMPLO 2 Prove analiticamente que os segmentos de reta que ligam os pontos médios dos lados opostos de um quadrilátero dividem ao meio um ao outro.

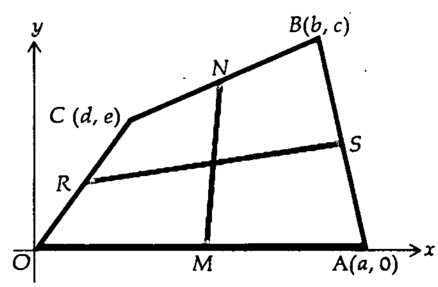


FIGURA 10

Solução Traçamos um quadrilátero geral. Como os eixos coordenados podem ser escolhidos em qualquer parte do plano e já que a escolha da posição dos eixos não afeta a veracidade do teorema, tomamos a origem em um vértice e o eixo x ao longo de um lado. Isso simplifica as coordenadas dos dois vértices no eixo x. Veja a Figura 10.

A hipótese e a conclusão do teorema são as seguintes:

Hipótese: O ABC é um quadrilátero. M é o ponto médio de OA, N é o ponto médio de CB, R é o ponto médio de OC e S é o ponto médio de AB.

Conclusão: MN e RS dividem-se ao meio.

Prova Para provar que dois segmentos de reta dividem-se ao meio, mostramos que eles têm o mesmo ponto médio. Das fórmulas do ponto médio, obtemos as coordenadas de M, N, R e S. M é o ponto $(\frac{1}{2}a, 0)$, N é o ponto $(\frac{1}{2}(b + d), \frac{1}{2}(c + e))$, R é o ponto $(\frac{1}{2}d, \frac{1}{2}e)$ e S é o ponto $(\frac{1}{2}(a + b), \frac{1}{2}c)$.

A abscissa do ponto médio de MN é $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(b + d)] = \frac{1}{4}(a + b + d)$.
A ordenada do ponto médio de MN é $\frac{1}{2}[0 + \frac{1}{2}(c + e)] = \frac{1}{4}(c + e)$.
Logo, o ponto médio de MN é o ponto $(\frac{1}{4}(a + b + d), \frac{1}{4}(c + e))$.
A abscissa do ponto médio de RS é $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}(a + b)] = \frac{1}{4}(a + b + d)$.
A ordenada do ponto médio de RS é $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}e + \frac{1}{2}c] = \frac{1}{4}(c + e)$.
Assim, o ponto médio de RS é o ponto $(\frac{1}{4}(a + b + d), \frac{1}{4}(c + e))$.

Logo, o ponto médio de MN coincide com o ponto médio de RS.
Então, MN e RS dividem-se ao meio. ■

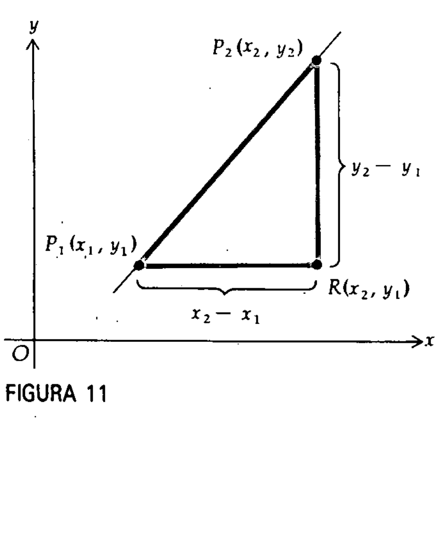


FIGURA 11

Discutiremos agora *retas* em R^2. Seja l uma reta vertical e $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ dois pontos distintos em l. A Figura 11 mostra tal reta. Na figura, R é o ponto (x_2, y_1), e os pontos P_1, P_2 e R são vértices de um triângulo-retângulo; além disso, $\overline{P_1R} = x_2 - x_1$ e $\overline{RP_2} = y_2 - y_1$. O número $y_2 - y_1$ dá a medida da variação na ordenada de P_1 a P_2 e pode ser positivo, negativo ou zero. O número $x_2 - x_1$ dá a medida da variação na abscissa de P_1 a P_2 e pode ser positivo ou negativo.

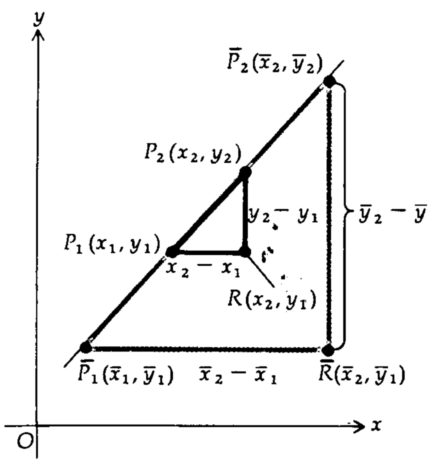


FIGURA 12

Como a reta l não é vertical, $x_2 \neq x_1$, e portanto, $x_2 - x_1$ não é zero. Seja

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{1}$$

O valor de m calculado pela fórmula acima é independente da escolha dos dois pontos P_1 e P_2 em l. Para mostrar isso, vamos escolher dois outros pontos $\overline{P}_1(\overline{x}_1, \overline{y}_1)$ e $\overline{P}_2(\overline{x}_2, \overline{y}_2)$ e calcular um número $\overline{m}$ usando (1).

$$\overline{m} = \frac{\overline{y}_2 - \overline{y}_1}{\overline{x}_2 - \overline{x}_1}$$

Mostraremos que $\overline{m} = m$. Veja a Figura 12. Os triângulos $\overline{P}_1\overline{R}\overline{P}_2$ e P_1RP_2 são semelhantes; assim sendo, os lados correspondentes são proporcionais. Logo

$$\frac{\overline{y}_2 - \overline{y}_1}{\overline{x}_2 - \overline{x}_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{ou} \quad \overline{m} = m$$

Assim, o valor de m calculado por (1) é único, não importando a escolha dos dois pontos em l. Esse número m é chamado de *inclinação* da reta.

1.2.2 DEFINIÇÃO

Se $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ forem dois pontos distintos sobre l, não paralela ao eixo y, então a **inclinação** de l, denotada por m, será dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Se multiplicarmos ambos os membros da equação acima por $x_2 - x_1$, obteremos

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

Segue dessa equação que se considerarmos uma partícula movendo-se ao longo de uma reta, a variação na ordenada da partícula será igual ao produto da inclinação pela variação na abscissa.

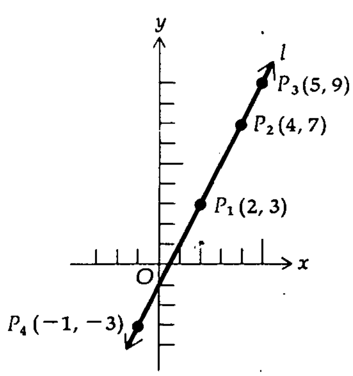


FIGURA 13

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Se l for a reta que passa pelos pontos $P_1(2, 3)$ e $P_2(4, 7)$ e m for a inclinação de l, então, pela Definição 1.2.2,

$$m = \frac{7 - 3}{4 - 2} = 2$$

Veja a Figura 13. Se uma partícula estiver movendo-se ao longo da reta l acima, a variação na ordenada será duas vezes a variação na abscissa. Isto é, se a partícula estiver em $P_2(4, 7)$ e a abscissa for aumentada em uma unidade, então a ordenada ficará aumentada em duas unidades e a partícula estará em P_3 (5, 9). Analogamente, se a partícula estiver em $P_1(2, 3)$ e a abscissa for diminuída em três unidades, então a ordenada ficará diminuída em seis unidades e a partícula estará em $P_4(-1, -3)$. ◀

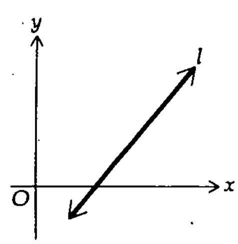


FIGURA 14

Se a inclinação de uma reta for positiva, então quando a abscissa de um ponto da reta aumentar, a ordenada também aumentará. Tal reta está na Figura 14. Na Figura 15 há uma reta cuja inclinação é negativa. Para essa reta, quando a abscissa aumentar, a ordenada diminuirá.

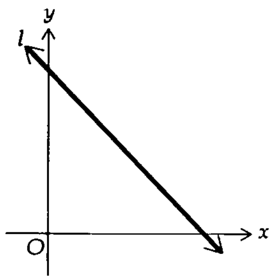


FIGURA 15

Se uma reta for paralela ao eixo x, então $y_2 = y_1$; assim, a inclinação da reta é zero. Se uma reta for paralela ao eixo y, $x_2 = x_1$; assim a fração $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ fica sem sentido, pois não podemos dividi-la por zero. É por essa razão que retas paralelas ao eixo y foram excluídas da definição de inclinação. Assim, a inclinação de uma reta vertical não é definida.

Por *equação de uma reta* queremos nos referir a uma equação que é satisfeita por aqueles, e somente aqueles pontos sobre a reta. Como um ponto $P_1(x_1, y_1)$ e uma inclinação m determinam uma reta única, será possível obter uma equação dessa reta. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer na reta exceto (x_1, y_1). Então, uma vez que a inclinação da reta que passa por P_1 e P é m, temos da definição de inclinação

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Essa equação é chamada **forma ponto-inclinação** da equação da reta. Resulta uma equação da reta, se sua inclinação e um ponto sobre a reta forem conhecidos.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Para encontrar a equação da reta por dois pontos $A(6, -3)$ e $B(-2, 3)$ calculamos primeiro m.

$$\begin{aligned} m &= \frac{3-(-3)}{-2-6} \\ &= \frac{6}{-8} \\ &= -\tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

Usando agora a forma ponto-inclinação da equação da reta onde consideramos A como P_1, temos

$$\begin{aligned} y - (-3) &= -\tfrac{3}{4}(x - 6) \\ 4y + 12 &= -3x + 18 \\ 3x + 4y - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Naturalmente, o ponto B pode ser tomado como P_1; nesse caso, temos

$$\begin{aligned} y - 3 &= -\tfrac{3}{4}(x + 2) \\ 4y - 12 &= -3x - 6 \\ 3x + 4y - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Se escolhermos o ponto $(0, b)$ (isto é, o ponto onde a reta intercepta o eixo y) como o ponto (x_1, y_1) em (1), teremos

$$y - b = m(x - 0)$$

$$\boxed{y = mx + b}$$

O número b, que é a ordenada do ponto onde a reta intercepta o eixo y, é chamado de **intercepto y** da reta. Conseqüentemente, a equação acima é a chamada **forma inclinação-intercepto** da equação da reta. Essa forma é extremamente útil, pois nos dá imediatamente a inclinação da reta. É importante também porque expressa a coordenada y de um ponto sobre a reta explicitamente, em termos da coordenada x.

EXEMPLO 3 Ache a inclinação da reta cuja equação é

$$6x + 5y - 7 = 0$$

Solução A equação é resolvida em y.

$$5y = -6x + 7$$

$$y = -\tfrac{6}{5}x + \tfrac{7}{5}$$

Essa equação está na forma inclinação-intercepto, onde $m = -\frac{6}{5}$.

Como a inclinação de uma reta vertical não é definida, não podemos aplicar a forma ponto-inclinação para obter sua equação. Em seu lugar, usamos o teorema a seguir, envolvendo o **intercepto *x*** da reta (a abscissa do ponto em que a reta intercepta o eixo x). O teorema também dá uma equação da reta horizontal.

1.2.3 TEOREMA

(i) Uma equação da reta vertical tendo x intercepto a é

$$x = a$$

(ii) Uma equação da reta horizontal tendo y intercepto b é

$$y = b$$

Prova (i) A Figura 16 mostra a reta vertical que intercepta o eixo x no ponto $(a, 0)$. Essa reta contém aqueles e somente aqueles pontos sobre a reta que têm a mesma abscissa. Assim, $P(x, y)$ será qualquer ponto sobre a reta se e somente se

$$x = a$$

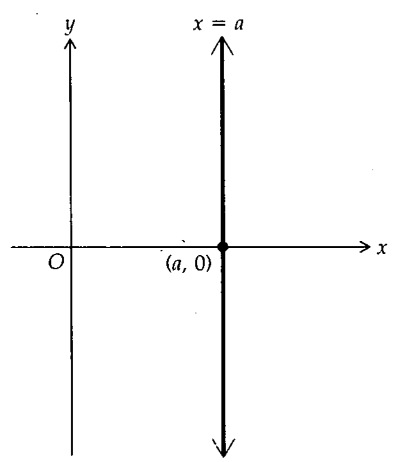


FIGURA 16

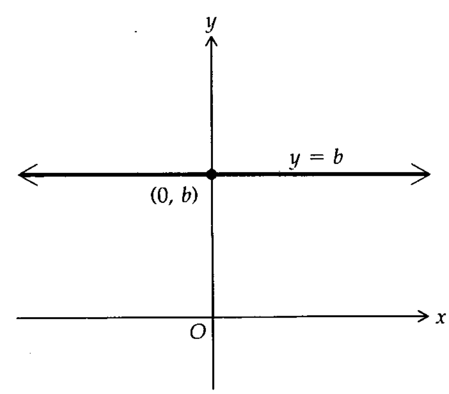


FIGURA 17

(ii) A reta horizontal que intercepta o eixo y no ponto $(0, b)$ aparece na Figura 17. Para essa reta, $m = 0$. Portanto, da forma intercepto-inclinação, uma equação dessa reta é

$$y = b$$ ■

Mostramos que uma equação de uma reta não-vertical é da forma $y = mx + b$, e uma equação de uma reta vertical é da forma $x = a$. Como cada uma dessas equações é um caso particular de uma equação da forma

$$Ax + By + C = 0 \qquad (2)$$

onde A, B e C são constantes, e A e B não são nulas, segue que toda reta possui uma equação da forma (2). O oposto desse fato é dado pelo Teorema 1.2.5, a seguir. Mas antes de enunciá-lo definiremos o *gráfico de uma equação.*

1.2.4 DEFINIÇÃO O **gráfico de uma equação** em R^2 é o conjunto de todos os pontos em R^2 cujas coordenadas são números que satisfazem a equação.

1.2.5 TEOREMA O gráfico da equação

$$Ax + By + C = 0$$

onde A, B e C são constantes e onde A e B não são ambos nulos, é uma linha reta.

A prova desse teorema é deixada como exercício. Veja o Exercício 57.

Como o gráfico de (2) é uma linha reta, é chamado de **equação linear**; sendo a equação geral do primeiro grau em x e y.

Uma vez que dois pontos determinam uma reta, para fazer o esboço do gráfico de uma reta precisamos apenas determinar as coordenadas de dois pontos dela, marcar os pontos no gráfico e então traçá-la. Qualquer par de pontos é suficiente, mas em geral convém marcar no gráfico os dois pontos onde a reta intercepta os dois eixos.

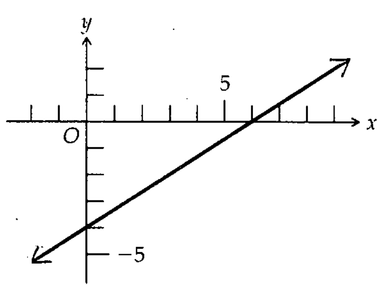


FIGURA 18

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** Para traçar o esboço da reta tendo a equação

$$2x - 3y = 12$$

primeiro achamos x intercepto a e y intercepto b. Na equação, substituimos $(a, 0)$ por (x, y) e obtemos $a = 6$. Substituindo $(0, b)$ por (x, y), obtemos $b = -4$. Assim, temos uma reta na Figura 18. ◀

A aplicação de inclinações é feita no teorema a seguir.

1.2.6 TEOREMA Se l_1 e l_2 forem duas retas distintas não-verticais, tendo inclinações m_1 e m_2, respectivamente, então l_1 e l_2 serão paralelas se e somente se $m_1 = m_2$.

Prova Sejam as equações de l_1 e l_2, respectivamente,

$$y = m_1x + b_1 \qquad \text{e} \qquad y = m_2x + b_2$$

Veja a Figura 19, que mostra duas retas interceptando o eixo y nos pontos $B_1(0, b_1)$ e $B_2(0, b_2)$. A reta vertical $x = 1$ intercepta l_1 no ponto $A_1\ (1, m_1 + b_1)$ e l_2 no ponto $A_2(1, m_2 + b_2)$. Então

$$|\overline{B_1B_2}| = b_2 - b_1 \qquad \text{e} \qquad |\overline{A_1A_2}| = (m_2 + b_2) - (m_1 + b_1)$$

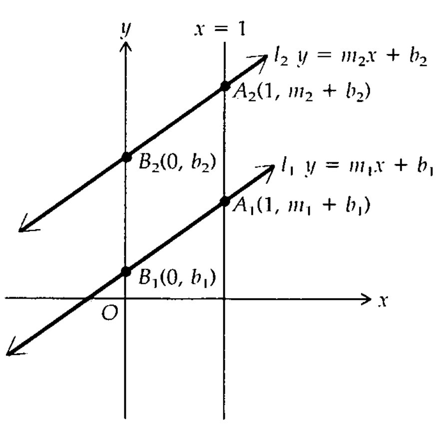


FIGURA 19

As duas retas serão paralelas se e somente se as distâncias verticais $|\overline{B_1B_2}|$ e $|\overline{A_1A_2}|$ forem iguais; ou seja, l_1 e l_2 serão paralelas se e somente se

$$b_2 - b_1 = (m_2 + b_2) - (m_1 + b_1)$$

$$b_2 - b_1 = m_2 + b_2 - m_1 - b_1$$

$$m_1 = m_2$$

Assim, l_1 e l_2 serão paralelas se e somente se $m_1 = m_2$. ■

▶ **ILUSTRAÇÃO 6** Seja l_1 a reta que passa pelos pontos $A(1, 2)$ e $B(3, -6)$ com inclinação m_1, e seja l_2 a reta que passa pelos pontos $C(2, -5)$ e $D(-1, 7)$ com inclinação m_2. Então

$$m_1 = \frac{-6-2}{3-1} \qquad m_2 = \frac{7-(-5)}{-1-2}$$
$$= \frac{-8}{2} \qquad\qquad = \frac{12}{-3}$$
$$= -4 \qquad\qquad = -4$$

como $m_1 = m_2$, segue que l_1 e l_2 são paralelas. Veja a Figura 20. ◀

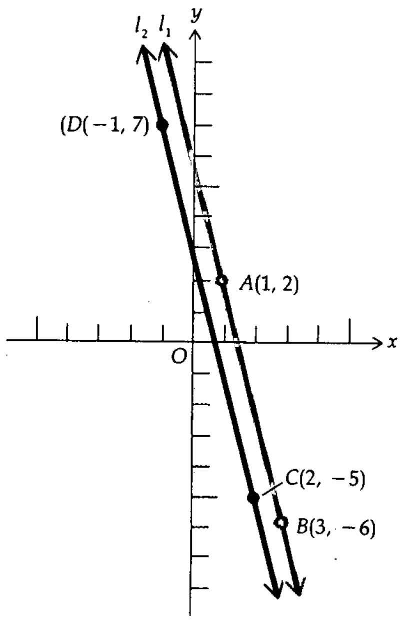


FIGURA 20

Dois pontos distintos quaisquer determinam uma reta. Três pontos distintos podem ou não estar na mesma reta. Se três ou mais pontos estiverem na mesma reta, eles serão denominados **colineares**. Assim, três pontos A, B e C serão colineares se e somente se a reta que passa pelos pontos A e B for a mesma que passa pelos pontos B e C. Como as retas que passam por A e B e por B e C contêm o ponto B em comum, elas serão a mesma reta se e somente se suas inclinações forem iguais.

EXEMPLO 4 Através das inclinações, determine se os pontos $A(-3, -4)$, $B(2, -1)$ e $C(7, 2)$ são colineares.

Solução Se m_1 for a inclinação da reta que passa por A e B e m_2 for a inclinação da reta que passa por B e C, então

$$m_1 = \frac{-1-(-4)}{2-(-3)} \qquad m_2 = \frac{2-(-1)}{7-2}$$
$$= \frac{3}{5} \qquad\qquad = \frac{3}{5}$$

Logo, $m_1 = m_2$. Assim sendo, as retas que passam por A e B e por B e C têm a mesma inclinação e o ponto B em comum. Assim elas coincidem e, portanto, são colineares.

Agora enunciaremos e provaremos um teorema considerando as inclinações de duas retas perpendiculares.

1.2.7 TEOREMA Duas retas não-verticais l_1 e l_2, com inclinações m_1 e m_2, respectivamente, serão perpendiculares se e somente se $m_1 m_2 = -1$.

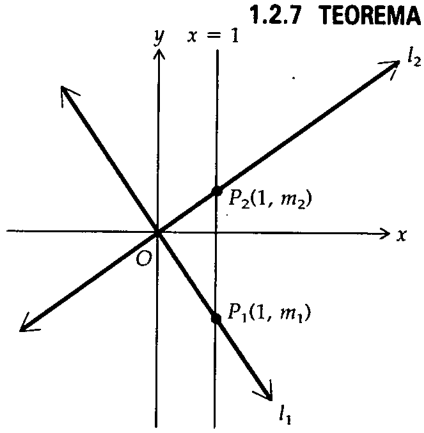


FIGURA 21

Prova Escolhemos os eixos coordenados de modo que a origem esteja no ponto de intersecção de l_1 e l_2. Veja a Figura 21. Como nem l_1 nem l_2 são verticais, essas duas retas interceptam a reta $x = 1$ nos pontos P_1 e P_2, respectivamente. A abscissa de ambos P_1 e P_2 é 1. Seja $\bar{y}$ a ordenada de P_1. Como l_1 contém os pontos $(0, 0)$ e $(1, \bar{y})$, sendo sua inclinação m_1, então

$$m_1 = \frac{\bar{y}-0}{1-0}$$

Assim, $\bar{y} = m_1$. Da mesma forma, podemos provar que a ordenada de P_2 é m_2. Aplicando o teorema de Pitágoras e seu oposto, o triângulo P_1OP_2 será um triângulo retângulo se e somente se

$$|\overline{OP_1}|^2 + |\overline{OP_2}|^2 = |\overline{P_1P_2}|^2 \tag{3}$$

Da fórmula da distância, obtemos

$$|\overline{OP_1}|^2 = (1-0)^2 + (m_1 - 0)^2 \qquad |\overline{OP_2}|^2 = (1-0)^2 + (m_2 - 0)^2$$
$$= 1 + m_1{}^2 \qquad\qquad = 1 + m_2{}^2$$
$$|\overline{P_1P_2}|^2 = (1-1)^2 + (m_2 - m_1)^2$$
$$= m_2{}^2 - 2m_1m_2 + m_1{}^2$$

Substituindo em (3) podemos concluir que P_1OP_2 é um triângulo retângulo se e somente se

$$1 + m_1{}^2 + 1 + m_2{}^2 = m_2{}^2 - 2m_1m_2 + m_1{}^2$$
$$2 = -2m_1m_2$$
$$m_1m_2 = -1$$

■

Como $m_1m_2 = -1$ é equivalente a

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{e} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

O Teorema 1.2.7 estabelece que duas retas não-verticais serão perpendiculares se e somente se a inclinação de uma delas for a recíproca negativa da inclinação da outra.

EXEMPLO 5 Dada a reta l com a equação

$$5x + 4y - 20 = 0$$

encontre uma equação da reta que passe pelo ponto $(2, -3)$ e (a) seja paralela a l e (b) seja perpendicular a l.

Solução Primeiro determinamos a inclinação de l, escrevendo sua equação na forma inclinação-intercepto. Resolvendo a equação para y, temos

$$4y = -5x + 20$$
$$y = -\tfrac{5}{4}x + 5$$

A inclinação de l é o coeficiente de x, que é $-\frac{5}{4}$.

(a) A inclinação de uma reta paralela a l também é $-\frac{5}{4}$. Como a reta requerida contém o ponto $(2, -3)$, usamos a forma ponto-inclinação, que resulta

$$y - (-3) = -\tfrac{5}{4}(x - 2)$$
$$4y + 12 = -5x + 10$$
$$5x + 4y + 2 = 0$$

(b) A inclinação de uma reta perpendicular a l é o negativo de $-\frac{5}{4}$, ou seja, $\frac{4}{5}$. Da forma ponto-inclinação, uma equação da reta que passa por $(2, -3)$, com inclinação $\frac{4}{5}$, é

$$y - (-3) = \tfrac{4}{5}(x - 2)$$
$$5y + 15 = 4x - 8$$
$$4x - 5y - 23 = 0$$

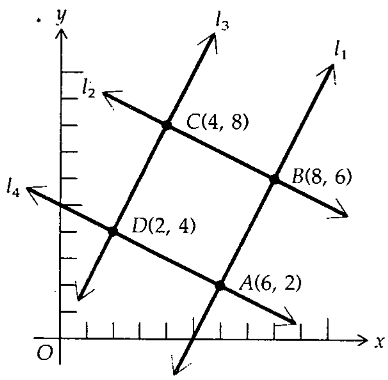


FIGURA 22

EXEMPLO 6 Prove, através das inclinações, que os quatro pontos $A(6, 2)$, $B(8, 6)$, $C(4, 8)$ e $D(2, 4)$ são os vértices de um retângulo.

Solução Veja a Figura 22, onde l_1 é a reta que passa por A e B, l_2 é a reta que passa por B e C, l_3 é a reta que passa por D e C e l_4 é a reta que passa por A e D; m_1, m_2, m_3 e m_4 são suas respectivas inclinações.

$$m_1 = \frac{6-2}{8-6} = 2 \qquad m_2 = \frac{8-6}{4-8} = -\tfrac{1}{2} \qquad m_3 = \frac{8-4}{4-2} = 2 \qquad m_4 = \frac{4-2}{2-6} = -\tfrac{1}{2}$$

Como $m_1 = m_3$, l_1 é paralela a l_3; e como $m_2 = m_4$, l_2 é paralela a l_4. Como $m_1 m_2 = -1$, l_1 e l_2 são perpendiculares. Portanto, o quadrilátero tem seus lados opostos paralelos e dois lados perpendiculares. Assim, o quadrilátero é um retângulo.

EXERCÍCIOS 1.2

Nos Exercícios de 1 a 6, coloque num gráfico o ponto P dado e cada um dos seguintes pontos:

(a) O ponto Q, tal que a reta que passa por P e Q seja perpendicular ao eixo x e o divida ao meio. Dê as coordenadas de Q.
(b) O ponto R, tal que a reta que passa por P e R seja perpendicular ao eixo y e o divida ao meio. Dê as coordenadas de R.
(c) O ponto S, tal que o segmento de reta que passa por P e por S seja dividido ao meio pela origem. Dê as coordenadas de S.
(d) O ponto T, tal que o segmento de reta que passa por P e T seja perpendicular e dividido pela reta que passa pela origem, formando um ângulo de 45° e dividindo o primeiro e o terceiro quadrantes. Dê as coordenadas de T.

1. $P(1, -2)$ **2.** $P(-2, 2)$ **3.** $P(2, 2)$
4. $P(-2, -2)$ **5.** $P(-1, -3)$ **6.** $P(0, -3)$

7. Prove que os pontos $A(-7, 2)$, $B(3, -4)$ e $C(1, 4)$ são vértices de um triângulo isósceles.
8. Prove que os pontos $A(-4, -1)$, $B(-2, -3)$, $C(4, 3)$ e $D(2, 5)$ são vértices de um retângulo.
9. A mediana de um triângulo é um segmento de reta que une um vértice ao ponto médio do lado oposto. Ache o comprimento das medianas do triângulo cujos vértices são: $A(2, 3)$, $B(3, -3)$ e $C(-1, -1)$.
10. Ache o comprimento das medianas do triângulo com vértices $A(-3, 5)$, $B(2, 4)$ e $C(-1, -4)$.
11. Prove que o triângulo com vértices $A(3, -6)$, $B(8, -2)$ e $C(-1, -1)$ é retângulo. Ache a área do triângulo. (*Sugestão*: Use o inverso do teorema de Pitágoras.)
12. Ache os pontos médios das diagonais do quadrilátero cujos vértices são $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(3, 5)$ e $(3, 1)$.
13. Prove que os pontos $A(6, -13)$, $B(-2, 2)$, $C(13, 10)$ e $D(21, -5)$ são os vértices de um quadrado. Ache o comprimento de uma diagonal.
14. Se um extremo de um segmento de reta for o ponto $(-4, 2)$ e o ponto médio for $(3, -1)$, ache as coordenadas do outro extremo.
15. Se um extremo de um segmento de reta for o ponto $(6, -2)$ e o ponto médio for $(-1, 5)$, ache as coordenadas do outro extremo.
16. A abscissa de um ponto é -6, e sua distância do ponto $(1, 3)$ é $\sqrt{74}$. Ache a ordenada do ponto.
17. Usando a fórmula da distância (1), prove que os pontos $(-3, 2)$, $(1, -2)$ e $(9, -10)$ estão sobre uma reta.
18. Determine se os pontos $(14, 7)$, $(2, 2)$ e $(-4, -1)$ estão sobre uma reta usando a fórmula da distância (1).
19. Se dois vértices de um triângulo equilátero são $(-4, 3)$ e $(0, 0)$, ache o terceiro vértice.
20. Dados dois pontos $A(-3, 4)$ e $B(2, 5)$, ache as coordenadas de um ponto P sobre a reta que passa por A e B, tal que P seja (a) duas vezes mais distante de A do que de B e (b) duas vezes mais distante de B do que de A.

Nos Exercícios de 21 a 24, ache a inclinação da reta que passa pelos pontos.

21. $(2, -3), (-4, 3)$
22. $(5, 2), (-2, -3)$
23. $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}), (-\frac{5}{6}, \frac{2}{3})$
24. $(-2{,}1,\ 0{,}3)$, $(2{,}3,\ 1{,}4)$

Nos Exercícios de 25 a 38, ache uma equação da reta que satisfaz as condições.

25. A inclinação é 4 e passa pelo ponto $(2, -3)$.
26. A inclinação é 3 e passa pelo ponto $(-4, -1)$.
27. A inclinação é -2 e passa pelo ponto $(-3, 5)$.
28. Passa pelos pontos $(-2, 7)$ e $(6, 0)$.
29. Passa pelos pontos $(4, 6)$ e $(0, -7)$.
30. Passa pelos pontos $(3, 1)$ e $(-5, 4)$.
31. O intercepto x é -3 e o intercepto y é 4.
32. Passa pelo ponto $(1, 4)$ e é paralela à reta cuja equação é $2x + 5y + 7 = 0$.
33. Passa pelo ponto $(-2, 3)$ e é perpendicular à reta cuja equação é $2x - y - 2 = 0$.
34. Passa pelo ponto $(-3, -4)$ e é paralela ao eixo y.
35. Passa pelo ponto $(1, -7)$ e é paralela ao eixo x.
36. A inclinação é -2 e o intercepto x é 4.
37. Passa pelo ponto $(-2, -5)$ e tem uma inclinação de $\sqrt{3}$.
38. Passa pela origem e divide ao meio o ângulo entre os eixos no primeiro e terceiro quadrantes.

Nos Exercícios 39 e 40, ache a inclinação da reta.

39. (a) $x + 3y = 7$; (b) $2y + 9 = 0$
40. (a) $4x - 6y = 5$; (b) $3x - 5 = 0$

Nos Exercícios 41 e 42, determine, através das inclinações, se os três pontos são colineares.

41. (a) $(2, 3)$, $(-4, -7)$, $(5, 8)$; (b) $(2, -1)$, $(1, 1)$, $(3, 4)$
42. (a) $(4, 6)$, $(1, 2)$, $(-5, -4)$; (b) $(-3, 6)$, $(3, 2)$, $(9, -2)$
43. (a) Escreva uma equação cujo gráfico seja o eixo x. (b) Escreva uma equação cujo gráfico seja o eixo y. (c) Escreva uma equação cujo gráfico seja o conjunto de todos os pontos no eixo x ou y.
44. (a) Escreva uma equação cujo gráfico consista em todos os pontos tendo uma abscissa de 4. (b) Escreva uma equação cujo gráfico consista em todos os pontos com ordenada -3.
45. Mostre que as retas com equações $3x + 5y + 7 = 0$ e $6x + 10y - 5 = 0$ são paralelas.
46. Mostre que as retas com equações $3x + 5y + 7 = 0$ e $5x - 3y - 2 = 0$ são perpendiculares.
47. Dada a reta l com equação $2y - 3x = 4$ e o ponto $P(1, -3)$, ache (a) uma equação da reta passando por P, perpendicular a l; (b) a menor distância de P à reta l.
48. Ache o valor de k tal que as retas cujas equações são $3kx + 8y = 5$ e $6y - 4kx = -1$ sejam perpendiculares.
49. Mostre, através das inclinações, que os pontos $(-4, -1)$, $(3, \frac{8}{3})$, $(8, -4)$ e $(2, -9)$ são vértices de um trapezóide.
50. Prove, usando inclinações, que os três pontos $A(3, 1)$, $B(6, 0)$ e $C(4, 4)$ são vértices de um triângulo retângulo e determine a área do triângulo.
51. Ache as coordenadas dos três pontos que dividem o segmento de reta de $A(-5, 3)$ a $B(6, 8)$ em quatro partes iguais.
52. Três vértices consecutivos de um paralelogramo são $(-4, 1)$, $(2, 3)$ e $(8, 9)$. Ache as coordenadas do quarto vértice.
53. Dada a reta l tendo a equação $Ax + By + C = 0$, $B \neq 0$, determine (a) a inclinação; (b) o intercepto y; (c) o intercepto x; (d) uma equação da reta que passe pela origem e seja perpendicular a l.
54. Se A, B, C e D são constantes, mostre que (a) as retas $Ax + By + C = 0$ e $Ax + By + D = 0$ são paralelas e (b) as retas $Ax + By + C = 0$ e $Bx - Ay + D = 0$ são perpendiculares.
55. Ache as equações das três medianas do triângulo com vértices $A(3, -2)$, $B(3, 4)$ e $C(-1, 1)$ e prove que elas se encontram em um ponto.
56. Ache as equações das mediatrizes dos lados de um triângulo com vértices $A(-1, -3)$, $B(5, -3)$ e $C(5, 5)$ e prove que elas se encontram em um ponto.
57. Prove o Teorema 1.2.5: O gráfico da equação
$$Ax + By + C = 0$$
onde A, B e C são constantes e onde nem A nem B são nulos, é uma reta. (*Sugestão*: Considere dois casos $B \neq 0$ e $B = 0$. Se $B \neq 0$, mostre que a equação é aquela de uma reta tendo inclinação $-A/B$ e o intercepto y $-C/B$. Se $B = 0$, mostre que a equação é aquela de uma reta vertical.)
58. Seja l_1 a reta $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ e seja l_2 a reta $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Se l_1 não for paralela a l_2 e k for uma constante qualquer, a equação
$$A_1x + B_1y + C_1 + k(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$
representará um número ilimitado de retas. Prove que cada uma delas contém o ponto de intersecção de l_1 e l_2.
59. Dado que uma equação de l_1 é $2x + 3y - 5 = 0$ e que uma equação de l_2 é $3x + 5y - 8 = 0$, usando o Exercício 58 e sem determinar as coordenadas do ponto de intersecção de l_1 e l_2, encontre uma equação da reta que passe por esse ponto e (a) contendo o ponto $(1, 3)$; (b) seja paralela ao eixo x; (c) e tenha inclinação -2.
60. Para as retas l_1 e l_2 do Exercício 59, use o Exercício 58 e, sem achar as coordenadas do ponto de intersecção de l_1 e l_2, encontre uma equação da reta que passe por esse ponto e (a) seja paralela ao eixo y; (b) seja perpendicular à reta com equação $2x + y = 7$; (c) forme um triângulo isósceles com os eixos coordenados.

Nos Exercícios de 61 a 66, use Geometria Analítica para provar o teorema dado a partir da Geometria Plana.

61. A soma dos quadrados das distâncias de qualquer ponto a dois vértices opostos de qualquer retângulo é igual à soma dos quadrados de suas distâncias aos outros dois vértices.
62. O ponto médio da hipotenusa de qualquer triângulo retângulo é eqüidistante dos três vértices desse triângulo.
63. O segmento de reta que liga os pontos médios de dois lados opostos de qualquer quadrilátero e o segmento de reta que liga os pontos médios das diagonais do quadrilátero dividem-se ao meio.
64. Os segmentos de reta que ligam os pontos médios consecutivos dos lados de qualquer forma quadrilátera formam um paralelogramo.
65. As diagonais de um paralelogramo dividem-se ao meio.
66. Se as diagonais de um quadrilátero dividem-se ao meio, então o quadrilátero é um paralelogramo.

1.3 CIRCUNFERÊNCIAS E GRÁFICOS DE EQUAÇÕES

Uma **equação de um gráfico** é uma equação satisfeita pelas coordenadas daqueles pontos sobre o gráfico e somente por eles. Você aprendeu na Secção 1.2 que uma equação de primeiro grau com duas variáveis tem uma reta como o seu gráfico. Uma das curvas mais simples que é um gráfico de uma equação de segundo grau com duas variáveis é a *circunferência*.

1.3.1 DEFINIÇÃO

Uma **circunferência** é o conjunto de todos os pontos em um plano, eqüidistantes de um ponto fixo. O ponto fixo é chamado de **centro** e a distância fixa é chamada de **raio** da circunferência.

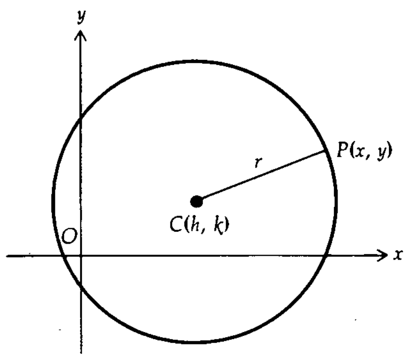


FIGURA 1

Para obter uma equação da circunferência tendo centro em $C(h, k)$ e raio r, usamos a fórmula da distância. Veja a Figura 1. O ponto $P(x, y)$ está na circunferência se e somente se $|\overline{PC}| = r$, isto é, se e somente se

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r$$

Essa equação é verdadeira se e somente se

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2 \qquad (r > 0)$$

Essa equação é satisfeita pelas coordenadas daqueles e somente daqueles pontos que estão na circunferência e, portanto, é uma equação da circunferência. Provamos o teorema a seguir.

1.3.2 TEOREMA

A circunferência com centro no ponto $C(h, k)$ e raio r tem como equação

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

Se o centro de uma circunferência está na origem, então $h = 0$ e $k = 0$; portanto, sua equação é

$$\boxed{x^2+y^2 = r^2}$$

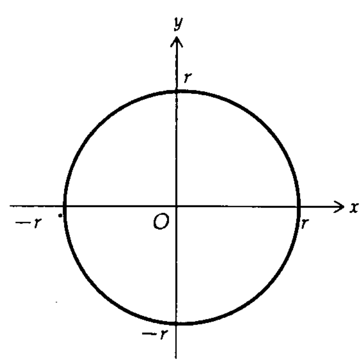


FIGURA 2

Tal circunferência aparece na Figura 2. Se o raio de uma circunferência for 1, será chamada de **circunferência unitária**.

EXEMPLO 1 Ache uma equação da circunferência que tenha um diâmetro com extremidades em $A(-2, 3)$ e $B(4, 5)$.

Solução Como as extremidades de um diâmetro são os pontos A e B, o ponto médio do segmento de reta AB será o centro da circunferência. Veja a Figura 3. Chamando de $C(h, k)$ o centro da circunferência,

$$h = \frac{-2+4}{2} \qquad k = \frac{3+5}{2}$$
$$= 1 \qquad\qquad = 4$$

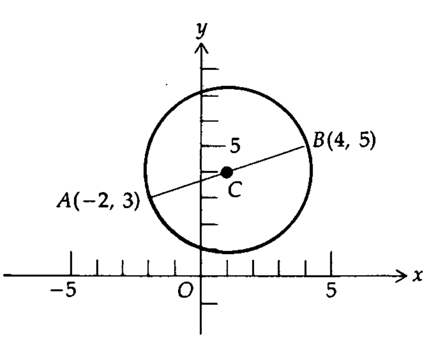


FIGURA 3

O centro está em $C(1, 4)$. O raio da circunferência pode ser calculado determinando $|\overline{CA}|$ ou $|\overline{CB}|$. Se $r = |\overline{CA}|$, então

$$r = \sqrt{(1+2)^2+(4-3)^2}$$
$$= \sqrt{10}$$

Uma equação da circunferência é, portanto,

$$(x-1)^2+(y-4)^2 = 10$$
$$x^2+y^2-2x-8y+7 = 0$$

A equação $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ é chamada de **forma centro-raio** da equação de uma circunferência. Se retirarmos os parênteses e combinarmos os termos, obteremos

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

Tomando $D = -2h$, $E = -2k$, e $F = h^2 + k^2 - r^2$, essa equação torna-se

$$\boxed{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

que é denominada a **forma geral** da equação de uma circunferência. Como toda circunferência tem centro e raio, sua equação pode ser colocada na forma centro-raio, ou seja, na forma geral, como fizemos no Exemplo 1. Se iniciarmos com uma equação de uma circunferência na forma geral, podemos escrevê-la em sua forma centro-raio completando os quadrados. No exemplo a seguir tal procedimento é mostrado.

EXEMPLO 2 Encontre o centro e o raio da circunferência com equação

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$$

Solução A equação dada pode ser escrita como

$$(x^2 + 6x) + (y^2 - 2y) = 15$$

Completando os quadrados dos termos entre parênteses, ao somarmos 9 e 1 a ambos os membros da equação, teremos

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) = 15 + 9 + 1$$
$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

Como essa equação está na forma centro-raio, o centro está em $(-3, 1)$ e o raio é 5.

Mostramos agora que há equações da forma

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

cujos gráficos não são circunferências. Suponhamos que, ao completar os quadrados, obteremos

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = d$$

Se $d > 0$, temos uma circunferência com centro em (h, k) e raio $\sqrt{d}$. Entretanto, se $d < 0$, não há valores reais de x e y que satisfaçam a equação; assim, não é possível traçarmos um gráfico. Em tal caso, dizemos que o gráfico é o conjunto vazio. Finalmente, se $d = 0$, temos

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = 0$$

Apenas os valores reais de x e y que satisfazem essa equação são $x = h$ e $y = k$. Assim, o gráfico é o ponto (h, k).

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Suponha que tenhamos a equação

$$x^2 + y^2 - 4x + 10y + 29 = 0$$

a qual pode ser escrita como

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 10y) = -29$$

Completamos os quadrados dos termos entre parênteses, somando 4 e 25 a ambos os membros, obtemos

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 10y + 25) = -29 + 4 + 25$$
$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 0$$

Como os únicos valores reais de x e y que satisfazem essa equação são $x = 2$ e $y = -5$, o gráfico é o ponto $(2, -5)$. ◀

Observe que uma equação da forma

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad \text{onde } A \neq 0 \tag{2}$$

pode ser escrita na forma de (1) ao dividirmos por A, obtendo

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

A Equação (2) é um caso particular da equação geral do segundo grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

na qual os coeficientes de x^2 e y^2 são iguais, não possuindo nenhum termo xy. O teorema a seguir é resultado dessa discussão.

1.3.3 TEOREMA O gráfico de qualquer equação de segundo grau em R^2 em x e y, na qual os coeficientes de x^2 e y^2 são iguais e na qual não há termo em xy, é uma circunferência, um ponto, ou ainda, um conjunto vazio.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** A equação

$$2x^2 + 2y^2 + 12x - 8y + 31 = 0$$

é da forma (2) e, portanto, pode ser o gráfico de uma circunferência, de um ponto-circunferência ou o conjunto vazio. Colocando a equação na forma (1):

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + \tfrac{31}{2} = 0$$
$$(x^2 + 6x) + (y^2 - 4y) = -\tfrac{31}{2}$$
$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = -\tfrac{31}{2} + 9 + 4$$
$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = -\tfrac{5}{2}$$

Logo, o gráfico é o conjunto vazio. ◀

Na Secção 1.2 definimos o gráfico de uma equação em R^2 como o conjunto de todos os pontos (x, y) cujas coordenadas são números que satisfazem a equação. O gráfico de uma equação em R^2 também é chamado de curva. Já discutimos dois tipos de curvas: retas, que são gráficos de equações de primeiro grau, e circunferências, as quais são gráficos das equações de segundo grau da forma (2). Agora examinaremos alguns gráficos de outro tipo de equação em x e y:

$$y = ax^2 + bx + c \tag{3}$$

onde a, b e c são constantes e $a \neq 0$. Especificando, consideramos

$$y = x^2 - 2 \tag{4}$$

Tabela 1

x	$y = x^2 - 2$
0	-2
1	-1
2	2
3	7
4	14
-1	-1
-2	2
-3	7
-4	14

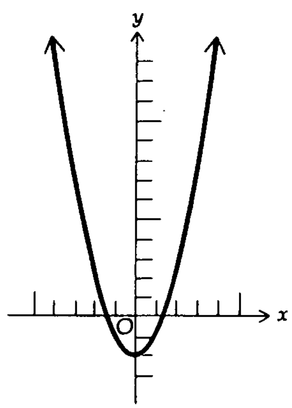


FIGURA 4

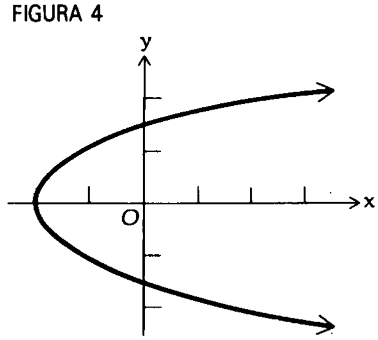


FIGURA 5

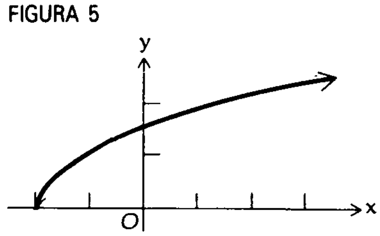


FIGURA 6

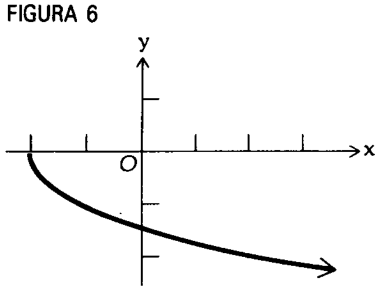


FIGURA 7

A solução dessa equação é um par ordenado de números reais, um para x e o outro para y, que satisfaça a equação. Por exemplo, se x for substituído por 3 na equação, vemos que $y = 7$; assim, $x = 3$ e $y = 7$ constitui uma solução dessa equação. Substituindo x por qualquer número no segundo membro de (4), obtemos um valor para y. Vemos, então, que (4) tem um número ilimitado de soluções. A Tabela 1 dá algumas dessas soluções.

Se marcarmos os pontos que têm como coordenadas os pares de números (x, y) da Tabela 1, ligando-os por uma curva suave, obteremos um esboço do gráfico da Equação (4), que aparece na Figura 4. Qualquer ponto (x, y) nessa curva tem coordenadas que satisfazem a Equação (4) e as coordenadas de qualquer ponto não situado nessa curva não satisfarão a equação.

O gráfico da Figura 4 é uma *parábola*. O ponto mais baixo do gráfico é $(0, -2)$; é o *vértice* da parábola. Essa parábola abre para cima. Um tratamento completo de parábolas encontra-se no Capítulo 10, onde mostraremos que o gráfico de uma equação da forma (3) será uma parábola tendo um eixo vertical abrindo para cima, se $a > 0$ e para baixo, se $a < 0$. No exemplo a seguir, o gráfico é uma parábola com eixo horizontal.

EXEMPLO 3 Faça o esboço do gráfico da equação

$$y^2 - x - 2 = 0$$

Solução Resolvendo essa equação em y teremos

$$y^2 = x + 2$$

$$y = \pm\sqrt{x + 2}$$

Assim, a equação dada é equivalente às duas equações

$$y = \sqrt{x + 2} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{x + 2}$$

As coordenadas de qualquer ponto que satisfaçam qualquer uma dessas duas equações, irão satisfazer a equação dada. Por outro lado, as coordenadas de qualquer ponto que satisfaçam a equação dada, satisfarão $y = \sqrt{x + 2}$ ou $y = -\sqrt{x + 2}$. A Tabela 2 dá alguns desses valores de x e y.

Tabela 2

x	0	0	1	1	2	2	3	3	-1	-1	-2
y	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	2	-2	$\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$	1	-1	0

Observe que para qualquer valor de $x > -2$ não há valor real para y. Também, para cada valor de $x > -2$ há dois valores para y. Um esboço do gráfico aparece na Figura 5.

EXEMPLO 4 Faça esboços dos gráficos das equações

$$y = \sqrt{x + 2} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{x + 2}$$

Solução Lembre do Exemplo 3 que essas duas equações juntas equivalem à equação $y^2 - x - 2 = 0$. Na equação $y = \sqrt{x + 2}$, o valor de y não é negativo. Logo, o gráfico da equação, que a Figura 6 mostra, é a parte superior do gráfico na Figura 5.

Da mesma forma, o gráfico da equação $y = -\sqrt{x + 2}$, cujo esboço está na Figura 7, é a parte inferior da parábola da Figura 5.

Ao desenhar um esboço do gráfico de uma equação, muitas vezes é útil considerar as propriedades de *simetria* de um gráfico.

1.3.4 DEFINIÇÃO

Dois pontos P e Q serão **simétricos com respeito a uma reta** se e somente se a reta for a perpendicular bissetora do segmento de reta PQ. Dois pontos P e Q serão **simétricos com respeito a um terceiro ponto** se e somente se o terceiro ponto for o ponto médio do segmento de reta PQ.

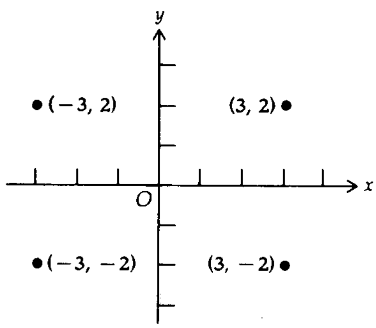


FIGURA 8

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Os pontos $(3, 2)$ e $(3, -2)$ são simétricos com relação ao eixo x, os pontos $(3, 2)$ e $(-3, 2)$ são simétricos com respeito ao eixo y e os pontos $(3, 2)$ e $(-3, -2)$ são simétricos com respeito à origem (veja a Figura 8). ◀

Em geral, os pontos (x, y) e $(x, -y)$ são simétricos com respeito ao eixo x, (x, y) e $(-x, y)$ são simétricos com relação ao eixo y e (x, y) e $(-x, -y)$ são simétricos com respeito à origem.

1.3.5 DEFINIÇÃO

O gráfico de uma equação será simétrico com respeito a uma reta l se e somente se para todo ponto P sobre o gráfico existir um ponto Q, também sobre o gráfico, tal que P e Q sejam simétricos com relação a l. O gráfico de uma equação é simétrico com respeito a um ponto R se e somente se, para todo ponto P sobre o gráfico, existir um ponto S também sobre o gráfico, tal que P e S sejam simétricos com respeito a R.

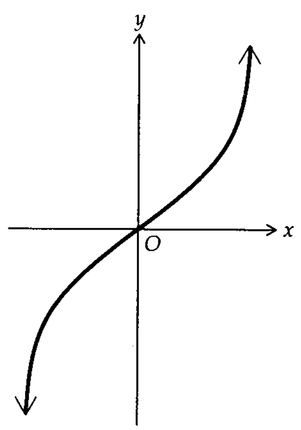


FIGURA 9

Na Figura 5 temos um gráfico simétrico em relação ao eixo x, e a Figura 4 mostra outro gráfico simétrico em relação ao eixo y. Mostramos um gráfico que seja simétrico em relação à origem na Figura 9. A circunferência mostrada na Figura 2 é simétrica em relação ao eixo x, ao eixo y e à origem.

Da Definição 1.3.5 segue que se o ponto (x, y) estiver sobre um gráfico simétrico com respeito ao eixo x, então o ponto $(x, -y)$ também deverá estar no gráfico. E se ambos os pontos (x, y) e $(x, -y)$ estiverem no gráfico, então o gráfico será simétrico com respeito ao eixo x. Logo, as coordenadas dos pontos $(x, -y)$ e (x, y) devem satisfazer a equação do gráfico. Então o gráfico de uma equação em x e y será simétrico com respeito ao eixo x se e somente se uma equação equivalente for obtida quando y for substituído por $-y$ na equação dada. Provamos, assim, a parte (i) do teorema a seguir. As provas das partes (ii) e (iii) são similares.

1.3.6 TEOREMA
Teste de Simetria

O gráfico de uma equação em x e y será

(i) simétrico com respeito ao eixo x se e somente se obtivermos uma equação equivalente ao substituirmos y por $-y$ na equação dada;

(ii) simétrico com respeito ao eixo y se e somente se obtivermos uma equação equivalente ao substituirmos x por $-x$ na equação dada;

(iii) simétrico com respeito à origem se e somente se obtivermos uma equação equivalente quando x for substituído por $-x$ e y for substituído por $-y$ na equação dada.

Observe o gráfico da Figura 4, novamente. Ele é simétrico em relação ao eixo y e sua equação é $y = x^2 - 2$. Observe que uma equação equivalente é obtida quando x é substituído por $-x$. No Exemplo 3 temos a equação $y^2 - x - 2 =$ $= 0$ para a qual uma equação equivalente é obtida quando y é substituído por

$-y$, e seu gráfico, esboçado na Figura 4, é simétrico em relação ao eixo x. O exemplo a seguir fornece um gráfico que é simétrico em relação à origem.

EXEMPLO 5 Faça um esboço do gráfico da equação

$$xy = 1$$

Solução Vemos que se na equação dada substituirmos x por $-x$ e y por $-y$, obteremos uma equação equivalente; logo, pelo Teorema 1.3.6 (iii), o gráfico será simétrico com respeito à origem. A Tabela 3 dá alguns valores de x e y satisfazendo a equação dada.

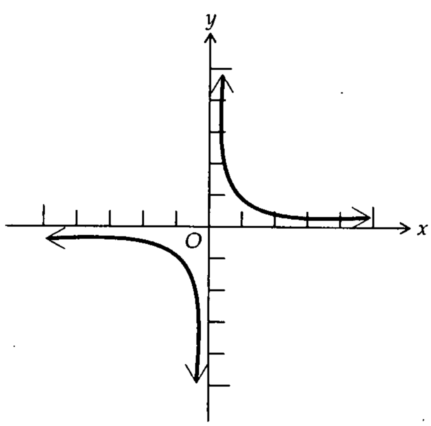


FIGURA 10

Tabela 3

x	1	2	3	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	-1	-2	-3	-4	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	2	3	4	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	-2	-3	-4

Da equação dada, $y = 1/x$. Vemos que à medida que x cresce com valores positivos, y diminui com valores positivos e aproxima-se cada vez mais de zero. À medida que x diminui com valores positivos, y cresce com valores positivos e torna-se cada vez maior. À medida que x cresce com valores negativos (isto é, x assume, por exemplo, os valores -4, -3, -2, -1, $-\frac{1}{2}$ etc.), y assume valores negativos tendo valores absolutos cada vez maiores. Um esboço do gráfico está na Figura 10.

EXERCÍCIOS 1.3

Nos Exercícios de 1 a 4, ache uma equação da circunferência com centro em C e raio r. Escreva a equação na forma centro-raio e na forma geral.

1. $C(4, -3), r = 5$ **2.** $C(0, 0), r = 8$
3. $C(-5, -12), r = 3$ **4.** $C(-1, 1), r = 2$

Nos Exercícios 5 e 6, ache uma equação da circunferência que satisfaça as condições.

5. Centro em (1, 2) e passa pelo ponto (3, −1).
6. Passa pelos três pontos (2, 8), (7, 3) e (−2, 0).

Nos Exercícios de 7 a 10, ache o centro e o raio da circunferência, e desenhe um esboço do gráfico.

7. $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$
8. $2x^2 + 2y^2 - 2x + 2y + 7 = 0$
9. $3x^2 + 3y^2 + 4y - 7 = 0$
10. $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$

Nos Exercícios de 11 a 16, determine se o gráfico é uma circunferência, um ponto ou um conjunto vazio.

11. $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 19 = 0$
12. $4x^2 + 4y^2 + 24x - 4y + 1 = 0$
13. $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 36 = 0$
14. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$
15. $36x^2 + 36y^2 - 48x + 36y - 119 = 0$
16. $9x^2 + 9y^2 + 6x - 6y + 5 = 0$

Nos Exercícios de 17 a 44, desenhe um esboço do gráfico da equação.

17. $y = 2x + 5$ **18.** $y = 4x - 3$
19. $y = \sqrt{x + 4}$ **20.** $y = \sqrt{x - 1}$
21. $y = -\sqrt{x + 4}$ **22.** $y = -\sqrt{x - 1}$
23. $y^2 = x + 4$ **24.** $y^2 = x - 1$
25. $y = 3 - x^2$ **26.** $y = x^2 + 2$
27. $y = x^2 - 4$ **28.** $y = 9 - x^2$
29. $y = 4 + x^2$ **30.** $y = x^2 - 9$
31. $xy = 4$ **32.** $xy = -1$
33. $xy = -9$ **34.** $xy = 9$
35. $x = y^2 + 2$ **36.** $x = y^2 - 4$
37. (a) $x + 3y = 0$; (b) $x - 3y = 0$; (c) $x^2 - 9y^2 = 0$
38. (a) $2x - 5y = 0$; (b) $2x + 5y = 0$; (c) $4x^2 - 25y^2 = 0$
39. (a) $y = \sqrt{2x}$; (b) $y = -\sqrt{2x}$; (c) $y^2 = 2x$
40. (a) $y = \sqrt{-2x}$; (b) $y = -\sqrt{-2x}$; (c) $y^2 = -2x$
41. (a) $y = \sqrt{4 - x^2}$; (b) $y = -\sqrt{4 - x^2}$; (c) $x^2 + y^2 = 4$
42. (a) $y = \sqrt{1 - x^2}$; (b) $y = -\sqrt{1 - x^2}$; (c) $x^2 + y^2 = 1$
43. (a) $x = \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4y^2}$; (b) $x = -\frac{1}{2}\sqrt{1 - 4y^2}$; (c) $4x^2 + 4y^2 = 1$
44. (a) $xy = 2$; (b) $xy = -2$; (c) $x^2y^2 = 4$

Nos Exercícios de 45 a 48, ache uma equação da circunferência satisfazendo as condições dadas.

45. O centro está em $(-3, -5)$ e é tangente à reta $12x + 5y = 4$.

46. O centro está em $(-2, 5)$ e é tangente à reta $x = 7$.

47. Tangente à reta $3x + y + 2 = 0$ em $(-1, 1)$ e passa pelo ponto $(3, 5)$.

48. Tangente à reta $3x + 4y - 16 = 0$ em $(4, 1)$ e com um raio de 5 (duas circunferências possíveis).

49. Ache uma equação da reta que é tangente à circunferência $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ no ponto $(5, 1)$.

50. Ache uma equação de cada uma das duas retas com inclinação $-\frac{4}{3}$, que são tangentes à circunferência $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$.

51. Prove que um gráfico que seja simétrico com respeito a ambos os eixos coordenados também seja simétrico com respeito à origem.

52. O gráfico de uma equação em x e y será simétrico com respeito à reta com equação $y = x$ se e somente se esta for equivalente à equação obtida quando x for substituído por y e y por x. Mostre que o gráfico da equação $ax^2 + by^2 = c$, onde a, b e c são positivos, será simétrico com respeito a essa reta se e somente se $a = b$.

53. Prove que um gráfico simétrico com respeito a duas retas perpendiculares quaisquer também seja simétrico com relação ao ponto de intersecção delas.

1.4 FUNÇÕES

Muitas vezes ocorre na prática que o valor de uma quantidade depende do valor de outra. Exemplificando, o salário de uma pessoa pode depender do número de horas trabalhadas; a produção total de uma fábrica pode depender do número de máquinas usadas; a distância percorrida por um objeto pode depender do tempo decorrido desde que ele deixou um dado ponto; o volume do espaço ocupado por um gás sob uma pressão constante depende da temperatura do gás; a resistência de um fio elétrico com comprimento fixo depende de seu diâmetro, e assim por diante. A relação entre tais quantidades é dada freqüentemente por uma *função*. Para nossos propósitos, restringimos as quantidades na relação a serem números reais. Então

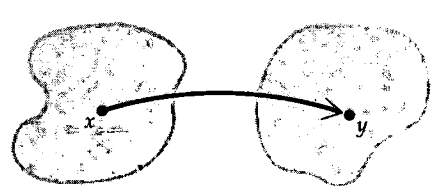


FIGURA 1

> Uma função pode ser considerada como uma correspondência de um conjunto X de números reais x a um conjunto Y de números reais y, onde o número y é único para um valor específico de x.

A Figura 1 dá uma visualização de tal correspondência, onde os conjuntos X e Y consistem em pontos numa região plana.

Estabelecendo o conceito de uma função de outra forma, consideramos intuitivamente o número real y no conjunto Y como uma *função* do número real x no conjunto X se houver uma regra pela qual um valor específico de y seja atribuído a um valor de x. Essa regra é dada, muitas vezes, por uma equação. Por exemplo, a equação

$$y = x^2$$

Tabela 1

x	$y = x^2$
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
4	16
0	0
-1	1
$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
-4	16

define uma função para a qual X é o conjunto de todos os números reais e Y é o conjunto de números não-negativos. O valor de y em Y, atribuído ao valor de x em X, é obtido quando multiplicamos x por si mesmo. A Tabela 1 dá o valor de y atribuído a alguns valores fixados de x, e a Figura 2 ilustra a correspondência para os números na tabela.

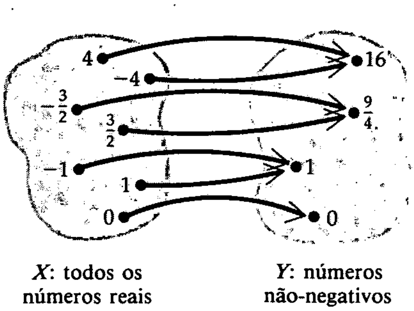


FIGURA 2

Usamos símbolos tais como f, g e h para denotar uma função. O conjunto X de números reais descritos acima é o *domínio* da função, e o conjunto Y de números reais atribuídos aos valores de x em X é a *imagem* da função.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Seja f a função definida pela equação

$$y = \sqrt{x - 2}$$

Como os números são restritos a números reais, y é uma função de x apenas para $x - 2 \geqslant 0$, pois para qualquer x que satisfaça essa desigualdade, um valor único de y é determinado. No entanto, se $x < 2$, obtemos uma raiz quadrada de um número negativo, e então, não existe número real y algum. Logo, devemos restringir x de modo que $x \geqslant 2$. Assim, o domínio de f é o intervalo $[2, +\infty)$, e a imagem é $[0, +\infty)$. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Seja g a função definida pela equação

$$y = \sqrt{x^2 - 9}$$

Observe que y é uma função de x apenas para $x \geqslant 3$ ou $x \leqslant -3$ (ou simplesmente $|x| \geqslant 3$); para qualquer x que satisfaça uma dessas desigualdades, um valor único de y é determinado. Nenhum valor real de y é determinado se x estiver no intervalo aberto $(-3, 3)$, pois para esses valores de x obtemos a raiz quadrada de um número negativo. Logo, o domínio de g é $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$ e a imagem é $[0, +\infty)$. ◀

Podemos considerar uma função como um conjunto de pares ordenados. Por exemplo, a função definida pela equação $y = x^2$ consiste em todos os pares ordenados (x, y) que satisfaçam a equação. Os pares ordenados nessa função dados pela Tabela 1 são $(1, 1)$ $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$, $(4, 16)$, $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ e $(-4, 16)$. Evidentemente, há um número ilimitado de pares ordenados na função. Alguns outros são $(2, 4)$, $(-2, 4)$, $(5, 25)$, $(-5, 25)$, $(\sqrt{3}, 3)$ e assim por diante.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** A função f da Ilustração 1 é o conjunto de pares ordenados (x, y) para os quais $y = \sqrt{x - 2}$. Com símbolos, escrevemos

$$f = \{(x, y) | y = \sqrt{x - 2}\}$$

Alguns dos pares ordenados em f são $(2, 0)$, $(\frac{9}{4}, \frac{1}{2})$, $(3, 1)$, $(4, \sqrt{2})$, $(5, \sqrt{3})$, $(6, 2)$, $(11, 3)$. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** A função g da Ilustração 2 é o conjunto dos pares ordenados (x, y) para os quais $y = \sqrt{x^2 - 9}$, isto é,

$$g = \{(x, y) | y = \sqrt{x^2 - 9}\}$$

Alguns dos pares ordenados em g são $(3, 0)$, $(4, \sqrt{7})$, $(5, 4)$, $(-3, 0)$, $(-\sqrt{13}, 2)$. ◀

Daremos agora a definição formal de uma função. O conceito de função torna-se mais preciso se ela for definida como um conjunto de pares ordenados, ao invés de usarmos uma regra ou correspondência.

1.4.1 DEFINIÇÃO Uma **função** é um conjunto de pares ordenados de números (x, y), sendo que dados dois pares ordenados distintos, nenhum deles terá o mesmo primeiro número. O conjunto de todos os valores admissíveis de x é chamado de **domínio** da função e o conjunto de todos os valores resultantes de y é chamado a **imagem** da função.

Nessa definição, a restrição que dois pares ordenados não podem ter o mesmo número assegura que y seja único para valores específicos de x. Os números x e y são **variáveis**. Dados os valores atribuídos a x e como o valor de y independe da escolha de x, x será a **variável independente** e y, a **variável dependente**.

O conceito de uma função é um conjunto de pares ordenados que nos permite dar a definição a seguir do *gráfico de uma função*.

1.4.2 DEFINIÇÃO Se f for uma função, então o **gráfico** de f será o conjunto dos pontos (x, y) em R^2 para os quais (x, y) é um par ordenado de f.

Comparando essa definição com a definição do gráfico de uma equação (1.2.4), segue que o gráfico de uma função f é o mesmo que o gráfico da equação $y = f(x)$.

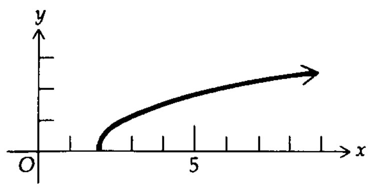


FIGURA 3

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** (a) Um esboço do gráfico da função f da Ilustração 1 está na Figura 3. Ele é a metade superior de uma parábola.

(b) A Figura 4 mostra um esboço do gráfico da função g das Ilustrações 2 e 4. ◀

Lembre-se de que para termos uma função, é preciso existir exatamente um valor da variável dependente para cada valor da variável independente no domínio da função. Em termos geométricos isso significa que

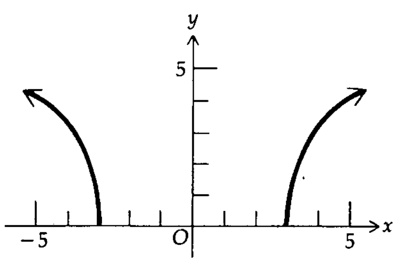


FIGURA 4

O gráfico de uma função pode ser interceptado por uma reta vertical em, no máximo, um ponto.

Observe que essa é a situação dos gráficos das funções nas Figuras 3 e 4.

▶ **ILUSTRAÇÃO 6** Consideremos o conjunto

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25\}$$

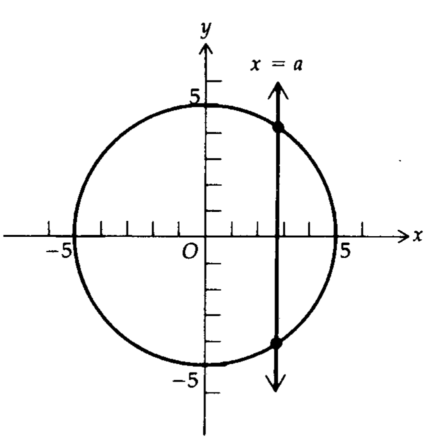


FIGURA 5

Um esboço do gráfico desse conjunto está na Figura 5. Tal conjunto de pares ordenados não é uma função, pois para cada x no intervalo $(-5, 5)$ existem dois pares ordenados distintos, tendo um mesmo valor de x como primeiro elemento. Por exemplo, $(3, 4)$ e $(3, -4)$ são pares ordenados no conjunto dado. Além disso, observe que o gráfico do conjunto dado é uma circunferência com centro na origem e raio 5 e uma reta vertical tendo a equação $x = a$, onde $-5 < a < 5$, intercepta a circunferência em dois pontos. ◀

A próxima secção trata de gráficos de funções e apresenta mais exemplos.

Para introduzir a notação de **valor funcional**, seja f a função tendo como seu domínio os valores da variável x e como sua imagem os valores da variável y. Então, o símbolo $f(x)$ (lemos "f de x") denota o valor de y correspondente ao valor de x.

▶ **ILUSTRAÇÃO 7** Na Ilustração 1, $f = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x - 2}\}$. Assim

$$f(x) = \sqrt{x - 2}$$

Calculamos $f(x)$ para valores específicos de x.

$$f(3) = \sqrt{3 - 2} = 1 \qquad f(5) = \sqrt{5 - 2} = \sqrt{3} \qquad f(6) = \sqrt{6 - 2} = 2 \qquad f(9) = \sqrt{9 - 2} = \sqrt{7}$$ ◀

Quando definimos uma função, o domínio da função deve ser dado implícita ou explicitamente. Por exemplo, se f for definida por

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2$$

isto implica que x pode ser qualquer número real. Mas, se f for definida por

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2 \qquad 1 \leqslant x \leqslant 10$$

então o domínio de f consistirá em todos os números reais entre 1 e 10, inclusive os extremos.

Analogamente, se g for definida pela equação

$$g(x) = \frac{5x - 2}{x + 4}$$

isto implica que $x \neq -4$, pois o quociente não está definido para $x = -4$; logo, o domínio de g é o conjunto de todos os números reais exceto -4.

Se

$$h(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

isto implica que x está no intervalo fechado $[-3, 3]$, pois $\sqrt{9 - x^2}$ não é um número real para $x > 3$ ou $x < -3$. Assim, o domínio de h é $[-3, 3]$ e a imagem é $[0, 3]$.

EXEMPLO 1 Dada a função f definida por

$$f(x) = x^2 + 3x - 4$$

ache:

(a) $f(0)$; (b) $f(2)$; (c) $f(h)$; (d) $f(2h)$; (e) $f(2x)$; (f) $f(x + h)$; (g) $f(x) + f(h)$.

Solução

(a) $f(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 - 4 = 4$

(b) $f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 4 = 6$

(c) $f(h) = h^2 + 3h - 4$

(d) $f(2h) = (2h)^2 + 3(2h) - 4 = 4h^2 + 6h - 4$

(e) $f(2x) = (2x)^2 + 3(2x) - 4 = 4x^2 + 6x - 4$

(f) $f(x + h) = (x + h)^2 + 3(x + h) - 4 = x^2 + 2hx + h^2 + 3x + 3h - 4 = x^2 + (2h + 3)x + (h^2 + 3h - 4)$

(g) $f(x) + f(h) = (x^2 + 3x - 4) + (h^2 + 3h - 4) = x^2 + 3x + (h^2 + 3h - 8)$

Compare os cálculos das partes (f) e (g) do Exemplo 1. Na parte (f) o cálculo é de $f(x + h)$ que é o valor funcional na soma de x e h. Na parte (g), onde $f(x) + f(h)$ é calculado, obtemos a soma de dois valores funcionais $f(x)$ e $f(h)$.

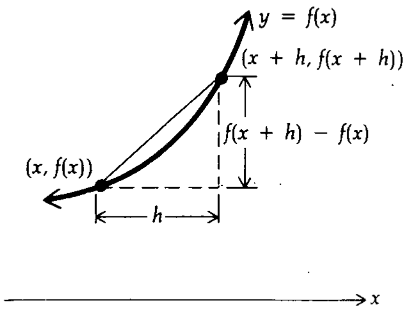


FIGURA 6

No Capítulo 3 precisamos calcular quocientes da forma

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \qquad h \neq 0$$

Esse quociente surge como a inclinação da reta que passa pelos pontos $(x, f(x))$ e $(x + h, f(x + h))$ sobre o gráfico da função definida por $y = f(x)$. Veja a Figura 6. Se, no cálculo, a diferença de dois radicais aparece no numerador, racionalizamos o numerador como na parte (b) do exemplo a seguir.

EXEMPLO 2 Ache

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

onde $h \neq 0$, se (a) $f(x) = 4x^2 - 5x + 7$; (b) $f(x) = \sqrt{x}$.

Solução

(a)
$$\begin{aligned}\frac{f(x + h) - f(x)}{h} &= \frac{4(x + h)^2 - 5(x + h) + 7 - (4x^2 - 5x + 7)}{h} \\ &= \frac{4x^2 + 8hx + 4h^2 - 5x - 5h + 7 - 4x^2 + 5x - 7}{h} \\ &= \frac{8hx - 5h + 4h^2}{h} \\ &= 8x - 5 + 4h\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\frac{f(x + h) - f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \frac{(\sqrt{x + h} - \sqrt{x})(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{(x + h) - x}{h(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}\end{aligned}$$

Na segunda etapa dessa solução o numerador e o denominador são multiplicados pelo conjugado do numerador, a fim de racionalizar o numerador, e isto dá um fator comum de h no numerador e denominador.

Vamos definir agora algumas operações com funções. Na definição, novas funções são formadas a partir das funções dadas, através da soma, subtração, multiplicação e divisão de valores funcionais. Conseqüentemente, essas novas funções são conhecidas como a *soma*, a *diferença*, o *produto* e o *quociente* das funções originais.

1.4.3 DEFINIÇÃO Dadas as duas funções f e g:

(i) a sua **soma**, denotada por $f + g$, é a função definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

(ii) a sua **diferença**, denotada por $f - g$, é a função definida por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

(iii) o seu **produto**, denotado por $f \cdot g$, é a função definida por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

(iv) o seu **quociente**, denotado por f/g, é a função definida por

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$$

Em cada caso, o *domínio* da função resultante consiste naqueles valores de x comuns aos domínios de f e g, com a exigência adicional, no caso (iv), de que os valores de x para os quais $g(x) = 0$ sejam excluídos.

EXEMPLO 3 Dadas as funções f e g definidas por

$$f(x) = \sqrt{x+1} \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{x-4}$$

ache:

(a) $(f + g)(x)$; (b) $(f - g)(x)$; (c) $(f \cdot g)(x)$; (d) $(f/g)(x)$.

Solução

(a) $(f + g)(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-4}$ (b) $(f - g)(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-4}$

(c) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-4}$ (d) $(f/g)(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-4}}$

O domínio de f é $[-1, +\infty)$, o domínio de g é $[4, +\infty)$. Assim, nas partes (a), (b) e (c), o domínio da função resultante é $[4, +\infty)$. Na parte (d), o denominador é zero quando $x = 4$; desse modo, 4 é excluído do domínio, o qual, então, é $(4, +\infty)$.

Outra operação com funções consiste em obter a *função composta* de duas funções dadas.

1.4.4 DEFINIÇÃO Dadas as duas funções f e g, a **função composta**, denotada por $f \circ g$, é definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

e o domínio de $f \circ g$ é o conjunto de todos os números x no domínio de g, tal que $g(x)$ esteja no domínio de f.

A definição indica que quando calculamos $(f \circ g)(x)$, primeiro aplicamos a função g a x e então, a função f a $g(x)$. Esse procedimento será demonstrado na ilustração e no exemplo a seguir.

▶ **ILUSTRAÇÃO 8** Se f e g são definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{e} \quad g(x) = 2x - 3$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f(2x - 3)\\ &= \sqrt{2x - 3}\end{aligned}$$

O domínio de g é $(-\infty, +\infty)$, e o domínio de f é $[0, +\infty)$. Logo, o domínio de $f \circ g$ é o conjunto de todos os números reais, para os quais $2x - 3 \geqslant 0$ ou, de modo equivalente, $[\frac{3}{2}, +\infty)$. ◀

EXEMPLO 4 Dado que f e g estão definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 - 1$$

determine: (a) $f \circ f$; (b) $g \circ g$; (c) $f \circ g$; (d) $g \circ f$. Encontre também o domínio da função composta em cada parte.

Solução

(a) $$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x))\\ &= f(\sqrt{x})\\ &= \sqrt{\sqrt{x}}\\ &= \sqrt[4]{x}\end{aligned}$$

O domínio é $[0, +\infty)$.

(b) $$\begin{aligned}(g \circ g)(x) &= g(g(x))\\ &= g(x^2 - 1)\\ &= (x^2 - 1)^2 - 1\\ &= x^4 - 2x^2\end{aligned}$$

O domínio é $(-\infty, +\infty)$.

(c) $$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f(x^2 - 1)\\ &= \sqrt{x^2 - 1}\end{aligned}$$

O domínio é $(\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

(d) $$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= g(\sqrt{x})\\ &= (\sqrt{x})^2 - 1\\ &= x - 1\end{aligned}$$

O domínio é $[0, +\infty)$.

Na parte (d) notamos que, embora $x - 1$ seja definida por todos os valores de x, o domínio de $g \circ f$, pela definição de uma função composta, será o conjunto de todos os números x no domínio de f, tais que $f(x)$ esteja no domínio de g. Assim, o domínio de $g \circ f$ deve ser um subconjunto do domínio de f.

Observe, dos resultados das partes (c) e (d) do Exemplo 4, que $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$ não são, necessariamente, iguais.

1.4.5 DEFINIÇÃO

(i) Uma função é **par** se, para todo valor de x no domínio de f, $f(-x) = f(x)$.
(ii) Uma função f é denominada **ímpar** se, para todo valor de x no domínio de f, $f(-x) = -f(x)$.

Em ambos os casos (i) e (ii), devemos entender que $-x$ está no domínio de f, sempre que x estiver lá.

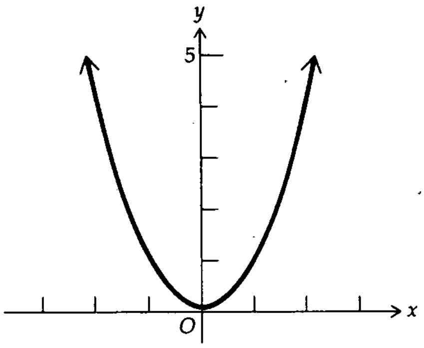


FIGURA 7

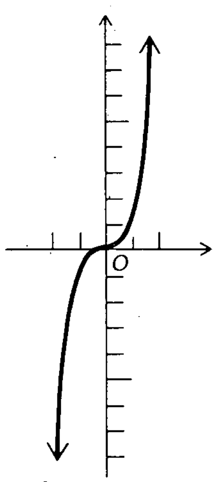


FIGURA 8

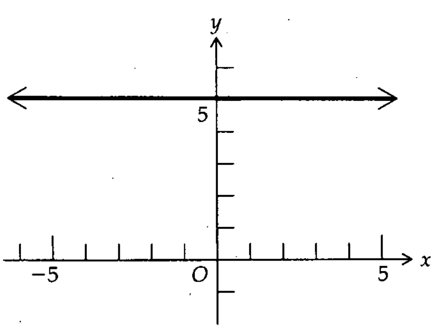


FIGURA 9

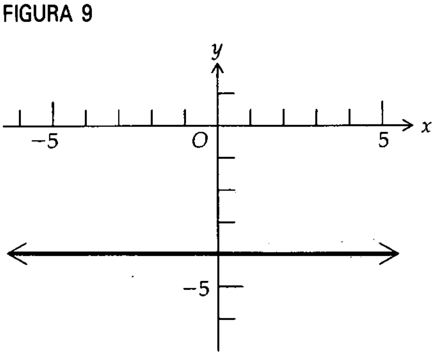


FIGURA 10

▶ **ILUSTRAÇÃO 9** (a) Se $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7$, então

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 7 \\ &= 3x^4 - 2x^2 + 7 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Logo, f é uma função par.

(b) Se $g(x) = 3x^5 - 4x^3 - 9x$, então

$$\begin{aligned} g(-x) &= 3(-x)^5 - 4(-x)^3 - 9(-x) \\ &= -3x^5 + 4x^3 + 9x \\ &= -(3x^5 - 4x^3 - 9x) \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

Logo, g é uma função ímpar.

(c) Se $h(x) = 2x^4 + 7x^3 - x^2 + 9$, então

$$\begin{aligned} h(-x) &= 2(-x)^4 + 7(-x)^3 - (-x)^2 + 9 \\ &= 2x^4 - 7x^3 - x^2 + 9 \end{aligned}$$

Vemos que a função h não é nem par, nem ímpar. ◀

Do teste de simetria dado na Secção 1.3, segue que o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y e o gráfico de uma função ímpar é simétrico com relação à origem.

▶ **ILUSTRAÇÃO 10** (a) Se $f(x) = x^2$, f será uma função par e seu gráfico será uma parábola simétrica com respeito ao eixo y. Veja a Figura 7.

(b) Se $g(x) = x^3$, g será uma função ímpar. O gráfico de g, mostrado na Figura 8, será simétrico com respeito à origem. ◀

Uma função cuja imagem consiste em um único número, é chamada de **função constante**. Assim, se $f(x) = c$ e se c for um número real qualquer, então f será uma função constante e seu gráfico será uma reta paralela ao eixo x, a uma distância de c unidades desse eixo.

▶ **ILUSTRAÇÃO 11** (a) A função definida por $f(x) = 5$ é uma função constante, e seu gráfico, mostrado na Figura 9, é uma reta horizontal 5 unidades acima do eixo x.

(b) A função definida por $g(x) = -4$ é uma função constante cujo gráfico é uma reta horizontal 4 unidades abaixo do eixo x. Veja a Figura 10. ◀

Uma **função linear** é definida por

$$f(x) = mx + b$$

onde m e b são constantes e $m \neq 0$. Seu gráfico é uma reta tendo inclinação m e y intercepto b.

▶ **ILUSTRAÇÃO 12** A função definida por

$$f(x) = 2x - 6$$

é linear. Seu gráfico é a reta mostrada na Figura 11. ◀

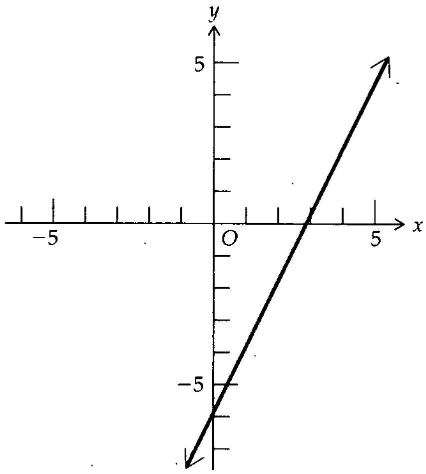


FIGURA 11

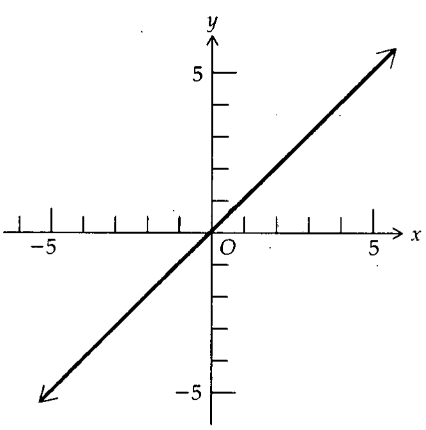


FIGURA 12

A função linear dada, definida por

$$f(x) = x$$

é chamada de **função identidade**. Seu gráfico, mostrado na Figura 12, é a reta que divide ao meio o primeiro e o terceiro quadrantes.

Se uma função f for definida por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números reais ($a_n \neq 0$) e n for um inteiro não-negativo, então f será chamada de **função polinomial** de grau n. Assim, a função definida por

$$f(x) = 3x^5 - x^2 + 7x - 1$$

é uma função polinomial de grau 5.

Uma função linear será uma função polinomial de grau 1. Se o grau de uma função polinomial for 2, ela será chamada de **função quadrática**, e se o grau for 3, será chamada de **função cúbica**.

Se uma função puder ser expressa como o quociente de duas funções polinomiais, ela será chamada de **função racional**.

Uma **função algébrica** é aquela formada por um número finito de operações algébricas sobre as funções identidade e constante. Essas operações algébricas incluem adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. As funções polinomiais e racionais são tipos especiais de funções algébricas. Um exemplo complicado de uma função algébrica é aquele definido por

$$f(x) = \frac{(x^2 - 3x + 1)^3}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

Além das funções algébricas, são também consideradas em Cálculo as **funções transcendentais**. Exemplos são as funções trigonométricas discutidas na Secção 1.6 e as funções exponencial e logarítmica introduzidas no Capítulo 7.

EXERCÍCIOS 1.4

Nos Exercícios de 1 a 4, determine se o conjunto dado é uma função. Se for, qual o seu domínio?

1. (a) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x - 4}\}$; (b) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x^2 - 4}\}$; (c) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{4 - x^2}\}$; (d) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$.

2. (a) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x + 1}\}$; (b) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x^2 - 1}\}$; (c) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{1 - x^2}\}$; (d) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

3. (a) $\{(x, y) \mid y = x^2\}$; (b) $\{(x, y) \mid x = y^2\}$; (c) $\{(x, y) \mid y = x^3\}$; (d) $\{(x, y) \mid x = y^3\}$.

4. (a) $\{(x, y) \mid y = (x - 1)^2 + 2\}$; (b) $\{(x, y) \mid x = (y - 2)^2 + 1\}$; (c) $\{(x, y) \mid y = (x + 2)^3 - 1\}$; (d) $\{(x, y) \mid x = (y + 1)^3 - 2\}$.

5. Dada $f(x) = 2x - 1$, ache (a) $f(3)$; (b) $f(-2)$; (c) $f(0)$; (d) $f(a + 1)$; (e) $f(x + 1)$; (f) $f(2x)$; (g) $2f(x)$; (h) $f(x + h)$; (i) $f(x) + f(h)$; (j) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$.

6. Dada $f(x) = \dfrac{3}{x}$, ache (a) $f(1)$; (b) $f(-3)$; (c) $f(6)$; (d) $f(\frac{1}{3})$; (e) $f\left(\dfrac{3}{a}\right)$; (f) $f\left(\dfrac{3}{x}\right)$; (g) $\dfrac{f(3)}{f(x)}$; (h) $f(x - 3)$; (i) $f(x) - f(3)$; (j) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$.

7. Dada $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$, ache (a) $f(-2)$; (b) $f(-1)$; (c) $f(0)$; (d) $f(3)$; (e) $f(h + 1)$; (f) $f(2x^2)$; (g) $f(x^2 - 3)$; (h) $f(x + h)$; (i) $f(x) + f(h)$; (j) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$.

8. Dada $g(x) = 3x^2 - 4$, ache (a) $g(-4)$; (b) $g(\frac{1}{2})$; (c) $g(x^2)$; (d) $g(3x^2 - 4)$; (e) $g(x - h)$; (f) $g(x) - g(h)$; (g) $\dfrac{g(x + h) - g(x)}{h}$, $h \neq 0$.

9. Dada $F(x) = \sqrt{2x + 3}$, ache (a) $F(-1)$; (b) $F(4)$; (c) $F(\frac{1}{2})$; (d) $F(11)$; (e) $F(2x + 3)$; (f) $\dfrac{F(x + h) - F(x)}{h}$, $h \neq 0$.

10. Dada $G(x) = \sqrt{4 - x}$, ache (a) $G(-5)$; (b) $G(0)$; (c) $G(1)$; (d) $G(\frac{11}{9})$; (e) $G(4 - x)$; (f) $\dfrac{G(x + h) - G(x)}{h}$; $h \neq 0$

Nos Exercícios de 11 a 20, as funções f e g são definidas. Em cada exercício, defina as seguintes funções e determine o domínio da função resultante: (a) $f + g$; (b) $f - g$; (c) $f \cdot g$; (d) f/g; (e) g/f.

11. $f(x) = x - 5$; $g(x) = x^2 - 1$

12. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 + 1$

13. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$

14. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 4 - x^2$

15. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 1$

16. $f(x) = |x|$; $g(x) = |x - 3|$

17. $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = 3x - 2$

18. $f(x) = \sqrt{x + 4}$; $g(x) = x^2 - 4$

19. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$; $g(x) = \dfrac{x}{x - 2}$

20. $f(x) = x^2$; $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Nos Exercícios de 21 a 30, estão definidas as funções f e g. Em cada exercício, defina as seguintes funções e determine o domínio da função composta: (a) $f \circ g$; (b) $g \circ f$; (c) $f \circ f$; (d) $g \circ g$.

21. $f(x) = x - 2$; $g(x) = x + 7$

22. $f(x) = 3 - 2x$; $g(x) = 6 - 3x$

23. As funções do Exercício 11.

24. As funções do Exercício 12.

25. $f(x) = \sqrt{x - 2}$; $g(x) = x^2 - 2$

26. $f(x) = x^2 - 1$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$

27. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $g(x) = \sqrt{x}$

28. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = -\dfrac{1}{x}$

29. $f(x) = |x|$; $g(x) = |x + 2|$

30. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; $g(x) = \sqrt{x - 1}$

Nos Exercícios 31 e 32 a função f está definida. Em cada exercício, defina as seguintes funções e determine o domínio da função resultante: (a) $f(x^2)$; (b) $[f(x)]^2$; (c) $(f \circ f)(x)$.

31. $f(x) = 2x - 3$

32. $f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$

33. Dada $G(x) = |x - 2| - |x| + 2$, expresse $G(x)$ sem as barras de valor absoluto, se x estiver no intervalo dado: (a) $[2, +\infty)$; (b) $(-\infty, 0)$; (c) $[0, 2)$.

34. Dada $f(t) = \dfrac{|3 + t| - |t| - 3}{t}$, expresse $f(t)$ sem as barras de valor absoluto, se t estiver no intervalo dado: (a) $(0, +\infty)$; (b) $[-3, 0)$; (c) $(-\infty, -3)$.

35. Dada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

ache (a) $f(1)$; (b) $f(-1)$; (c) $f(4)$; (d) $f(-4)$; (e) $f(-x)$; (f) $f(x + 1)$; (g) $f(x^2)$; (h) $f(-x^2)$.

Em cada caso dos Exercícios 36 e 37, determine se a função dada é par, ímpar ou nenhuma das duas.

36. (a) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$ (b) $f(x) = 5x^3 - 7x$
(c) $f(s) = s^2 + 2s + 2$ (d) $g(x) = x^6 - 1$
(e) $h(t) = 5t^7 + 1$ (f) $f(x) = |x|$
(g) $f(y) = \dfrac{y^3 - y}{y^2 + 1}$ (h) $g(z) = \dfrac{z - 1}{z + 1}$

37. (a) $g(x) = 5x^2 - 4$ (b) $f(x) = x^3 + 1$
(c) $f(t) = 4t^5 + 3t^3 - 2t$ (d) $g(r) = \dfrac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$
(e) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ (f) $h(x) = \dfrac{4x^2 - 5}{2x^3 + x}$
(g) $f(z) = (z - 1)^2$ (h) $g(x) = \dfrac{|x|}{x^2 + 1}$
(i) $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ (j) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

38. Existe uma função que é par e ímpar. Qual é?

39. Determine se a função composta $f \circ g$ é par ou ímpar em cada um dos seguintes casos: (a) f e g são ambas pares; (b) f e g são ambas ímpares; (c) f é par e g é ímpar; (d) f é ímpar e g é par.

Se f e g forem duas funções tais que $(f \circ g)(x) = x$ e $(g \circ f)(x) = x$, então f e g serão funções inversas. Nos Exercícios de 40 a 42, mostre que f e g são funções inversas.

40. $f(x) = 2x - 3$ e $g(x) = \dfrac{x + 3}{2}$

41. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ e $g(x) = \dfrac{1 - x}{x}$

42. $f(x) = x^2$, $x \geqslant 0$ e $g(x) = \sqrt{x}$

1.5 GRÁFICOS DE FUNÇÕES

Como preparação para o nosso estudo de limites e continuidade no Capítulo 2, discutiremos os gráficos de funções. Lembre-se, da Secção 1.4, que o gráfico de uma função f é o mesmo que o gráfico da equação $y = f(x)$. Enquanto o domínio de uma função geralmente torna-se evidente a partir da definição da função, a imagem é determinada freqüentemente pelo gráfico da função.

EXEMPLO 1 A **função valor absoluto** é definida por

$$f(x) = |x|$$

Determine o domínio e a imagem da função valor absoluto e faça um esboço de seu gráfico.

Solução Da definição (1.1.8) de $|x|$, temos

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

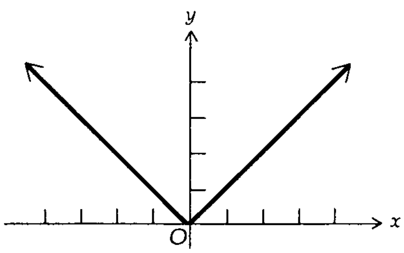


FIGURA 1

O domínio é $(-\infty, +\infty)$. O gráfico de f consiste em duas semi-retas que passam pela origem e acima do eixo x; uma delas tem inclinação igual a 1 e a outra tem -1. Veja a Figura 1. A imagem é $[0, +\infty)$.

EXEMPLO 2 Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{se } x \leqslant -1 \\ 1 & \text{se } -1 < x \leqslant 2 \\ 4 & \text{se } 2 < x \end{cases}$$

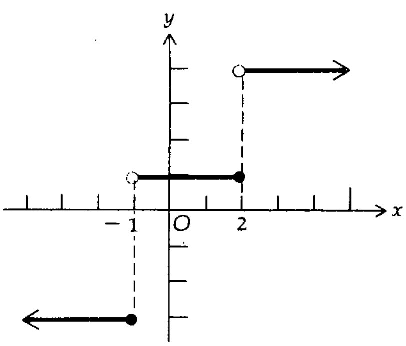


FIGURA 2

Determine o domínio e a imagem de f e desenhe um esboço de seu gráfico.

Solução O domínio é $(-\infty, +\infty)$ e um esboço do gráfico aparece na Figura 2. A imagem consiste nos três números -3, 1 e 4.

EXEMPLO 3 Seja g a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } x < 1 \\ x^2 & \text{se } 1 \leqslant x \end{cases}$$

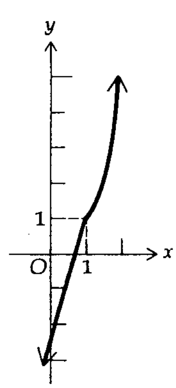


FIGURA 3

Determine o domínio e a imagem de g e faça um esboço de seu gráfico.

Solução O domínio de g é $(-\infty, +\infty)$. O gráfico consiste na parte da reta $y = 3x - 2$ para a qual $x < 1$ e na parte da parábola $y = x^2$ para a qual $1 \leqslant x$. Um esboço do gráfico está na Figura 3. A imagem é $(-\infty, +\infty)$.

EXEMPLO 4 A função h é definida por

$$h(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Determine o domínio e a imagem de h e faça um esboço de seu gráfico.

Solução Como $h(x)$ está definida para todo x exceto 3, o domínio de h consiste em todos os números exceto 3. Quando $x = 3$, ambos o numerador e o denominador são nulos e 0/0 é indefinido.

Fatorando o numerador em $(x - 3)(x + 3)$ obtemos

$$h(x) = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3}$$

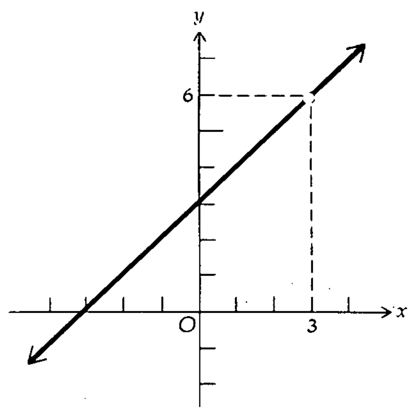


FIGURA 4

ou $h(x) = x + 3$, desde que $x \neq 3$. Em outras palavras, a função h pode ser definida por

$$h(x) = x + 3 \quad \text{se } x \neq 3$$

O gráfico consiste em todos os pontos sobre a reta $y = x + 3$, exceto o ponto (3, 6). Veja a Figura 4. A imagem de h é o conjunto de todos os números reais exceto 6.

EXEMPLO 5 Seja H a função definida por

$$H(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x \neq 3 \\ 2 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

Determine o domínio e a imagem de H e faça um esboço de seu gráfico.

Solução Como H está definida para todos os valores de x, seu domínio é $(-\infty, +\infty)$. Um esboço do gráfico de H é mostrado na Figura 5. A imagem é o conjunto de todos os números reais exceto 6.

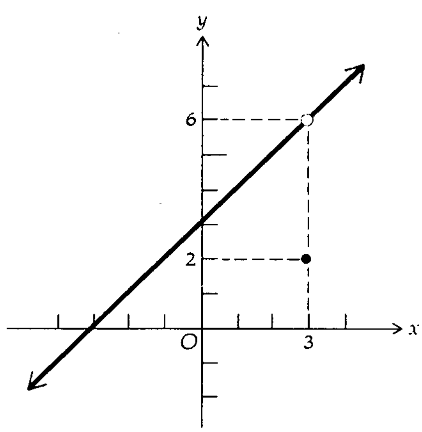


FIGURA 5

EXEMPLO 6 A função f é definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 2 \\ 7 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

Determine o domínio e a imagem de f e faça um esboço de seu gráfico.

Solução Como f é definida para todos os valores de x, o domínio é $(-\infty, +\infty)$. O gráfico mostrado na Figura 6 consiste nos pontos (2, 7) e todos os pontos sobre a parábola $y = x^2$ exceto (2, 4). A imagem é $[0, +\infty)$.

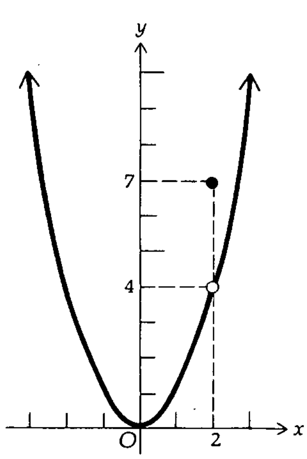


FIGURA 6

EXEMPLO 7 Seja F a função definida por

$$F(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x < 3 \\ 5 & \text{se } x = 3 \\ 2x + 1 & \text{se } 3 < x \end{cases}$$

Determine o domínio e a imagem de F e faça um esboço de seu gráfico.

Solução O domínio de F é $(-\infty, +\infty)$. A Figura 7 mostra um esboço do gráfico de F; consiste em parte da reta $y = x - 1$ para $x < 3$, o ponto (3, 5) e parte da reta $y = 2x + 1$ para $3 < x$. Os valores funcionais são ou números menores do que 2, o número 5, ou números maiores do que 7. Logo, a imagem de F é o número 5 e aqueles números em $(-\infty, 2) \cup (7, +\infty)$.

EXEMPLO 8 A função g é definida por

$$g(x) = \sqrt{x(x-2)}$$

Determine o domínio e a imagem de g e faça um esboço de seu gráfico.

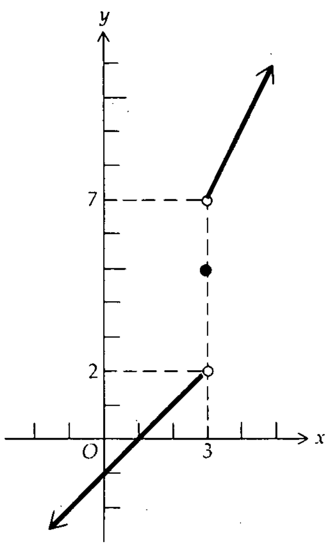


FIGURA 7

Solução Como $\sqrt{x(x-2)}$ não é um número real quando $x(x-2) < 0$, o domínio de g consiste em todos os valores de x para os quais $x(x-2) \geqslant 0$. Essa inequação estará satisfeita quando ocorrer um dos dois casos: $x \geqslant 0$ e $x - 2 \geqslant 0$; ou $x \leqslant 0$ e $x - 2 \leqslant 0$.

Caso 1: $x \geqslant 0$ e $x - 2 \geqslant 0$. Isto é,

$x \geqslant 0$ e $x \geqslant 2$

Ambas as desigualdades estão verificadas se $x \geqslant 2$, que é o intervalo $[2, +\infty)$.

Caso 2: $x \leqslant 0$ e $x - 2 \leqslant 0$. Isto é,

$x \leqslant 0$ e $x \leqslant 2$

Ambas as desigualdades ocorrem se $x \leqslant 0$, que é o intervalo $(-\infty, 0]$.

Combinando as soluções dos dois casos obteremos o domínio de g. Ele é $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$.

A Figura 8 mostra um esboço do gráfico de g. A imagem de g é $[0, +\infty)$.

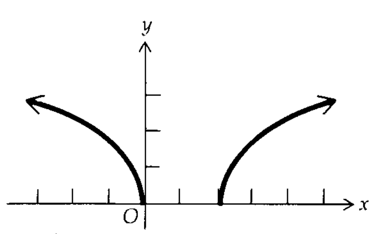


FIGURA 8

O símbolo $[\![x]\!]$ é usado para denotar o maior inteiro, menor ou igual a x; isto é,

$[\![x]\!] = n$ se $n \leqslant x < n + 1$, onde n é um inteiro

Essa função é chamada de **função maior inteiro**. Portanto, se I for essa função

$I = \{(x, y) \mid y = [\![x]\!]\}$

e o domínio de I será $(-\infty, +\infty)$. Para obter um esboço do gráfico de I, primeiro calculamos alguns valores funcionais.

Se $-5 \leqslant x < -4$, $[\![x]\!] = -5$

Se $-4 \leqslant x < -3$, $[\![x]\!] = -4$

Se $-3 \leqslant x < -2$, $[\![x]\!] = -3$

Se $-2 \leqslant x < -1$, $[\![x]\!] = -2$

Se $-1 \leqslant x < 0$, $[\![x]\!] = -1$

Se $0 \leqslant x < 1$, $[\![x]\!] = 0$

Se $1 \leqslant x < 2$, $[\![x]\!] = 1$

Se $2 \leqslant x < 3$, $[\![x]\!] = 2$

Se $3 \leqslant x < 4$, $[\![x]\!] = 3$

Se $4 \leqslant x < 5$, $[\![x]\!] = 4$

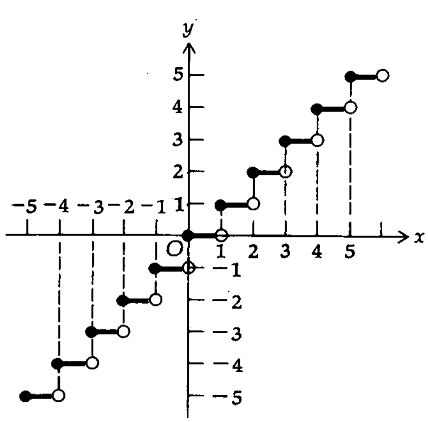


FIGURA 9

A Figura 9 mostra um esboço do gráfico de I. A imagem é o conjunto de todos os inteiros.

EXEMPLO 9 Faça um esboço do gráfico da função definida por

$G(x) = [\![x]\!] - x$

Dê o domínio e a imagem de G.

Solução Como G está definida para todos os valores de x, seu domínio é $(-\infty, +\infty)$. Da definição de $[\![x]\!]$, temos o seguinte:

Se $-2 \leqslant x < -1$, $[\![x]\!] = -2$; portanto $G(x) = -2 - x$

Se $-1 \leqslant x < 0$, $[\![x]\!] = -1$; portanto $G(x) = -1 - x$

Se $0 \leqslant x < 1$, $[\![x]\!] = 0$; portanto $G(x) = -x$

Se $1 \leqslant x < 2$, $[\![x]\!] = 1$; portanto $G(x) = 1 - x$

Se $2 \leqslant x < 3$, $[\![x]\!] = 2$; portanto $G(x) = 2 - x$

e assim por diante. Em termos mais gerais, se n for um inteiro qualquer, então

Se $n \leqslant x < n + 1$, $[\![x]\!] = n$; portanto $G(x) = n - x$

Com estes valores de funções obtemos o esboço do gráfico de G, mostrado na Figura 10. Do gráfico observamos que a imagem de G é $(-1, 0]$.

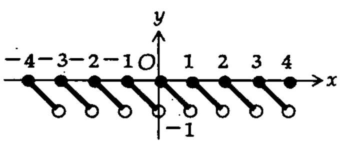


FIGURA 10

EXERCÍCIOS 1.5

Em cada exercício, determine o domínio e a imagem da função e desenhe um esboço de seu gráfico.

1. $f(x) = 3x - 1$

2. $g(x) = 6 - 2x$

3. $F(x) = x^2 - 1$

4. $G(x) = 5 - x^2$

5. $g(x) = \sqrt{x + 1}$

6. $f(x) = \sqrt{3x - 6}$

7. $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$

8. $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

9. $h(x) = \sqrt{-x}$

10. $H(x) = |x - 1|$

11. $f(x) = |4 - x|$

12. $h(x) = |x| - 1$

13. $F(x) = 4 - |x|$

14. $f(x) = 5 - |x + 1|$

15. $g(x) = |x - 2| + 4$

16. $F(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{2x + 1}$

17. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$

18. $g(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 - x - 6}$

19. $G(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x \leqslant 3 \\ 2 & \text{se } 3 < x \end{cases}$

20. $h(x) = \begin{cases} -4 & \text{se } x < -2 \\ -1 & \text{se } -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ 3 & \text{se } 2 < x \end{cases}$

21. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \neq 2 \\ 0 & \text{se } x = 2 \end{cases}$

22. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x \neq -3 \\ -2 & \text{se } x = -3 \end{cases}$

23. $H(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 3 \\ 2x - 1 & \text{se } 3 \leqslant x \end{cases}$

24. $\phi(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{se } x < -5 \\ \sqrt{25 - x^2} & \text{se } -5 \leqslant x \leqslant 5 \\ x - 5 & \text{se } 5 < x \end{cases}$

25. $f(x) = \begin{cases} x + 6 & \text{se } x \leqslant -4 \\ \sqrt{16 - x^2} & \text{se } -4 < x < 4 \\ 6 - x & \text{se } 4 \leqslant x \end{cases}$

26. $g(x) = \begin{cases} 6x + 7 & \text{se } x < -2 \\ 3 & \text{se } x = -2 \\ 4 - x & \text{se } -2 < x \end{cases}$

27. $F(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x^2 + 1 & \text{se } 0 < x \end{cases}$

28. $G(x) = \dfrac{(x^2 + 3x - 4)(x^2 - 5x + 6)}{(x^2 - 3x + 2)(x - 3)}$

29. $F(x) = \dfrac{(x + 1)(x^2 + 3x - 10)}{x^2 + 6x + 5}$

30. $h(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

31. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$

32. $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + x + 3}{x + 3}$

33. $g(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$

34. $F(x) = \dfrac{x^4 + x^3 - 9x^2 - 3x + 18}{x^2 + x - 6}$

35. $h(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2 - 6x - 30}{x + 5}$

36. $g(x) = |x| \cdot |x - 1|$

37. $f(x) = |x| + |x - 1|$

38. $F(x) = [\![x + 2]\!]$

39. $g(x) = [\![x - 4]\!]$

40. $H(x) = |x| + [\![x]\!]$

41. $G(x) = x - [\![x]\!]$

42. $h(x) = [\![x^2]\!]$

43. $g(x) = \dfrac{[\![x]\!]}{|x|}$

44. $h(x) = \dfrac{|x|}{[\![x]\!]}$

1.6 AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Você já deve ter feito algum estudo de trigonometria. Mas, dada a importância das funções trigonométricas em Cálculo, apresentamos aqui um breve resumo delas.

Em geometria um **ângulo** é definido como a união de dois raios chamados de **lados**, tendo um extremo em comum denominado **vértice**. Qualquer ângulo é congruente a um ângulo tendo vértice na origem e um lado, chamado de **lado inicial**, sobre o lado positivo do eixo x. Dizemos que tal ângulo está na **posição padrão**. A Figura 1 mostra um ângulo AOB na posição padrão com OA como lado inicial. O outro lado OB é chamado de **lado final**. O ângulo AOB pode ser formado ao girarmos o lado OA até o lado OB; sob tal rotação o ponto A move-se ao longo da circunferência de centro O e raio $|\overline{OA}|$, até o ponto B.

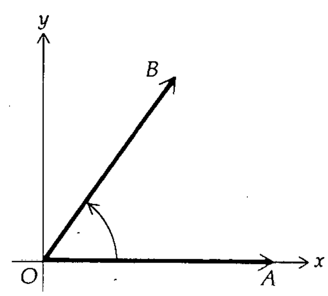


FIGURA 1

Quando os problemas envolvem ângulos de triângulos, a medida de um ângulo é dada usualmente em graus. Mas, em Cálculo estamos interessados em funções trigonométricas de números reais e essas funções estão definidas em termos da *medida de ângulos em radianos.*

O comprimento de um arco de uma circunferência é usado para definir a medida em radianos de um ângulo.

1.6.1 DEFINIÇÃO

Seja AOB um ângulo na posição padrão e $|\overline{OA}| = 1$. Se s unidades for o comprimento do arco da circunferência percorrido pelo ponto A quando o lado inicial OA é girado até o lado final OB, a **medida em radianos** t, do ângulo AOB, será dada por

$t = s$ se a rotação for no sentido anti-horário

e

$t = -s$ se a rotação for no sentido horário

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Do fato de que a medida da circunferência do círculo unitário é 2π, as medidas em radianos dos ângulos na Figura 2 (a)-(f) são determinadas. Elas são $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $-\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $-\frac{3}{4}\pi$ e $\frac{7}{4}\pi$, respectivamente. ◀

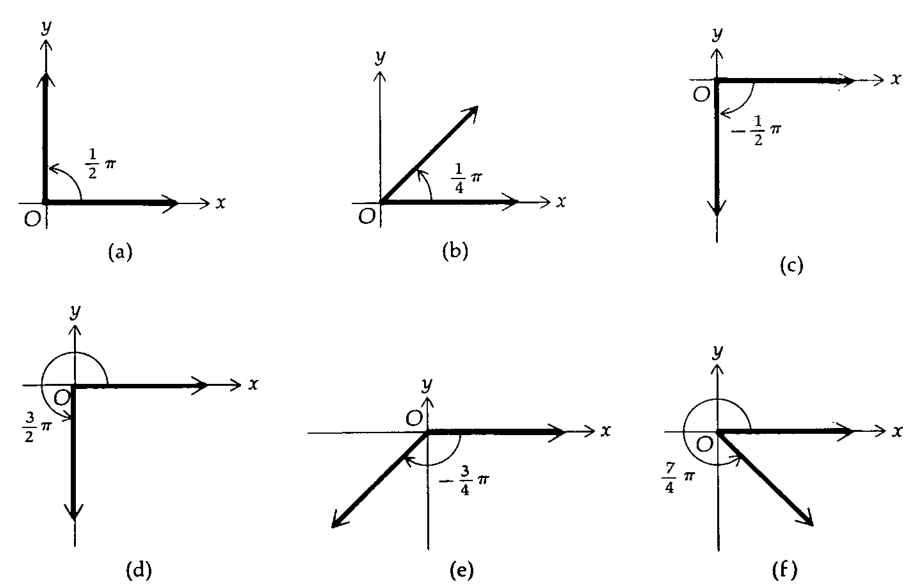


FIGURA 2

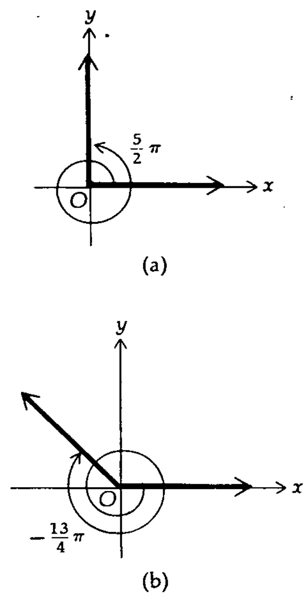


FIGURA 3

Na Definição 1.6.1, é possível ocorrer mais do que uma revolução completa na relação de OA.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** A Figura 3(a) mostra um ângulo cuja medida em radianos é $\frac{5}{2}\pi$, e a Figura 3(b) mostra um cuja medida em radianos é $-\frac{13}{4}\pi$. ◀

Um ângulo formado por uma revolução completa, de tal forma que OA seja coincidente com OB, tem por medida 360 graus e 2π como medida em radianos. Assim sendo, há a seguinte correspondência entre as medidas em graus e radianos (onde o símbolo $\sim$ indica que as medidas dadas são de ângulos iguais ou congruentes):

$$360° \sim 2\pi \text{ rad} \qquad 180° \sim \pi \text{ rad}$$

Disso segue que

$$1° \sim \tfrac{1}{180}\pi \text{ rad} \qquad 1 \text{ rad} \sim \frac{180°}{\pi}$$

$$\approx 57°18'$$

Note que o símbolo $\approx$ antes de $57°18'$ indica que 1 rad e aproximadamente $57°18'$ são medidas do mesmo ângulo ou de ângulos congruentes.

Dessa correspondência, a medida de um ângulo pode ser convertida de um sistema de unidades para o outro.

Tabela 1

Medida em graus	*Medida em radianos*
30	$\frac{1}{6}\pi$
45	$\frac{1}{4}\pi$
60	$\frac{1}{3}\pi$
90	$\frac{1}{2}\pi$
120	$\frac{2}{3}\pi$
135	$\frac{3}{4}\pi$
150	$\frac{5}{6}\pi$
180	π
270	$\frac{3}{2}\pi$
360	2π

EXEMPLO 1 (a) Ache a medida em radianos equivalente a 162°; (b) encontre a medida equivalente em graus para $\frac{5}{12}\pi$ rad.

Solução

(a) $162° \sim 162 \cdot \frac{1}{180}\pi \text{ rad}$ (b) $\frac{5}{12}\pi \text{ rad} \sim \frac{5}{12}\pi \cdot \frac{180°}{\pi}$

$162° \sim \frac{9}{10}\pi \text{ rad}$ $\frac{5}{12}\pi \text{ rad} \sim 75°$

A Tabela 1 dá a correspondência em graus e radianos da medida de alguns ângulos. Vamos definir agora as funções *seno* e *co-seno* de qualquer número real.

1.6.2 DEFINIÇÃO

Suponha que t seja um número real. Coloque na posição padrão um ângulo com t rad de medida e seja P a intersecção do lado final do ângulo com a circunferência do círculo unitário com centro na origem. Se P for o ponto (x, y), então a função **seno** será definida por

$$\text{sen } t = y$$

então a função **seno** será definida por

$$\cos t = x$$

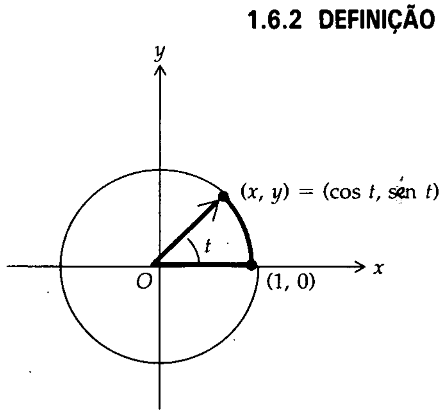


FIGURA 4

Da definição acima, vemos que sen t e cos t estão definidas para todos os valores de t. Assim sendo, o domínio das funções seno e co-seno é o conjunto de todos os números reais. A Figura 4 mostra o ponto (cos t, sen t) quando $0 < t < \frac{1}{2}\pi$, e a Figura 5 mostra o ponto (cos t, sen t) quando $-\frac{3}{2}\pi < t < -\pi$.

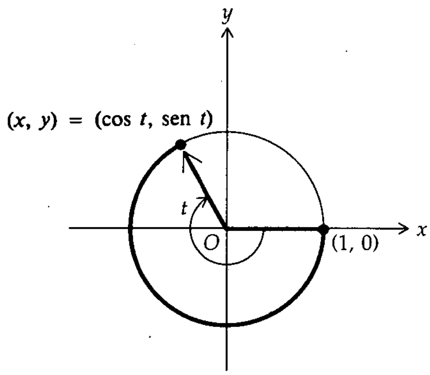


FIGURA 5

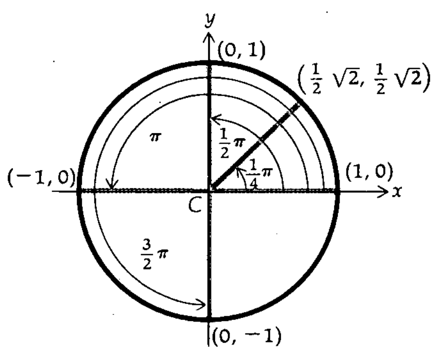


FIGURA 6

Tabela 2

t	sen t	cos t
0	0	1
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}\pi$	1	0
$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
π	0	-1
$\frac{3}{2}\pi$	-1	0
2π	0	1

O maior valor de qualquer uma das duas funções é 1 e o menor é -1. Veremos posteriormente que as funções seno e co-seno assumem todos os valores entre -1 e 1; segue, portanto, que a imagem das duas funções é $[-1, 1]$.

Para certos valores de t, o seno e o co-seno são facilmente obtidos de uma figura. Da Figura 6 vemos que $\operatorname{sen} 0 = 0$ e $\cos 0 = 1$, $\operatorname{sen} \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ e $\cos \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi = 1$ e $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$, $\operatorname{sen} \pi = 0$ e $\cos \pi = -1$, $\operatorname{sen} \frac{3}{2}\pi = -1$ e $\cos \frac{3}{2}\pi = 0$. A Tabela 2 dá esses valores e outros muitos usados.

Uma equação da circunferência do círculo unitário com centro na origem é $x^2 + y^2 = 1$. Como $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$, segue que

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1} \tag{1}$$

Note que $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t$ significam $(\operatorname{sen} t)^2$ e $(\cos t)^2$. A igualdade (1) é uma identidade, pois é válida para todo número real t. É chamada de **identidade fundamental de Pitágoras**, mostrando a relação entre os valores seno e co-seno, e pode ser usada para calcular um deles quando o outro é conhecido.

As Figuras 7 e 8 mostram ângulos com uma medida em radianos negativa $-t$ e os ângulos correspondentes tendo uma medida em radianos positiva t. Dessas figuras, observe que

$$\boxed{\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t \text{ e } \cos(-t) = \cos t}$$

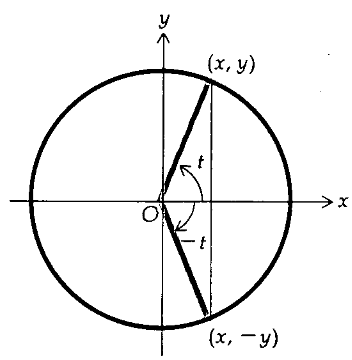


FIGURA 7

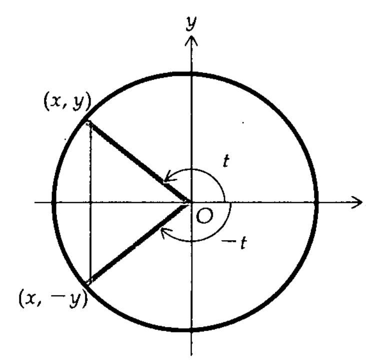


FIGURA 8

Essas equações valem para todo número real t, pois os pontos onde os lados finais dos ângulos (tendo medidas em radianos t e $-t$) interceptam a circunferência do círculo unitário, têm abscissas e ordenadas iguais que diferem somente em sinal. Logo, são identidades. Dessas igualdades, segue que seno é uma função ímpar e co-seno é uma função par.

Da Definição 1.6.2 são obtidas as seguintes identidades:

$$\boxed{\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t \text{ e } \cos(t + 2\pi) = \cos t} \tag{2}$$

A propriedade do seno e do co-seno estabelecida pelas igualdades (2) é chamada de **periodicidade**.

1.6.3 DEFINIÇÃO

Uma função f será **periódica** se existir um número real $p \neq 0$ tal que quando x estiver no domínio de f, então $x + p$ estará também no domínio de f e

$$f(x + p) = f(x)$$

O menor número real positivo p é chamado de **período** de f.

Compare essa definição com as igualdades (2). Como podemos mostrar que 2π é o menor número positivo p com a propriedade segundo a qual $\text{sen}(t + p) = \text{sen}\, t$ e $\cos(t + p) = \cos t$, o seno e o co-seno são periódicos com período 2π, isto é, sempre que o valor da variável independente t aumentar em 2π, o valor de cada uma das funções será repetido. É devido à periodicidade do seno e do co-seno que essas funções têm importantes aplicações, associadas a fenômenos que se repetem periodicamente, tais como movimentos ondulatórios, correntes elétricas alternadas, cordas vibratórias, pêndulos oscilantes, ciclos de negócios e ritmos biológicos.

EXEMPLO 2 Use a periodicidade das funções seno e co-seno, bem como os valores de sen t e cos t quando $0 \leqslant t < 2\pi$ para determinar o valor exato de cada um dos seguintes: (a) $\text{sen}\, \frac{17}{4}\pi$; (b) $\cos \frac{7}{3}\pi$; (c) $\text{sen}\, \frac{15}{2}\pi$; (d) $\cos(-\frac{7}{6}\pi)$

Solução

(a) $\text{sen}\,\frac{17}{4}\pi = \text{sen}(\frac{1}{4}\pi + 2 \cdot 2\pi) = \text{sen}\,\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

(b) $\cos\frac{7}{3}\pi = \cos(\frac{1}{3}\pi + 2\pi) = \cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$

(c) $\text{sen}\,\frac{15}{2}\pi = \text{sen}(\frac{3}{2}\pi + 3 \cdot 2\pi) = \text{sen}\,\frac{3}{2}\pi = -1$

(d) $\cos(-\frac{7}{6}\pi) = \cos[\frac{5}{6}\pi + (-1)2\pi] = \cos\frac{5}{6}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Vamos definir agora mais quatro funções trigonométricas. Elas são definidas em termos do seno e co-seno.

1.6.4 DEFINIÇÃO

As funções **tangente** e **secante** são definidas por

$$\text{tg}\, t = \frac{\text{sen}\, t}{\cos t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t}$$

para todo número real t para o qual $\cos t \neq 0$.
As funções **co-tangente** e **co-secante** são definidas por

$$\text{cotg}\, t = \frac{\cos t}{\text{sen}\, t} \qquad \text{cosec}\, t = \frac{1}{\text{sen}\, t}$$

para todo número real t para o qual $\text{sen}\, t \neq 0$.

As funções tangente e secante não estão definidas quando $\cos t = 0$. Assim sendo, o domínio das funções tangente e secante é o conjunto de todos os números reais exceto os números da forma $\frac{1}{2}\pi + k\pi$, onde k é qualquer inteiro. Analogamente, como cotg t e cosec não estão definidas quando $\text{sen}\, t = 0$, o domínio das funções co-tangente e co-secante é o conjunto de todos os números reais exceto os números da forma $k\pi$, onde k é qualquer inteiro.

Podemos mostrar que a tangente e a co-tangente são periódicas, com período π, isto é,

$$\boxed{\text{tg}(t + \pi) = \text{tg}\, t \text{ e } \text{cotg}(t + \pi) = \text{cotg}\, t}$$

Além disso, a secante e a co-secante são periódicas com período 2π, logo

$$\boxed{\sec(t + 2\pi) = \sec t \quad \text{e} \quad \operatorname{cosec}(t + 2\pi) = \operatorname{cosec} t}$$

Usando a identidade fundamental de Pitágoras (1) e a Definição 1.6.4, obtemos duas outras identidades. Uma dessas identidades é obtida quando dividimos ambos os lados de (1) por $\cos^2 t$, e a outra é obtida ao dividirmos ambos os lados de (1) por $\operatorname{sen}^2 t$. Temos

$$\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} \quad \text{e} \quad \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen}^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 t}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}^2 t + 1 = \sec^2 t \quad \text{e} \quad 1 + \operatorname{cotg}^2 t = \operatorname{cosec}^2 t}$$

Essas duas identidades são chamadas de identidades de Pitágoras.

Três outras identidades importantes que seguem da Definição 1.6.4 são

$$\boxed{\operatorname{sen} t \operatorname{cosec} t = 1 \qquad \cos t \sec t = 1 \qquad \operatorname{tg} t \operatorname{cotg} t = 1}$$

Essas três identidades, as três identidades de Pitágoras, e as duas identidades na Definição 1.6.4 que definem a tangente e a co-tangente são as *oito identidades trigonométricas fundamentais*, as quais, como outras fórmulas da Trigonometria, aparecem no Apêndice.

Definimos as funções trigonométricas com domínios no conjunto dos números reais. Existem importantes aplicações das funções trigonométricas para as quais os domínios são conjuntos de ângulos. Para esse propósito, uma função trigonométrica do ângulo θ é a função correspondente do número real t, onde t é a medida de θ em radianos.

1.6.5 DEFINIÇÃO Se θ for um ângulo cuja medida em radianos é t, então

$$\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} t \qquad \cos \theta = \cos t \qquad \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} t$$
$$\operatorname{cotg} \theta = \operatorname{cotg} t \qquad \sec \theta = \sec t \qquad \operatorname{cosec} \theta = \operatorname{cosec} t$$

Quando consideramos uma função trigonométrica de um ângulo θ, freqüentemente a medida do ângulo é usada em lugar de θ. Por exemplo, se a medida de um ângulo θ for 60° (ou, equivalentemente, a medida de θ em radianos for $\frac{1}{3}\pi$), então, em lugar de sen θ, poderemos escrever sen 60° ou sen $\frac{1}{3}\pi$. Observe que quando a medida de um ângulo for dada em graus, o símbolo de graus aparece escrito. Mas, quando não houver nenhum símbolo, devemos entender que a medida do ângulo é dada em radianos. Por exemplo, cos 2° significa o co-seno do ângulo cuja medida é 2 graus, enquanto que cos 2 significa o co-seno do ângulo cuja medida é 2 rad. Isso é consistente com o fato de que o co-seno de um ângulo cuja medida em radianos é 2 é igual ao co-seno do número real 2.

Agora mostraremos como a função tangente pode ser usada em conjunto com a inclinação de uma reta. Primeiro definimos o *ângulo de inclinação* de uma reta.

1.6.6 DEFINIÇÃO O **ângulo de inclinação** de uma reta não-paralela ao eixo x é o menor ângulo medido no sentido anti-horário, a partir do sentido positivo do eixo x até a reta. O ângulo de inclinação de uma reta paralela ao eixo x é definido como sendo zero.

Se α for o ângulo de inclinação de uma reta, então $0° \leqslant \alpha < 180°$. A Figura 9 mostra a reta L para a qual $0° < \alpha < 90°$ e a Figura 10 mostra aquela para a qual $90° < \alpha < 180°$.

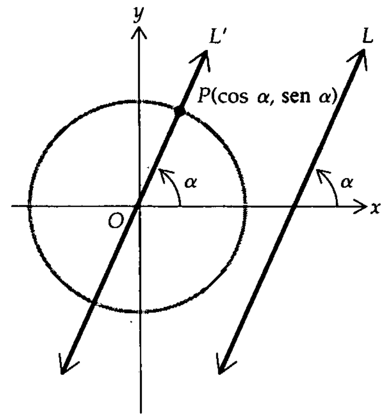


FIGURA 9

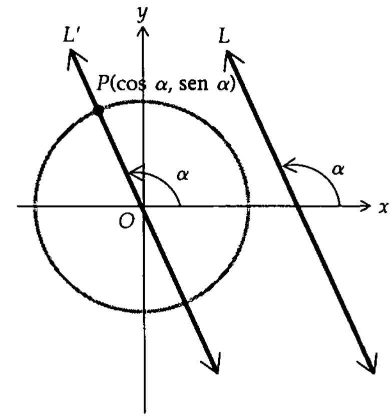


FIGURA 10

1.6.7 TEOREMA Se α for o ângulo de inclinação da reta L, não-paralela ao eixo y, então a inclinação m de L dada por

$$m = \operatorname{tg} \alpha$$

Prova Veja as Figuras 9 e 10, que mostram a reta dada L, cujo ângulo de inclinação é α e cuja inclinação é m. A reta L' que passa pela origem e é paralela a L, também tem inclinação m e um ângulo de inclinação α. O ponto P (cos α, sen α) é a intersecção de L' com a circunferência do círculo unitário U. Como o ponto (0, 0) também está em L', segue, da Definição 1.2.2 que

$$\begin{aligned} m &= \frac{\operatorname{sen} \alpha - 0}{\cos \alpha - 0} \\ &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \\ &= \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

■

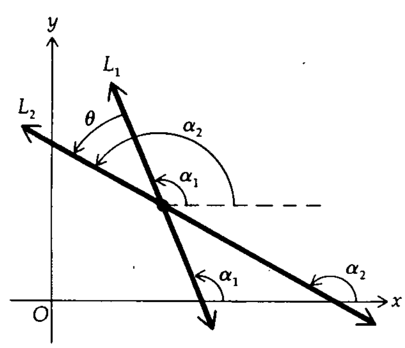


FIGURA 11

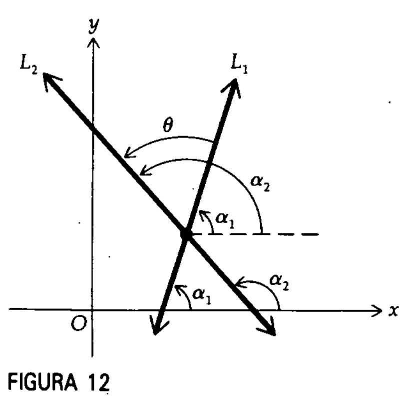


FIGURA 12

Se a reta L for vertical, o ângulo de inclinação de L será 90° e tg 90° não existe. Isso é consistente com o fato de que a inclinação de uma reta vertical não está definida.

O Teorema 1.6.7 pode ser usado para obter uma fórmula para encontrar o ângulo entre duas retas concorrentes não-verticais. Quando duas retas se interceptam, formam dois ângulos suplementares com vértice no ponto de intersecção. Para distinguir esses dois ângulos, seja L_2 a reta com o maior ângulo de inclinação α_2 e seja L_1 a outra reta cujo ângulo de inclinação é α_1. Se θ for o ângulo entre as duas retas, então definimos

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1$$

Se L_1 e L_2 forem paralelas, então $\alpha_1 = \alpha_2$ e o ângulo entre as duas retas será 0°. Assim, se L_1 e L_2 forem duas retas distintas, então $0° \leqslant \theta < 180°$. Veja as Figuras 11 e 12. O teorema a seguir possibilita-nos encontrar θ quando forem conhecidas as inclinações de L_1 e L_2.

1.6.8 TEOREMA Sejam L_1 e L_2 duas retas não-verticais que se interceptam e não são perpendiculares e seja L_2 a reta com maior ângulo de inclinação. Então, se m_1 for a inclinação de L_1, m_2, a de L_2 e θ for o ângulo entre L_1 e L_2,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

A prova do Teorema 1.6.8 é proposta como exercício (veja o Exercício 34).

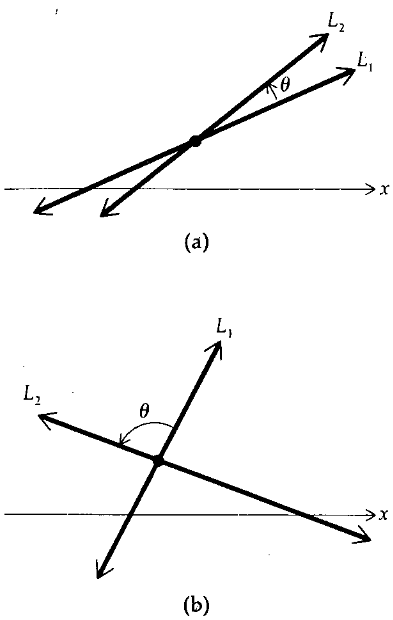


FIGURA 13

EXEMPLO 3 Determine o ângulo entre as retas com as inclinações: (a) $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{5}$; (b) 2 e $-\frac{2}{5}$.

Solução Quando usamos a fórmula do Teorema 1.6.8, m_2 deve ser a inclinação mais acentuada da reta. Para a parte (a), veja a Figura 13(a) onde $m_2 = \frac{3}{4}$ e $m_1 = \frac{2}{5}$. Para a parte (b), veja a Figura 13(b) onde $m_2 = -\frac{2}{5}$ e $m_1 = 2$. Em cada parte calculamos, com aproximação de 1 grau, o ângulo θ entre as retas.

$$\text{(a) } \operatorname{tg}\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{2}{5}}{1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}} = \frac{15 - 8}{20 + 6} = \frac{7}{26}$$

$$\theta = 15°$$

$$\text{(b) } \operatorname{tg}\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-\frac{2}{5} - 2}{1 + (-\frac{2}{5})(2)} = \frac{-2 - 10}{5 - 4} = -12$$

$$\theta = 95°$$

O procedimento usado no Exemplo 3 pode ser aplicado para encontrarmos os ângulos em um triângulo. Veja os Exercícios 41 e 42.

Os exercícios dessa secção destinam-se à revisão de alguns dos conceitos fundamentais de trigonometria. Ao fazê-los, você poderá achar útil consultar um texto de trigonometria.

EXERCÍCIOS 1.6

Nos Exercícios 1 e 2, ache a medida equivalente em radianos.

1. (a) 60°; (b) 135°; (c) 210°; (d) −150°; (e) 20°; (f) 450°; (g) −75°; (h) 100°
2. (a) 45°; (b) 120°; (c) 240°; (d) −225°; (e) 15°; (f) 540°; (g) −48°; (h) 2°

Nos Exercícios 3 e 4, ache a medida equivalente em graus.

3. (a) $\frac{1}{4}\pi$ rad; (b) $\frac{2}{3}\pi$ rad; (c) $\frac{11}{6}\pi$ rad; (d) $-\frac{1}{2}\pi$ rad; (e) $\frac{1}{2}$ rad; (f) 3π rad; (g) -2 rad; (h) $\frac{1}{12}\pi$ rad
4. (a) $\frac{1}{6}\pi$ rad; (b) $\frac{4}{3}\pi$ rad; (c) $\frac{3}{4}\pi$ rad; (d) -5π rad; (e) $\frac{1}{3}$ rad; (f) -5 rad; (g) $\frac{11}{12}\pi$ rad; (h) 0,2 rad

Nos Exercícios de 5 a 12, determine o valor exato da função.

5. (a) $\operatorname{sen}\frac{1}{6}\pi$; (b) $\cos\frac{1}{4}\pi$; (c) $\operatorname{sen}(-\frac{3}{2}\pi)$; (d) $\cos\frac{1}{3}\pi$
6. (a) $\cos\frac{1}{3}\pi$; (b) $\operatorname{sen}\frac{1}{4}\pi$; (c) $\cos(-\frac{1}{2}\pi)$; (d) $\operatorname{sen}(-2\pi)$
7. (a) $\cos\frac{5}{6}\pi$; (b) $\operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi$; (c) $\cos 3\pi$; (d) $\operatorname{sen}(-5\pi)$
8. (a) $\operatorname{sen}\frac{4}{3}\pi$; (b) $\cos(-\frac{1}{6}\pi)$; (c) $\operatorname{sen} 7\pi$; (d) $\cos(-\frac{5}{2}\pi)$
9. (a) $\operatorname{tg}\frac{1}{3}\pi$; (b) $\operatorname{cotg}\frac{1}{4}\pi$; (c) $\sec(-\pi)$; (d) $\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\pi$

10. (a) cotg $\frac{1}{6}\pi$; (b) tg $\frac{1}{4}\pi$; (c) cosec$(-\frac{3}{2}\pi)$; (d) sec π
11. (a) sec$(-\frac{1}{6}\pi)$; (b) cosec $\frac{3}{4}\pi$; (c) tg $\frac{5}{6}\pi$; (d) cotg$(-\frac{3}{4}\pi)$
12. (a) cosec$(-\frac{1}{3}\pi)$; (b) sec $\frac{5}{6}\pi$; (c) tg $\frac{3}{4}\pi$; (d) cotg $\frac{3}{2}\pi$

Nos Exercícios de 13 a 20, use a periodicidade das funções do seno, co-seno, secante e co-secante, bem como os valores do sen t, cos t, sec t cosec t quando $0 \leqslant t\ 2\pi$, para determinar o valor exato da função.

13. (a) sen $\frac{9}{4}\pi$; (b) cos $\frac{9}{4}\pi$; (c) sec $\frac{9}{4}\pi$; (d) cosec $\frac{9}{4}\pi$
14. (a) sen $\frac{17}{6}\pi$; (b) cos $\frac{17}{6}\pi$; (c) sec $\frac{17}{6}\pi$; (d) cosec $\frac{17}{6}\pi$
15. (a) sen$(-\frac{2}{3}\pi)$; (b) cos$(-\frac{2}{3}\pi)$; (c) sec$(-\frac{2}{3}\pi)$; (d) cosec$(-\frac{2}{3}\pi)$
16. (a) sen$(-\frac{5}{4}\pi)$; (b) cos$(-\frac{5}{4}\pi)$; (c) sec$(-\frac{5}{4}\pi)$; (d) cosec$(-\frac{5}{4}\pi)$
17. (a) sen 8π; (b) cos 10π; (c) sec 7π; (d) cosec 9π
18. (a) sen $\frac{7}{2}\pi$; (b) cos $\frac{5}{2}\pi$; (c) sec $\frac{11}{2}\pi$; (d) cosec $\frac{9}{2}\pi$
19. (a) sen$(-\frac{7}{2}\pi)$; (b) cos$(-\frac{5}{2}\pi)$; (c) sec$(-\frac{11}{2}\pi)$; (d) cosec$(-\frac{9}{2}\pi)$
20. (a) sen(-8π); (b) cos(-10π); (c) sec(-7π); (d) cosec(-9π)

Nos Exercícios de 21 a 24, use a periodicidade das funções tangente e co-tangente, bem como os valores de tg t e cotg t, quando $0 \leqslant t < \pi$, para encontrar o valor exato da função.

21. (a) tg $\frac{7}{4}\pi$; (b) cotg $\frac{7}{4}\pi$; (c) tg$(-\frac{5}{6}\pi)$; (d) cotg$(-\frac{5}{6}\pi)$
22. (a) tg $\frac{4}{3}\pi$; (b) cotg $\frac{4}{3}\pi$; (c) tg$(-\frac{1}{6}\pi)$; (d) cotg$(-\frac{1}{6}\pi)$
23. (a) tg $\frac{11}{3}\pi$; (b) cotg $\frac{11}{3}\pi$; (c) tg(-5π); (d) cotg$(-\frac{9}{2}\pi)$
24. (a) tg$(-\frac{11}{4}\pi)$; (b) cotg$(-\frac{11}{4}\pi)$; (c) tg 11π; (c) cotg $\frac{15}{2}\pi$

Nos Exercícios de 25 a 30, encontre todos os valores de t no intervalo $[0, 2\pi)$ para os quais a equação está satisfeita.

25. (a) sen $t = 1$; (b) cos $t = -1$; (c) tg $t = 1$; (d) sec $t = 1$
26. (a) sen $t = -1$; (b) cos $t = 1$; (c) tg $t = -1$; (d) cosec $t = 1$
27. (a) sen $t = 0$; (b) cos $t = 0$; (c) tg $t = 0$; (d) cotg $t = 0$
28. (a) sen $t = \frac{1}{2}$; (b) cos $t = -\frac{1}{2}$; (c) cotg $t = 1$; (d) sec $t = 2$
29. (a) sen $t = -\frac{1}{2}$; (b) cos $t = \frac{1}{2}$; (c) cotg $t = -1$; (d) cosec $t = 2$
30. (a) sen $t = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$; (b) cos $t = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; (c) tg $t = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$; (d) cotg $t = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
31. Para que valores de t em $[0, 2\pi]$ temos (a) tg t indefinida e (b) cosec t indefinida?
32. Para que valores de t em $[0, \pi]$ temos (a) cotg t indefinida e (b) sec t indefinida?
33. Para que valores de t em $[\pi, 2\pi)$ temos (a) cotg t indefinida e (b) sec t indefinida?
34. Prove o Teorema 1.6.8. (*Sugestão:* Use a fórmula para tg $(u - v)$ encontrada no Apêndice.)

Nos Exercícios de 35 a 38, ache a tg θ se θ for o ângulo entre as retas com as inclinações dadas.

35. (a) 1 e $\frac{1}{4}$; (b) 4 e $-\frac{5}{3}$
36. (a) $\frac{1}{2}$ e $-\frac{3}{4}$; (b) $\frac{2}{7}$ e $\frac{7}{2}$
37. (a) $-\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$; (b) $-\frac{5}{4}$ e $-\frac{7}{5}$
38. (a) $-\frac{3}{5}$ e 2; (b) $-\frac{1}{3}$ e $-\frac{1}{10}$

Nos Exercícios 39 e 40, ache, com aproximação de 1 grau, a medida do ângulo entre as retas com as inclinações dadas.

39. (a) 5 e $-\frac{7}{9}$; (b) $-\frac{3}{2}$ e $-\frac{3}{4}$
40. (a) -3 e 2; (b) $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{4}$
41. Ache, com aproximação de 1 grau, as medidas dos ângulos internos do triângulo formado pelas retas que têm as equações $2x + y - 6 = 0$, $3x - y - 4 = 0$ e $3x + 4y + 8 = 0$.
42. Ache, com aproximação de 1 grau, as medidas dos ângulos internos do triângulo com vértices em $(1, 0)$, $(-3, 2)$ e $(2, 3)$.
43. Ache a equação de uma reta que passa pelo ponto $(-1, 4)$, formando um ângulo de $\frac{1}{4}\pi$ rad com a reta cuja equação é $2x + y - 5 = 0$ (duas soluções).
44. Encontre uma equação de uma reta que passa pelo ponto $(-3, -2)$, formando um ângulo de $\frac{1}{3}\pi$ rad com a reta cuja equação é $3x - 2y - 7 = 0$ (duas soluções).

Nos Exercícios de 45 a 48, defina a função f o g e determine o seu domínio.

45. (a) $f(x) = \text{sen}\, x$, $g(x) = 3x$; (b) $f(x) = \text{tg}\, x$, $g(x) = \dfrac{x}{2}$
46. (a) $f(x) = \cos x$, $g(x) = x^2$; (b) $f(x) = \text{cosec}\, x$, $g(x) = 2x$
47. (a) $f(x) = \text{cotg}\, x$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$; (b) $f(x) = \sec \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x - \pi}$
48. (a) $f(x) = \text{sen}\, x$, $g(x) = \dfrac{1}{2x}$; (b) $f(x) = \text{tg}\, x$, $g(x) = x + \pi$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 1

Nos Exercícios de 1 a 12, ache e mostre na reta numérica real, o conjunto-solução da desigualdade.

1. $3x - 7 \le 5x - 17$
2. $8 < 5x + 4 \le 10$
3. $\dfrac{x}{x-1} > \dfrac{1}{4}$
4. $\dfrac{3}{x+4} < \dfrac{2}{x-5}$
5. $2x^2 + x < 3$
6. $|x - 2| < 4$
7. $|3 + 4x| \le 9$
8. $|5 - 2x| \le 3$
9. $|4 - 3x| < 8$
10. $|2x - 5| > 7$
11. $|2x + 7| > 5$
12. $\left|\dfrac{2 - 3x}{3 + x}\right| \ge \dfrac{1}{4}$

Nos Exercícios de 13 a 15 resolva para x.

13. $|3 - 4x| = 15$
14. $\left|\dfrac{2x - 1}{x + 3}\right| = 4$
15. $|3x - 4| = |6 - 2x|$
16. Ache todos os valores de x para os quais $\sqrt{x^2 + 2x - 15}$ é real.

17. Ache as abscissas dos pontos tendo ordenada 4 e que estão a uma distância de $\sqrt{117}$ do ponto $(5, -2)$.
18. Ache uma equação que seja satisfeita pelas coordenadas de qualquer ponto cuja distância ao ponto $(-1, 2)$ seja o dobro da distância a $(3, -4)$. Faça um esboço do seu gráfico.
19. Ache uma equação que seja satisfeita pelas coordenadas de qualquer ponto cuja distância ao ponto $(-3, 4)$ é 10.
20. Defina os seguintes conjuntos de pontos por uma equação ou uma inequação: (a) o ponto $(3, -5)$; (b) o conjunto de todos os pontos cuja distância ao ponto $(3, -5)$ seja menor do que 4; (c) o conjunto de todos os pontos cuja distância ao ponto $(3, -5)$ seja no mínimo 5.

Nos Exercícios de 21 a 26, desenhe um esboço do gráfico da equação.

21. $y^2 = x - 4$
22. $y = |x - 4|$
23. $y = x^2 - 4$
24. $y = \sqrt{4 - x}$
25. $y = \sqrt{16 - x^2}$
26. $xy = 16$

27. Prove que o quadrilátero com vértices em $(1, 2)$, $(5, -1)$, $(11, 7)$ e $(7, 10)$ é um retângulo.
28. Prove que o triângulo com vértices em $(-8, 1)$, $(-1, -6)$ e $(2, 4)$ é isósceles e ache sua área.
29. Prove que os pontos $(2, 4)$, $(1, -4)$ e $(5, -2)$ são vértices de um triângulo retângulo e ache a área do triângulo.
30. Prove que os pontos $(1, -1)$, $(3, 2)$ e $(7, 8)$ são colineares de duas maneiras: (a) usando a fórmula da distância; (b) usando inclinações.
31. Dois vértices de um paralelogramo são $(-3, 4)$ e $(2, 3)$ e seu centro está em $(0, -1)$. Ache os outros dois vértices.
32. Os vértices opostos de um quadrado estão em $(3, -4)$ e $(9, -4)$. Ache os outros dois vértices.
33. Prove que os pontos $(2, 13)$, $(-2, 5)$, $(3, -1)$ e $(7, 7)$ são vértices de um paralelogramo.
34. Ache uma equação da circunferência com centro em $(-2, 4)$ e raio $\sqrt{5}$. Escreva a equação na forma geral.
35. Ache uma equação da circunferência onde os pontos $(-3, 2)$ e $(5, 6)$ são extremos de um diâmetro.
36. Ache uma equação da circunferência que passa pelos pontos $(3, -1)$, $(2, 2)$ e $(-4, 5)$.
37. Ache o centro e o raio da circunferência com a equação $4x^2 + 4y^2 - 12x + 8y + 9 = 0$.
38. Ache uma equação da reta que passa pelos pontos $(2, -4)$ e $(7, 3)$ e escreva a equação na forma intercepto-inclinação.
39. Ache uma equação da reta que passa pelo ponto $(-1, 6)$ e tem inclinação 3.
40. Ache uma equação da reta perpendicular à reta que passa pelos pontos $(-1, 5)$ e $(3, 2)$ no ponto médio desse segmento da reta.
41. Ache uma equação da reta que passa pelo ponto $(5, -3)$ e é perpendicular à reta cuja equação é $2x - 5y = 1$.
42. Ache uma equação da circunferência cujo diâmetro é a corda comum às circunferências $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0$ e $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$.
43. Ache uma equação da circunferência que circunscreve o triângulo cujos lados estão sobre as retas $x - 3y + 2 = 0$, $3x - 2y + 6 = 0$ e $2x + y - 3 = 0$.
44. Ache a menor distância do ponto $(2, -5)$ à reta $3x + y = 2$.
45. Ache uma equação da reta que passa pelo ponto de intersecção das retas $5x + 6y - 4 = 0$ e $x - 3y + 2 = 0$ e é perpendicular à reta $x - 4y - 20 = 0$, sem determinar o ponto de intersecção das retas. (*Sugestão:* veja o Exercício 58 nos Exercícios 1.2).
46. Os lados de um paralelogramo estão sobre as retas $x + 2y = 10$, $3x - y = -20$, $x + 2y = 15$ e $3x - y = -10$. Ache as equações das diagonais sem determinar os vértices do paralelogramo. (*Sugestão:* veja o Exercício 58 nos Exercícios 1.2.)
47. Determine todos os valores de k para os quais os gráficos das equações $x^2 + y^2 = k$ e $x + y = k$ interceptam-se.
48. Determine os valores de k e h se $3x + ky + 2 = 0$ e $5x - y + h = 0$ forem equações da mesma reta.
49. Dada $f(x) = 3x^2 - x + 5$, ache (a) $f(-3)$; (b) $f(-x^2)$; (c) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$.
50. Dada $g(x) = \sqrt{x - 1}$, ache $\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$, $h \neq 0$.
51. Determine se a função é par, ímpar ou nem par e nem ímpar. (a) $f(x) = 2x^3 - 3x$; (b) $g(x) = 5x^4 + 2x^2 - 1$; (c) $h(x) = 3x^5 - 2x^3 + x^2 - x$; (d) $F(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 - x}$.

Nos Exercícios de 52 a 56, para as funções dadas f e g defina as seguintes funções e determine o domínio da função resultante: (a) $f + g$; (b) $f - g$; (c) $f \cdot g$; (f) f/g; (e) g/f; (f) $f \circ g$; (g) $g \circ f$.

52. $f(x) = \sqrt{x + 2}$ e $g(x) = x^2 + 4$
53. $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = 4x - 3$
54. $f(x) = x^2 - 9$ e $g(x) = \sqrt{x + 5}$
55. $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$ e $g(x) = \dfrac{x}{x + 1}$
56. $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Nos Exercícios de 57 a 64, determine o domínio e a imagem da função e desenhe um esboço de seu gráfico.

57. $f(x) = |3 - x|$
58. $f(x) = 3 - |x|$
59. $g(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x - 2}$
60. $G(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$
61. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 1 \\ 2x + 3 & \text{se } 1 \leqslant x \end{cases}$
62. $g(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + x - 6}$
63. $F(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x < -2 \\ 4 - x^2 & \text{se } -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ 3 - x & \text{se } 2 < x \end{cases}$
64. $f(x) = 2x - [\![x]\!]$

Nos Exercícios 65 e 66, determine o valor exato da função.

65. (a) sen $\frac{2}{3}\pi$; (b) cos $\frac{5}{4}\pi$; (c) tg$(-\frac{5}{6}\pi)$; (d) cotg $\frac{13}{12}\pi$; (e) sec π; (f) cosec$(-\frac{1}{8}\pi)$
66. (a) cos $\frac{7}{6}\pi$; (b)sen$(-\frac{7}{4}\pi)$; (c) cotg$(-\frac{1}{2}\pi)$; (d) tg $\frac{5}{8}\pi$; (e) sec$(-\frac{1}{12}\pi)$; (f) cosec $\frac{5}{3}\pi$

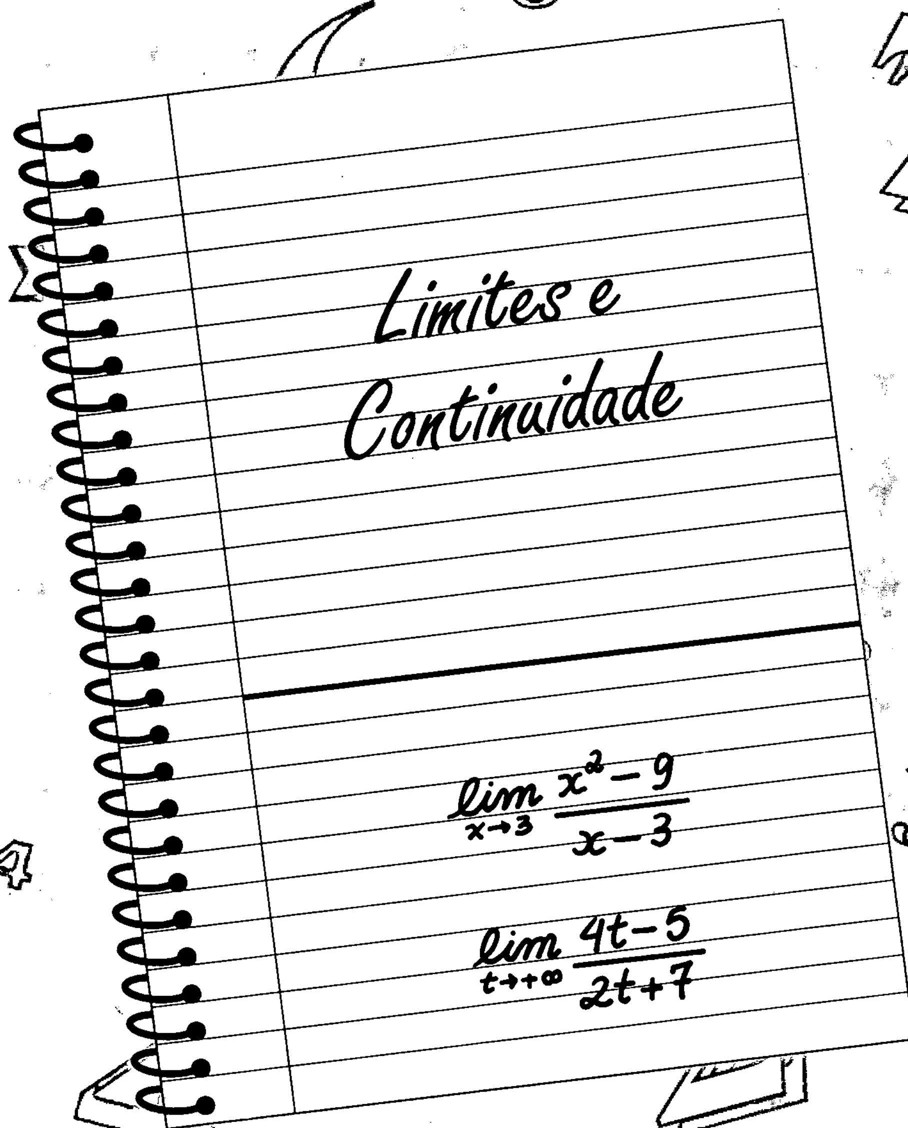
Nos Exercícios 67 e 68, ache todos os valores de t no intervalo $[0, 2\pi)$ para os quais a equação dada é satisfeita.

67. (a) sen $t = \frac{1}{2}$; (b) cos $t = 1$; (c) tg $t = -1$; (d) cotg $t = \sqrt{3}$; (e) sec $t = -2$; (f) cosec $t = \sqrt{2}$
68. (a) sen $t = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; (b) cos $t = -1$; (c) tg $t = -\sqrt{3}$; (d) cotg $t = 1$; (e) sec $t = -\sqrt{2}$; (f) cosec $t = 2$
69. Ache, com aproximação de 1 grau, as medidas dos quatro ângulos internos do quadrilátero com vértices em $(5, 6)$, $(-2, 4)$, $(-2, 1)$ e $(3, 1)$ e verifique que a soma deles é 360°.
70. Ache uma equação da reta que passa por $(2, 5)$ e faz com a reta $3x - 4y + 7 = 0$ um ângulo cuja medida em radianos é $\frac{1}{4}\pi$ (duas soluções).
71. Ache as equações das retas que passam pela origem e são tangentes à circunferência com centro em $(2, 1)$ e raio 2.
72. Prove que as duas retas

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{e} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

são paralelas se e somente se $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$.
73. Prove analiticamente que se as diagonais de um retângulo forem perpendiculares, então o retângulo será um quadrado.
74. Prove analiticamente que o segmento de reta que liga os pontos médios de qualquer par de lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e seu comprimento é a metade do comprimento do terceiro lado.
75. Num triângulo, o ponto de intersecção das medianas, das alturas e o centro da circunferência circunscrita são colineares. Ache esses três pontos e comprove que eles são colineares no triângulo com vértices $(2, 8)$, $(5, -1)$ e $(6, 6)$.
76. Prove analiticamente que o conjunto de pontos equidistantes de dois pontos dados é a perpendicular pelo ponto médio do segmento que liga os pontos.
77. Prove que se x for qualquer número real, $|x| < x^2 + 1$.
78. Prove analiticamente que as três medianas de um triângulo encontram-se num ponto.

DOIS



As duas operações matemáticas fundamentais em Cálculo são a *diferenciação* e a *integração*. Essas operações envolvem o cálculo da *derivada* e da *integral definida*, ambas baseadas na noção de *limite*.

Na Secção 2.1 a idéia de limite de uma função é dada através de uma exposição passo a passo, motivadora, que inclui desde a discussão do cálculo do valor de uma função na proximidade de um número através de um tratamento intuitivo do processo de limite, até uma definição rigorosa envolvendo epsilons e deltas. Os teoremas de limite são introduzidos na Secção 2.2 para simplificar o cálculo de limites de funções elementares. Na Secção 2.3 o conceito de limite é ampliado para incluir outros tipos de funções. Os limites envolvendo o infinito são tratados nas Secções 2.4 e 2.5 e são usados para definir as assíntotas vertical e horizontal de gráficos de funções.

Provavelmente a classe mais importante de funções estudada em Cálculo seja das funções *contínuas*. A continuidade de uma função em um número é definida na Secção 2.6, enquanto que a continuidade de uma função composta e a continuidade em um intervalo são tópicos da Secção 2.7. O *teorema do confronto de limites*, comumente chamado de *teorema do "sanduíche"*, que é um teorema-chave em Cálculo, será apresentado na Secção 2.8, sendo aplicado para estabelecer o limite da razão de sen t a t, quando t aproxima-se de zero. Esse resultado é importante na discussão sobre a continuidade de funções trigonométricas na Secção 2.8.

As duas secções finais do capítulo, 2.9 e 2.10, são suplementares e contêm demonstrações de alguns teoremas de limites de funções.

2.1 O LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Para iniciar nosso estudo de limites, vamos considerar uma dada função:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} \tag{1}$$

Observe que $f(x)$ existe para todo x, exceto $x = 1$. Investigaremos os valores da função quando x está próximo de 1, porém excluindo o 1. A ilustração seguinte mostra como a função definida por (1) pode surgir e por que estaríamos interessados em considerar tais valores funcionais.

► **ILUSTRAÇÃO 1** O ponto $P(1, 2)$ está sobre a curva de equação

$$y = 2x^2 + x - 1$$

Seja $Q(x, 2x^2 + x - 1)$ um outro ponto sobre essa curva, distinto de P. Veja as Figuras 1 e 2, cada uma mostrando parte do gráfico da equação e a reta secante passando pelos pontos P e Q, onde Q está próximo de P. Na Figura 1, a coordenada x de Q é menor do que 1 e na Figura 2 ela é maior do que 1. Suponhamos que $f(x)$ seja a inclinação da reta PQ. Então

$$f(x) = \frac{(2x^2 + x - 1) - 2}{x - 1} \qquad f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$$

que é a Igualdade (1). Além disso, $x \neq 1$, pois P e Q são pontos distintos. À medida que x fica cada vez mais próximo de 1, os valores de $f(x)$ tornam-se cada vez mais próximos do valor que iremos definir na Secção 3.1 como a inclinação da reta tangente à curva no ponto P. ◄

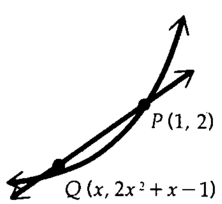


FIGURA 1

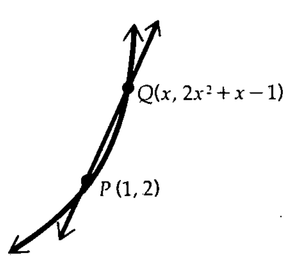


FIGURA 2

Para a função f definida por (1), vamos atribuir a x os valores 0, 0,25, 0,50, 0,75, 0,9, 0,99, 0,999, 0,9999, e assim por diante. Estamos tomando valores de x cada vez mais próximos de 1, porém menores do que 1; em outras palavras, a variável x está aproximando-se de 1 através de valores menores do que 1. Isso está ilustrado na Tabela 1. Por outro lado, vamos deixar que a variável x aproxime-se de 1, através de valores maiores do que 1, isto é, vamos atribuir a x os valores 2, 1,75, 1,5, 1,25, 1,1, 1,01, 1,001, 1,0001, 1,00001, e assim por diante. Os valores funcionais desses números também são obtidos com uma calculadora e aparecem na Tabela 2.

Tabela 1

x	$f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
0	3
0,25	3,5
0,5	4
0,75	4,5
0,9	4,8
0,99	4,98
0,999	4,998
0,9999	4,9998
0,99999	4,99998

Observe, de ambas as tabelas, que à medida que x fica cada vez mais próximo de 1, $f(x)$ torna-se cada vez mais próximo de 5 e quanto mais próximo x estiver de 1, mais próximo de 5 estará $f(x)$. Por exemplo, na Tabela 1, quando $x = 0{,}9$, $f(x) = 4{,}8$, isto é, quando x for 0,1 inferior a 1, $f(x)$ será 0,2 inferior a 5. Quando $x = 0{,}999$, $f(x) = 4{,}998$, isto é, quando x for 0,001 inferior a

Tabela 2

x	$f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
2	7
1,75	6,5
1,5	6,0
1,25	5,5
1,1	5,2
1,01	5,02
1,001	5,002
1,0001	5,0002
1,00001	5,00002

1, $f(x)$ será 0,002 inferior a 5. Mais ainda, quando $x = 0{,}9999$, $f(x) = 0{,}49998$, isto é, quando x for 0,0001 inferior a 1, $f(x)$ será 0,0002 inferior a 5.

A Tabela 2 mostra que quando $x = 1{,}1$, $f(x) = 5{,}2$, isto é, quando x for 0,1 superior a 1, $f(x)$ será 0,2 superior a 5. Quando $x = 1{,}001$, $f(x) = 5{,}002$, isto é, quando x for 0,001 superior a 1, $f(x)$ será 0,002 superior a 5. Quando $x = 1{,}0001$, $f(x) = 5{,}0002$, isto é, quando x for 0,0001 superior a 1, $f(x)$ será 0,0002 superior a 5.

Logo, vemos que quando x difere de 1 de $\pm$ 0,001 (isto é, $x = 0{,}999$ ou $x = 1{,}001$), $f(x)$ difere de 5 de $\pm$ 0,002, isto é, $f(x) = 4{,}998$ ou $f(x) = 5{,}002$). E quando x difere de 1 de $\pm$ 0,0001, $f(x)$ difere de 5 de $\pm$ 0,0002.

Agora, analisando a situação de outra maneira, consideraremos os valores de $f(x)$ primeiro. Vemos que podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 5 quanto desejarmos, tomando x suficientemente próximo de 1. Outra maneira de dizer isto é que podemos tornar o valor absoluto da diferença entre $f(x)$ e 5 tão pequeno quanto desejarmos, tomando o valor absoluto da diferença entre x e 1 suficientemente pequeno. Isto é, $|f(x) - 5|$ pode se tornar tão pequeno quanto desejarmos, tomando $|x - 1|$ suficientemente pequeno. Mas tenha em mente que $f(x)$ nunca assume o valor 5.

Uma maneira mais precisa de notar isso é através do uso de dois símbolos para essas pequenas diferenças. Os símbolos comumente usados são as letras gregas ϵ (epsilon) e δ (delta). Assim, enunciamos que para todo número ϵ dado positivo existe um número δ escolhido apropriadamente, tal que se $|x - 1|$ for menor do que δ e $|x - 1| \neq 0$ (isto é, $x \neq 1$), então $|f(x) - 5|$ será menor do que ϵ. É importante observar que o tamanho de δ depende do de ϵ. Ainda outra maneira de expressar isso é: dado um número ϵ positivo qualquer, podemos tornar $|f(x) - 5| < \epsilon$ tomando $|x - 1|$ suficientemente pequeno, isto é, existe um número δ positivo suficientemente pequeno, tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - 1| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x) - 5| < \epsilon \tag{2}$$

Observe que o numerador da fração em (1) pode ser fatorado de forma que

$$f(x) = \frac{(2x + 3)(x - 1)}{x - 1}$$

Se $x \neq 1$, podemos dividir o numerador e o denominador por $x - 1$ para obter

$$f(x) = 2x + 3 \qquad x \neq 1 \tag{3}$$

A fórmula (3), com a estipulação de que $x \neq 1$, é tão adequada quanto (1) para uma definição de $f(x)$. De (3) e das duas tabelas, note que se $|x - 1| < 0{,}1$, então $|f(x) - 5| < 0{,}2$. Assim, dado $\epsilon = 0{,}2$, tomamos $\delta = 0{,}1$ e afirmamos:

$$\text{se} \quad 0 < |x - 1| < 0{,}1 \quad \text{então} \quad |f(x) - 5| < 0{,}2$$

Essa é a afirmativa (2), com $\epsilon = 0{,}2$ e $\delta = 0{,}1$.

Também, se $|x - 1| < 0{,}001$, então $|f(x) - 5| < 0{,}002$. Logo, se $\epsilon = 0{,}002$, tomamos $\delta = 0{,}001$ e afirmamos que

$$\text{se} \quad 0 < |x - 1| < 0{,}001 \quad \text{então} \quad |f(x) - 5| < 0{,}002$$

Essa é a afirmativa (2), com $\epsilon = 0{,}002$ e $\delta = 0{,}001$.

Da mesma forma, se $\epsilon = 0{,}0002$, tomamos $\delta = 0{,}0001$ e afirmamos que

$$\text{se} \quad 0 < |x - 1| < 0{,}0001 \quad \text{então} \quad |f(x) - 5| < 0{,}0002$$

Essa é a afirmativa (2), com $\epsilon = 0{,}0002$ e $\delta = 0{,}0001$.

Poderíamos prosseguir e atribuir a ϵ qualquer valor positivo, a fim de encontrar um valor adequado para δ, de tal forma que se $|x - 1|$ for menor do que

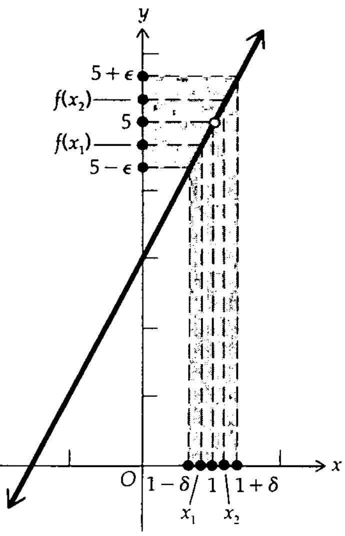


FIGURA 3

δ e $x \neq 1$ (ou $|x - 1| > 0$), então $|f(x) - 5|$ será menor do que ϵ. Agora, como para todo $\epsilon > 0$ podemos encontrar um $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - 1| < \delta$, então $|f(x) - 5| < \epsilon$, afirmamos que o limite de $f(x)$ quando x tende a 1 é igual a 5 ou, em símbolos

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 5$$

Observe que nessa equação temos um novo uso do símbolo "igual". Aqui, $f(x)$ não assume o valor 5 para nenhum valor de x. O símbolo "igual" é apropriado, pois o primeiro membro está escrito como $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

De (3) é evidente que $f(x)$ pode se tornar tão próximo de 5 quanto desejarmos, tomando x suficientemente próximo de 1 e essa propriedade da função f não depende do fato de f estar definida em $x = 1$. Esse fato permite-nos distinguir entre $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ e o valor da função 1, isto é, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$, mas $f(1)$ não existe. Conseqüentemente, na afirmativa (2), $0 < |x - 1|$, pois estamos interessados somente nos valores de $f(x)$ para x próximo de 1, mas não para $x = 1$.

Vamos ver qual o significado geométrico disso tudo para a função definida em (1) ou (3). A Figura 3 ilustra o significado geométrico de ϵ e δ. Observe que se x (no eixo horizontal) estiver entre $1 - \delta$ e $1 + \delta$, então $f(x)$ (no eixo vertical) estará entre $5 - \epsilon$ e $5 + \epsilon$, ou

$$\text{se } 0 < |x - 1| < \delta \text{ então } |f(x) - 5| < \epsilon$$

Outra maneira de estabelecer isso é que $f(x)$ (no eixo vertical) pode ser restrita a ficar entre $5 - \epsilon$ e $5 + \epsilon$, se restringirmos x (no eixo horizontal) a ficar entre $1 - \delta$ e $1 + \delta$.

Note que os valores de ϵ são escolhidos arbitrariamente e podem ser tão pequenos quanto desejarmos, e que o valor de δ depende do ϵ escolhido. Devemos ressaltar que quanto menor for o valor de ϵ, menor será o valor correspondente de δ.

Resumindo esse exemplo, afirmamos que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$, pois para qualquer $\epsilon > 0$, não importa o quão pequeno ele seja, existe um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |x - 1| < \delta \text{ então } |f(x) - 5| < \epsilon$$

Agora, definiremos o limite de uma função em geral.

2.1.1 DEFINIÇÃO

Seja f uma função definida para todo número em algum intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio número a. O **limite de $f(x)$ quando x tende a a será L**, escrito como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se a seguinte afirmativa for verdadeira:

Dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon \qquad (4)$$

Em palavras, a Definição 2.1.1 afirma que os valores da função $f(x)$ tendem a um limite L quando x tende a um número a, se o valor absoluto da diferença entre $f(x)$ e L puder se tornar tão pequeno quanto desejarmos, tomando x suficientemente próximo de a, mas não igual a a.

É importante perceber que na definição acima nada é mencionado sobre o valor da função quando $x = a$. Isto é, não é necessário que a função esteja

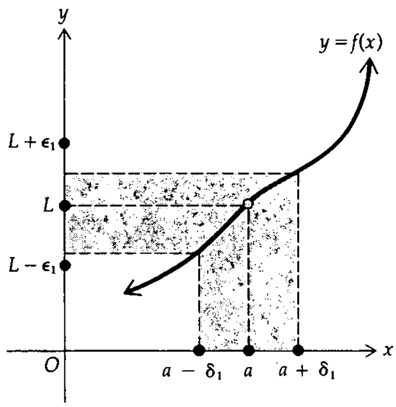


FIGURA 4

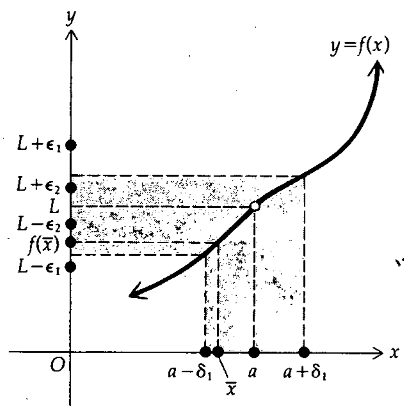


FIGURA 5

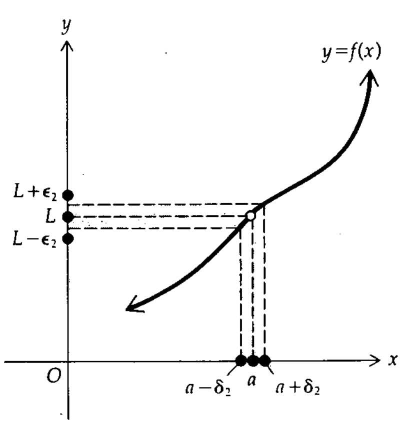


FIGURA 6

definida em $x = a$ para que $\lim_{x \to a} f(x)$ exista. Além disso, mesmo que a função seja definida por $x = a$, é possível que $\lim_{x \to a} f(x)$ exista sem ter o mesmo valor que $f(a)$ (veja o Exemplo 3 na Secção 2.2).

Uma interpretação geométrica da Definição 2.1.1 para a função f está na Figura 4, que mostra uma parte do gráfico de f próxima ao ponto onde $x = a$. Como f não é necessariamente definida em a, não precisa haver no gráfico um ponto com abscissa a. Observe que se x (no eixo horizontal) estiver entre $a - \delta_1$ e $a + \delta_1$, então $f(x)$ (no eixo vertical) estará entre $L - \epsilon_1$ e $L + \epsilon_1$. Expressando de outra maneira: se x (no eixo horizontal) for restringida a ficar entre $a - \delta_1$ e $a + \delta_1$, então $f(x)$ (no eixo vertical) poderá ser restringida a ficar entre $L - \epsilon_1$ e $L + \epsilon_1$. Assim,

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon_1$$

A Figura 5 mostra como um valor de ϵ menor pode requerer uma escolha diferente para δ. Na figura, vemos que para $\epsilon_2 < \epsilon_1$, o valor δ_1 é muito grande, isto é, existem valores de x para os quais $0 < |x - a| < \delta_1$, mas $|f(x) - L|$ não é menor do que ϵ_2. Por exemplo, $0 < |\bar{x} - a| < \delta_1$, mas $|f(\bar{x}) - L| > \epsilon_2$. Assim, precisamos escolher um valor menor δ_2, mostrado na Figura 6, tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon_2$$

No entanto, para qualquer escolha de $\epsilon > 0$, não importa quão pequeno seja, existe um $\delta > 0$, tal que a afirmativa (4) seja verdadeira. Logo, $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Nos exemplos desta secção usaremos o símbolo $\Rightarrow$ pela primeira vez. A seta $\Rightarrow$ significa *implica*. Também usamos a seta dupla $\Leftrightarrow$ que, como já comentamos anteriormente, significa que as afirmações que vêm antes e depois dela são *equivalentes*.

EXEMPLO 1 Seja f a função definida por

$$f(x) = 4x - 7$$

e suponha que

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 5$$

(a) Usando uma figura similar à Figura 3, para $\epsilon = 0{,}01$, determine um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |x - 3| < \delta \text{ então } |f(x) - 5| < 0{,}01$$

(b) Usando as propriedades das desigualdades, determine $\delta > 0$, tal que a afirmativa na parte (a) seja verdadeira.

Solução

(a) Veja a Figura 7 e observe que os valores funcionais aumentam à medida que x cresce. Assim, a figura indica que precisamos de um valor de x_1, tal que $f(x_1) = 4{,}99$ e um valor de x_2, tal que $f(x_2) = 5{,}01$, isto é, precisamos de x_1 e x_2 tais que

$$4x_1 - 7 = 4{,}99 \qquad 4x_2 - 7 = 5{,}01$$

$$x_1 = \frac{11{,}99}{4} \qquad x_2 = \frac{12{,}01}{4}$$

$$x_1 = 2{,}9975 \qquad x_2 = 3{,}0025$$

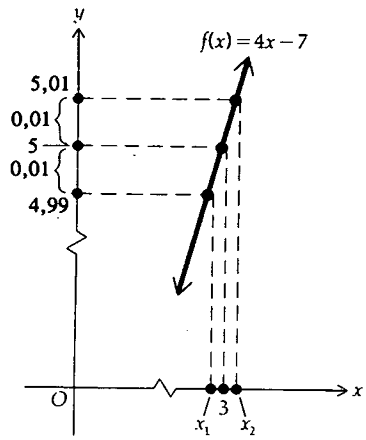


FIGURA 7

Como 3 − 2,9975 = 0,0025 e 3,0025 − 3 = 0,0025, escolhemos $\delta = 0{,}0025$ de tal forma que que temos a afirmativa

$$\text{se } 0 < |x - 3| < 0{,}0025 \text{ então } |f(x) - 5| < 0{,}01$$

(b) Como $f(x) = 4x - 7$,

$$\begin{aligned} |f(x) - 5| &= |(4x - 7) - 5| \\ &= |4x - 12| \\ &= 4|x - 3| \end{aligned}$$

Queremos determinar um $\delta > 0$, tal que

$$\begin{aligned} &\text{se } 0 < |x - 3| < \delta \text{ então } |f(x) - 5| < 0{,}01 \\ \Leftrightarrow\ &\text{se } 0 < |x - 3| < \delta \text{ então } 4|x - 3| < 0{,}01 \\ \Leftrightarrow\ &\text{se } 0 < |x - 3| < \delta \text{ então } |x - 3| < 0{,}0025 \end{aligned}$$

Essa afirmativa indica que uma escolha adequada para δ é 0,0025. Então, temos o seguinte argumento:

$$\begin{aligned} &0 < |x - 3| < 0{,}0025 \\ \Rightarrow\ &4|x - 3| < 4(0{,}0025) \\ \Rightarrow\ &|4x - 12| < 0{,}01 \\ \Rightarrow\ &|(4x - 7) - 5| < 0{,}01 \\ \Rightarrow\ &|f(x) - 5| < 0{,}01 \end{aligned}$$

Mostramos que

$$\text{se } 0 < |x - 3| < 0{,}0025 \text{ então } |f(x) - 5| < 0{,}01 \qquad (5)$$

Nesse exemplo, qualquer número positivo menor do que 0,0025 pode ser usado em lugar de 0,0025 como sendo o δ requerido. Observe esse fato na Figura 7. Além disso, se $0 < \gamma < 0{,}0025$ e a afirmativa (5) for verdadeira, temos

$$\text{se } 0 < |x - 3| < \gamma \text{ então } |f(x) - 5| < 0{,}01$$

pois todo número x que satisfaça a desigualdade $0 < |x - 3| < \gamma$ satisfará também a desigualdade $0 < |x - 3| < 0{,}0025$.

A solução do Exemplo 1 consistiu em encontrar um δ para um ϵ fixado. Se para todo $\epsilon > 0$ pudermos encontrar um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |x - 3| < \delta \text{ então } |f(x) - 5| < \epsilon$$

teremos estabelecido que o limite é 5. Isso será feito no exemplo a seguir.

EXEMPLO 2 Use a Definição 2.1.1 para provar que

$$\lim_{x \to 3} (4x - 7) = 5$$

Solução A primeira exigência da Definição 2.1.1 é que $4x - 7$ seja definida em todo número de algum intervalo aberto contendo 3, exceto possivelmente em 3. Como $4x - 7$ está definida para todos os números reais, qualquer intervalo aberto contendo 3 irá satisfazer esse requisito. Precisamos mostrar agora que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |x - 3| < \delta \text{ então } |(4x - 7) - 5| < \epsilon \tag{6}$$

No Exemplo 1 mostramos que $|(4x - 7) - 5| = 4|x - 3|$. Logo, (6) é equivalente à afirmativa

$$\begin{aligned} &\text{se } 0 < |x - 3| < \delta \text{ então } 4|x - 3| < \epsilon \\ \Leftrightarrow\ &\text{se } 0 < |x - 3| < \delta \text{ então } |x - 3| < \tfrac{1}{4}\epsilon \end{aligned}$$

Essa afirmativa indica que $\frac{1}{4}\epsilon$ é um δ satisfatório. Com essa escolha de δ temos o seguinte argumento:

$$\begin{aligned} & 0 < |x - 3| < \delta \\ \Rightarrow\ & 4|x - 3| < 4\delta \\ \Rightarrow\ & |4x - 12| < 4\delta \\ \Rightarrow\ & |(4x - 7) - 5| < 4\delta \\ \Rightarrow\ & |(4x - 7) - 5| < \epsilon \qquad (\text{pois } \delta = \tfrac{1}{4}\epsilon) \end{aligned}$$

Assim, estabelecemos que se $\delta = \frac{1}{4}\epsilon$, a afirmativa (6) é verdadeira. Isso prova que $\lim_{x \to 3}(4x - 7) = 5$.

Especificamente, se $\epsilon = 0{,}01$, então tomamos $\delta = \frac{1}{4}(0{,}01)$, isto é, $\delta = 0{,}0025$. Esse valor de δ corresponde ao que foi encontrado no Exemplo 1.

Qualquer número positivo menor do que $\frac{1}{4}\epsilon$ pode ser usado em lugar de $\frac{1}{4}\epsilon$ como sendo o δ requerido.

EXEMPLO 3 Seja f a função definida por

$$f(x) = x^2$$

e suponha

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

Usando uma figura para $\epsilon = 0{,}001$, determine $\delta > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |x - 2| < \delta \text{ então } |f(x) - 4| < 0{,}001$$

Solução Veja a Figura 8 e observe que se $x > 0$, os valores funcionais aumentam à medida que os valores de x crescem. Assim, a figura indica que precisamos de um valor positivo de x_1, tal que $f(x_1) = 3{,}999$ e um valor positivo de x_2, tal que $f(x_2) = 4{,}001$, isto é, precisamos de um x_1 e de um x_2, tal que

$$x_1^2 = 3{,}999 \qquad x_2^2 = 4{,}001$$

Cada uma dessas equações tem duas soluções. Em cada caso, rejeitamos a raiz quadrada negativa, pois x_1 e x_2 são positivos. Assim

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{3{,}999} & x_2 &= \sqrt{4{,}001} \\ x_1 &\approx 1{,}9997 & x_2 &\approx 2{,}0002 \end{aligned}$$

Então, $2 - 1{,}9997 = 0{,}0003$ e $2{,}0002 - 2 = 0{,}0002$. Como $0{,}0002 < 0{,}0003$, escolhemos $\delta = 0{,}0002$; assim temos a afirmativa

$$\text{se } 0 < |x - 2| < 0{,}0002 \text{ então } |f(x) - 4| < 0{,}001$$

Qualquer número positivo menor do que 0,0002 pode ser selecionado como o δ requerido.

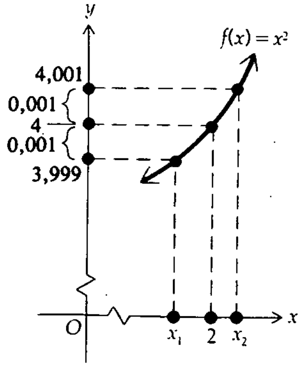


FIGURA 8

EXEMPLO 4 Use a Definição 2.1.1 para provar que

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

Solução Como x^2 está definido para todos os números reais, qualquer intervalo aberto contendo 2 satisfará o primeiro requisito da Definição 2.1.1. Precisamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |x - 2| < \delta \text{ então } |x^2 - 4| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{ se } 0 < |x - 2| < \delta \text{ então } |x - 2||x + 2| < \epsilon \tag{7}$$

Observe que no primeiro membro da última desigualdade, além do fator $|x - 2|$ temos o fator $|x + 2|$. Assim, para provar (7) desejamos colocar uma restrição sobre δ que nos dará uma desigualdade envolvendo $|x + 2|$. Tal restrição é feita para selecionarmos o intervalo aberto requerido pela Definição 2.1.1 como sendo o intervalo (1, 3) e isto implica que $\delta \leqslant 1$. Então

$$0 < |x - 2| < \delta \quad \text{e} \quad \delta \leqslant 1$$

$$\Rightarrow \quad |x - 2| < 1$$

$$\Rightarrow \quad -1 < x - 2 < 1$$

$$\Rightarrow \quad 3 < x + 2 < 5$$

$$\Rightarrow \quad |x + 2| < 5 \tag{8}$$

Agora

$$0 < |x - 2| < \delta \quad \text{e} \quad |x + 2| < 5$$

$$\Rightarrow \quad |x - 2||x + 2| < \delta \cdot 5 \tag{9}$$

Lembre-se de que nossa meta é obter $|x - 2|\ |x + 2| < \epsilon$. A afirmativa (9) indica que devemos requerer $\delta \cdot 5 \leqslant \epsilon$, isto é, $\delta \leqslant \epsilon/5$. Isso significa que devemos impor duas restrições sobre δ : $\delta \leqslant 1$ e $\delta \leqslant \epsilon/5$. Assim sendo, ambas as restrições estarão satisfeitas se tomarmos δ como o menor dos dois números 1 e $\epsilon/5$; em símbolos, escrevemos isso como $\delta = \min(1, \epsilon/5)$. Usando esse δ, temos o seguinte argumento:

$$0 < |x - 2| < \delta$$

$$\Rightarrow \quad |x - 2||x + 2| < \delta|x + 2|$$

$$\Rightarrow \quad |(x - 2)(x + 2)| < \delta|x + 2|$$

$$\Rightarrow \quad |x^2 - 4| < \delta|x + 2| \tag{10}$$

No entanto, mostramos em (8) que se $\delta \leqslant 1$ e $0 < |x - 2| < \delta$, então $|x + 2| < 5$, isto é, $\delta|x + 2| < \delta \cdot 5$. Prosseguindo, de (10), temos

$$|x^2 - 4| < \delta|x + 2| \quad \text{e} \quad \delta|x + 2| < \delta \cdot 5$$

$$\Rightarrow \quad |x^2 - 4| < \delta \cdot 5$$

$$\Rightarrow \quad |x^2 - 4| < \frac{\epsilon}{5} \cdot 5 \qquad (\text{pois } \delta \leqslant \epsilon/5)$$

$$\Rightarrow \quad |x^2 - 4| < \epsilon$$

Demonstramos que, tendo escolhido $\delta = \min(1, \epsilon/5)$ para todo $\epsilon > 0$, a seguinte afirmativa é verdadeira:

$$\text{se } 0 < |x - 2| < \delta \text{ então } |x^2 - 4| < \epsilon$$

Isso prova que $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

O teorema a seguir estabelece que uma função não pode tender a dois limites diferentes ao mesmo tempo. Ele é chamado de *teorema da unicidade*, pois garante que se o limite de uma função existir, ele será único. Vamos enunciar o teorema aqui, mas adiar a demonstração até a Secção Suplementar 2.9.

2.1.2 TEOREMA Se $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$

O Teorema 2.1.2 permite-nos afirmar que se a função f tiver um limite L no número a, então L será *o* limite de f em a.

EXERCÍCIOS 2.1

Nos Exercícios de 1 a 22 são dados f(x), a e L, bem como $\lim_{x \to a} f(x) = L$. (a) Usando argumentos similares àqueles dos Exemplos 1 e 3, determine um $\delta > 0$ para o ϵ dado, tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon \qquad (11)$$

(b) Usando as propriedades das desigualdades, determine um $\delta > 0$, tal que a afirmativa (11) seja verdadeira para o valor dado de ϵ.

1. $\lim_{x \to 4} (x - 1) = 3$; $\epsilon = 0{,}2$
2. $\lim_{x \to 3} (x + 2) = 5$; $\epsilon = 0{,}02$
3. $\lim_{x \to 3} (2x + 4) = 10$; $\epsilon = 0{,}01$
4. $\lim_{x \to 2} (3x - 1) = 5$; $\epsilon = 0{,}1$
5. $\lim_{x \to 1} (5x - 3) = 2$; $\epsilon = 0{,}05$
6. $\lim_{x \to 2} (4x - 5) = 3$; $\epsilon = 0{,}001$
7. $\lim_{x \to -1} (3 - 4x) = 7$; $\epsilon = 0{,}02$
8. $\lim_{x \to -2} (2 + 5x) = -8$; $\epsilon = 0{,}002$
9. $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$; $\epsilon = 0{,}005$
10. $\lim_{x \to -4} x^2 = 16$; $\epsilon = 0{,}03$
11. $\lim_{x \to -2} x^2 = 4$; $\epsilon = 0{,}003$
12. $\lim_{x \to 1} (x^2 - 5) = -4$; $\epsilon = 0{,}01$
13. $\lim_{x \to 2} (x^2 - 2x + 1) = 1$; $\epsilon = 0{,}001$
14. $\lim_{x \to -1} (x^2 + 4x + 4) = 1$; $\epsilon = 0{,}002$
15. $\lim_{x \to 0} (x^2 + 3x - 4) = -4$; $\epsilon = 0{,}03$
16. $\lim_{x \to 3} (x^2 - x - 6) = 0$; $\epsilon = 0{,}005$
17. $\lim_{x \to -2} (2x^2 + 5x + 3) = 1$; $\epsilon = 0{,}004$
18. $\lim_{x \to 1} (3x^2 - 7x + 2) = -2$; $\epsilon = 0{,}02$
19. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$; $\epsilon = 0{,}01$
20. $\lim_{x \to 1/3} \dfrac{9x^2 - 1}{3x - 1} = 2$; $\epsilon = 0{,}01$
21. $\lim_{x \to 1/2} \dfrac{3x^2 - 8x - 3}{x - 3} = \dfrac{5}{2}$; $\epsilon = 0{,}001$
22. $\lim_{x \to 4} \dfrac{4x^2 - 4x - 3}{2x + 1} = 5$; $\epsilon = 0{,}003$

Nos Exercícios de 23 a 42, prove que o limite é o número indicado, aplicando a Definição 2.1.1.

23. $\lim_{x \to 2} 7 = 7$
24. $\lim_{x \to 5} (-4) = -4$
25. $\lim_{x \to 4} (2x + 1) = 9$
26. $\lim_{x \to 1} (4x + 3) = 7$
27. $\lim_{x \to -1} (5x + 8) = 3$
28. $\lim_{x \to 3} (3x - 5) = 4$
29. $\lim_{x \to 3} (7 - 3x) = -2$
30. $\lim_{x \to -4} (2x + 7) = -1$
31. $\lim_{x \to -2} (1 + 3x) = -5$
32. $\lim_{x \to -2} (7 - 2x) = 11$
33. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$
34. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$
35. $\lim_{x \to 1} x^2 = 1$
36. $\lim_{x \to -3} x^2 = 9$
37. $\lim_{x \to 5} (x^2 - 3x) = 10$
38. $\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x - 1) = 7$
39. $\lim_{x \to -3} (5 - x - x^2) = -1$
40. $\lim_{x \to -1} (3 + 2x - x^2) = 0$
41. $\lim_{x \to 2} (6x^2 - 13x + 5) = 3$
42. $\lim_{x \to 1} (4x^2 - 13x + 12) = 3$
43. Prove que $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$, se a for qualquer número positivo.
44. Prove que $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$, se a for qualquer número negativo.

2.2 TEOREMAS SOBRE LIMITES DE FUNÇÕES

Na Secção 2.1 provamos que o limite de uma função era um determinado número, aplicando a Definição 2.1.1. Para calcular limites de funções por métodos mais simples, usaremos teoremas cujas provas estejam baseadas na Definição 2.1.1. Esses teoremas, bem como outros sobre limites de funções que aparecem nas últimas secções deste capítulo, são chamados de "teoremas de limite" e serão assim designados sempre que aparecerem.

2.2.1 TEOREMA DE LIMITE 1

Se m e b forem constantes quaisquer,

$$\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$$

Prova Para demonstrar esse teorema, usamos a Definição 2.1.1. Para todo $\epsilon > 0$, devemos provar que existe um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |(mx + b) - (ma + b)| < \epsilon \tag{1}$$

Caso 1: $m \neq 0$.

Como $|(mx + b) - (ma + b)| = |m| \cdot |x - a|$, queremos encontrar um $\delta > 0$ tal que, para todo $\epsilon > 0$

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |m| \cdot |x - a| < \epsilon$$

ou, como $m \neq 0$

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |x - a| < \frac{\epsilon}{|m|}$$

A afirmativa acima será verdadeira se $\delta = \epsilon/|m|$; assim, concluímos que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{e} \quad \delta = \frac{\epsilon}{|m|} \quad \text{então} \quad |(mx + b) - (ma + b)| < \epsilon$$

Isso prova o teorema no Caso 1.

Caso 2: $m = 0$.

Se $m = 0$, então $|(mx + b) - (ma + b)| = 0$ para todos os valores de x. Assim, tomamos δ como sendo qualquer número positivo, e a afirmativa (1) é verdadeira. Isso prova o teorema no Caso 2. ■

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Do Teorema de Limite 1, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} (3x + 5) &= 3 \cdot 2 + 5 \\ &= 11 \end{aligned}$$ ◀

2.2.2 TEOREMA DE LIMITE 2

Se c for uma constante, então para qualquer número a,

$$\lim_{x \to a} c = c$$

Prova Isso segue imediatamente do Teorema de Limite 1, tomando $m = 0$ e $b = c$. ■

2.2.3 TEOREMA DE LIMITE 3

$$\lim_{x \to a} x = a$$

Prova Isso também segue imediatamente do Teorema de Limite 1, tomando $m = 1$ e $b = 0$. ■

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Do Teorema de Limite 2,

$$\lim_{x \to 5} 7 = 7$$

e do Teorema de Limite 3,

$$\lim_{x \to -6} x = -6$$ ◀

2.2.4 TEOREMA DE LIMITE 4

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, então

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$$

Prova Provaremos esse teorema com o sinal mais. Dado

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{2}$$

e

$$\lim_{x \to a} g(x) = M \tag{3}$$

queremos provar que

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

Usamos a Definição 2.1.1, isto é, para todo $\epsilon > 0$ precisamos provar que existe um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |[f(x) + g(x)] - (L + M)| < \epsilon \tag{4}$$

Como (2) foi dado, segue, da definição de limite, que para $\frac{1}{2}\epsilon > 0$ existe um $\delta_1 > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ então } |f(x) - L| < \tfrac{1}{2}\epsilon$$

Da mesma forma, de (3), para $\frac{1}{2}\epsilon > 0$ existe um $\delta_2 > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ então } |g(x) - M| < \tfrac{1}{2}\epsilon$$

Seja, agora, δ o menor dos dois números δ_1 e δ_2. Então, $\delta \leqslant \delta_1$ e $\delta \leqslant \delta_2$. Assim,

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \tfrac{1}{2}\epsilon$$

e

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |g(x) - M| < \tfrac{1}{2}\epsilon$$

Logo, se $0 < |x - a| < \delta$, então

$$\begin{aligned} |[f(x) + g(x)] - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leqslant |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Dessa forma, obtivemos a afirmativa (4) e, portanto, provamos que

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

A prova do Teorema de Limite 4 usando o sinal menos será deixada como exercício (veja o Exercício 46). ■

O Teorema de Limite 4 pode ser aplicado a um número qualquer finito de funções.

2.2.5 TEOREMA DE LIMITE 5

Se $\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x\to a} f_2(x) = L_2$, . . . , e $\lim_{x\to a} f_n(x) = L_n$, então

$$\lim_{x\to a} [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)] = L_1 \pm L_2 \pm \ldots \pm L_n$$

Esse teorema pode ser provado usando o Teorema de Limite 4 e a indução matemática (veja o Exercício 47).

2.2.6 TEOREMA DE LIMITE 6

Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, então

$$\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

A demonstração desse teorema é mais sofisticada do que as dos teoremas precedentes. As etapas da prova estão indicadas nos Exercícios 49 e 50.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Do Teorema de Limite 3, $\lim_{x\to 3} x = 3$ e do Teorema de Limite 1, $\lim_{x\to 3} (2x + 1) = 7$. Assim, do Teorema de Limite 6,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3} [x(2x+1)] &= \lim_{x\to 3} x \cdot \lim_{x\to 3} (2x+1) \\ &= 3 \cdot 7 \\ &= 21 \end{aligned}$$ ◀

O Teorema de Limite 6 também pode ser estendido a um número qualquer finito de funções, se aplicarmos a indução matemática.

2.2.7 TEOREMA DE LIMITE 7

Se $\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x\to a} f_2(x) = L_2$, . . . , $\lim_{x\to a} f_n(x) = L_n$, então

$$\lim_{x\to a} [f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)] = L_1 L_2 \ldots L_n$$

A demonstração será deixada como exercício (veja o Exercício 48).

2.2.8 TEOREMA DE LIMITE 8

Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e n for um inteiro positivo qualquer, então

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^n = L^n$$

A demonstração segue imediatamente do Teorema de Limite 7, tomando $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, todas iguais a $f(x)$ e $L_1, L_2, \ldots, L_n$, todos iguais a L.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Do Teorema de Limite 1, $\lim_{x\to -2} (5x + 7) = -3$. Logo, do Teorema de Limite 8, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -2} (5x+7)^4 &= \left[\lim_{x\to -2} (5x+7)\right]^4 \\ &= (-3)^4 \\ &= 81 \end{aligned}$$ ◀

2.2.9 TEOREMA DE LIMITE 9

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad \text{se } M \neq 0$$

A demonstração, baseada na Definição 2.1.1, será apresentada na Secção Suplementar 2.9.

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** Do Teorema de Limite 3, $\lim_{x \to 4} x = 4$ e do Teorema de Limite 1, $\lim_{x \to 4} (-7x + 1) = -27$. Logo, do Teorema de Limite 9,

$$\lim_{x \to 4} \frac{x}{-7x+1} = \frac{\lim_{x \to 4} x}{\lim_{x \to 4} (-7x+1)}$$

$$= \frac{4}{-27}$$

$$= -\frac{4}{27}$$ ◀

2.2.10 TEOREMA DE LIMITE 10

Se n for um inteiro positivo e $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

com a restrição de que se n for par, $L > 0$.

A demonstração desse teorema também será apresentada na Secção Suplementar 2.9.

▶ **ILUSTRAÇÃO 6** Do resultado da Ilustração 5 e do Teorema de Limite 10 segue que

$$\lim_{x \to 4} \sqrt[3]{\frac{x}{-7x+1}} = \sqrt[3]{\lim_{x \to 4} \frac{x}{-7x+1}}$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{4}{27}}$$

$$= -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$$ ◀

A seguir estão alguns exemplos ilustrando a aplicação dos teoremas acima. Para indicar o teorema de limite que está sendo usado, usamos a abreviatura "T.L." seguida do número do teorema; assim, "T.L. 2" refere-se ao Teorema de Limite 2.

EXEMPLO 1 Ache $\lim_{x \to 3} (x^2 + 7x - 5)$ e, quando aplicável, indique o teorema de limite que está sendo usado.

Solução

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}(x^2+7x-5) &= \lim_{x\to 3}x^2+\lim_{x\to 3}7x-\lim_{x\to 3}5 && \text{(T.L. 5)}\\
&= \lim_{x\to 3}x\cdot\lim_{x\to 3}x+\lim_{x\to 3}7\cdot\lim_{x\to 3}x-\lim_{x\to 3}5 && \text{(T.L. 6)}\\
&= 3\cdot 3+7\cdot 3-5 && \text{(T.L. 3 e T.L. 2)}\\
&= 9+21-5\\
&= 25
\end{aligned}$$

É importante, neste ponto, notar que o limite no Exemplo 1 foi calculado com a aplicação direta dos teoremas de limite. Para a função f, definida por $f(x) = x^2 + 7x - 5$, note que $f(3) = 25$, que é igual ao $\lim_{x\to 3}(x^2 + 7x - 5)$. Não é sempre verdade que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ (veja Exemplo 3).

EXEMPLO 2 Ache

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^3+2x+3}{x^2+5}}$$

e, quando aplicável, indique o teorema de limite que está sendo usado.

Solução

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^3+2x+3}{x^2+5}} &= \sqrt{\lim_{x\to 2}\frac{x^3+2x+3}{x^2+5}} && \text{(T.L. 10)}\\
&= \sqrt{\frac{\lim_{x\to 2}(x^3+2x+3)}{\lim_{x\to 2}(x^2+5)}} && \text{(T.L. 9)}\\
&= \sqrt{\frac{\lim_{x\to 2}x^3+\lim_{x\to 2}2x+\lim_{x\to 2}3}{\lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}5}} && \text{(T.L. 5)}\\
&= \sqrt{\frac{(\lim_{x\to 2}x)^3+\lim_{x\to 2}2\cdot\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}3}{(\lim_{x\to 2}x)^2+\lim_{x\to 2}5}} && \text{(T.L. 6 e T.L. 8)}\\
&= \sqrt{\frac{2^3+2\cdot 2+3}{2^2+5}} && \text{(T.L. 3 e T.L. 2)}\\
&= \sqrt{\frac{8+4+3}{9}}\\
&= \frac{\sqrt{15}}{3}
\end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Ache $\lim_{x\to 4} f(x)$ dado que

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{se } x \neq 4\\ 5 & \text{se } x = 4\end{cases}$$

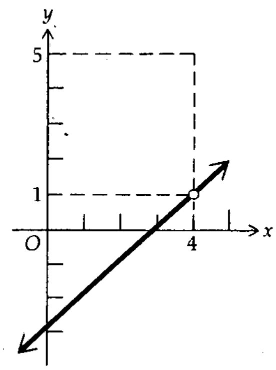


FIGURA 1

Solução Quando calculamos $\lim_{x \to 4} f(x)$ estamos considerando valores de x próximos de 4, mas não iguais a 4. Assim

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} (x - 3)$$
$$= 1 \qquad \text{(T.L. 1)}$$

No Exemplo 3, $\lim_{x \to 4} f(x) = 1$ mas $f(4) = 5$; logo, $\lim_{x \to 4} f(x) \neq f(4)$. Em termos geométricos, há uma quebra no gráfico da função no ponto onde $x = 4$ (veja a Figura 1). O gráfico da função consiste nos pontos (4, 5) e na reta cuja equação é $y = x - 3$, com a supressão do ponto (4, 1).

EXEMPLO 4 Dada

$$f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$$

(a) Use uma calculadora para tabular os valores de $f(x)$ quando x for 4, 4,5, 4,9, 4,99, 4,999 e quando x for 6, 5,5, 5,1, 5,01, 5,001. A que $f(x)$ tende quando x aproxima-se de 5?
(b) Use teoremas de limite para calcular $\lim_{x \to 5} f(x)$.

Solução
(a) As Tabelas 1 e 2 dão os valores de $f(x)$ para valores atribuídos a x. Das tabelas, $f(x)$ parece estar se aproximando de 10 à medida que x aproxima-se de 5.

Tabela 1

x	$f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$
4	9
4,5	9,5
4,9	9,9
4,99	9,99
4,999	9,999

Tabela 2

x	$f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$
6	11
5,5	10,5
5,1	10,1
5,01	10,01
5,001	10,001

(b) Aqui temos uma situação diferente daquela dos exemplos precedentes. O Teorema de Limite 9 não pode ser aplicado ao quociente $\frac{x^2 - 25}{x - 5}$, pois $\lim_{x \to 5} (x - 5) = 0$. Entretanto, fatorando o numerador obtemos

$$\frac{x^2 - 25}{x - 5} = \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5}$$

Se $x \neq 5$, o numerador e o denominador podem ser divididos por $x - 5$ para obtermos $x + 5$. Lembre-se de que quando calculamos o limite de uma função, à medida que x aproxima-se de 5, estamos considerando valores de x próximos a 5 mas não iguais a 5. Portanto, é possível dividir o numerador e o denominador por $x - 5$. A solução toma a seguinte forma:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5}$$
$$= \lim_{x \to 5} (x + 5)$$
$$= 10 \qquad \text{(T.L. 1)}$$

EXEMPLO 5 Dada

$$g(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

(a) Use a calculadora para tabular até quatro casas decimais, os valores de $g(x)$ quando x for 3, 3,5, 3,9, 3,99, 3,999 e quando x for 5, 4,5, 4,1, 4,01, 4,001. A que $g(x)$ parece tender quando x aproxima-se de 4?

(b) Determine $\lim_{x \to 4} g(x)$ e, quando aplicável, indique os teoremas de limite usados.

Solução

(a) As Tabelas 3 e 4 fornecem os valores de $g(x)$ para os valores atribuídos a x. Pelas tabelas, $g(x)$ parece estar se aproximando de 0,2500, quando x se aproxima de 4.

Tabela 3

x	$g(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$
3	0,2679
3,5	0,2583
3,9	0,2516
3,99	0,2502
3,999	0,2500

Tabela 4

x	$g(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$
5	0,2361
4,5	0,2426
4,1	0,2485
4,01	0,2498
4,001	0,2500

(b) Como no Exemplo 4, o Teorema de Limite 9 não pode ser aplicado ao quociente $\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$, pois $\lim_{x \to 4} (x-4) = 0$. Para simplificar o quociente, racionalizamos o numerador multiplicando o numerador e o denominador por $\sqrt{x}+2$.

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$
$$= \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

Como estamos calculando o limite da função para x tendendo a 4, estamos considerando valores de x próximos de 4, mas não iguais a 4. Logo, podemos dividir o numerador e o denominador por $x - 4$. Portanto

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{\sqrt{x}+2} \qquad \text{se } x \neq 4$$

A solução é a seguinte:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$
$$= \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$
$$= \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$
$$= \frac{\lim_{x\to 4} 1}{\lim_{x\to 4} (\sqrt{x}+2)} \qquad \text{(T.L. 9)}$$
$$= \frac{1}{\lim_{x\to 4} \sqrt{x} + \lim_{x\to 4} 2} \qquad \text{(T.L. 2 e T.L. 4)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\lim_{x\to 4} x} + 2} \qquad \text{(T.L. 10 e T.L. 2)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4}+2} \qquad \text{(T.L. 3)}$$
$$= \tfrac{1}{4}$$

Às vezes necessitaremos de duas outras igualdades que são equivalentes a

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Elas são dadas nos dois teoremas a seguir.

2.2.11 TEOREMA $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se e somente se $\lim_{x \to a} [f(x) - L] = 0$

Prova Dado que o teorema envolve uma condição *se e somente se*, a demonstração requer duas partes.

Parte 1: Prove que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se $\lim_{x \to a} [f(x) - L] = 0$.

Começamos por $\lim_{x \to a} f(x)$ substituindo $f(x)$ por $[f(x) - L] + L$, e então aplicamos o Teorema de Limite 4.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} ([f(x) - L] + L) \\
&= \lim_{x \to a} [f(x) - L] + \lim_{x \to a} L \\
&= 0 + L \\
&= L
\end{aligned}$$

Parte 2: Prove que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ somente se $\lim_{x \to a} [f(x) - L] = 0$.

Aqui precisamos mostrar que se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então $\lim_{x \to a} [f(x) - L] = 0$. Aplicamos o Teorema de Limite 4 a $\lim_{x \to a} [f(x) - L]$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} [f(x) - L] &= \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} L \\
&= L - L \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

2.2.12 TEOREMA $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se e somente se $\lim_{t \to 0} f(t + a) = L$

Prova Seja $t + a = x$; então $x - a = t$. Há duas partes a serem provadas.

Parte 1: Prove que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se $\lim_{t \to 0} f(t + a) = L$.

Se $\lim_{t \to 0} f(t + a) = L$, da Definição 2.1.1, segue que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se} \quad 0 < |t| < \delta \quad \text{então} \quad |f(t + a) - L| < \epsilon \tag{5}$$

ou, equivalentemente, substituindo $t + a$ por x e t por $x - a$,

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \epsilon \tag{6}$$

Da Definição 2.1.1, a afirmativa (6) implica que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Parte 2: Prove que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ somente se $\lim_{t \to 0} f(t + a) = L$.

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então, pela Definição 2.1.1, para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que a afirmação (6) seja verdadeira. Substituindo x por $t + a$ e $x - a$ por t, temos a afirmação (5). Assim, da Definição 2.1.1, podemos concluir que

$$\lim_{t \to 0} f(t + a) = L \qquad \blacksquare$$

EXERCÍCIOS 2.2

Nos Exercícios de 1 a 14, ache o limite e, quando aplicável, indique os teoremas de limite usados.

1. $\lim_{x \to 5} (3x - 7)$

2. $\lim_{x \to -4} (5x + 2)$

3. $\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x - 1)$

4. $\lim_{x \to 3} (2x^2 - 4x + 5)$

5. $\lim_{z \to -2} (z^3 + 8)$

6. $\lim_{y \to -1} (y^3 - 2y^2 + 3y - 4)$

7. $\lim_{x \to 3} \dfrac{4x - 5}{5x - 1}$

8. $\lim_{x \to 2} \dfrac{3x + 4}{8x - 1}$

9. $\lim_{t \to 2} \dfrac{t^2 - 5}{2t^3 + 6}$

10. $\lim_{x \to -1} \dfrac{2x + 1}{x^2 - 3x + 4}$

11. $\lim_{r \to 1} \sqrt{\dfrac{8r + 1}{r + 3}}$

12. $\lim_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{x^2 + 3x + 4}{x^3 + 1}}$

13. $\lim_{x \to 4} \sqrt[3]{\dfrac{x^2 - 3x + 4}{2x^2 - x - 1}}$

14. $\lim_{x \to -3} \sqrt[3]{\dfrac{5 + 2x}{5 - x}}$

Nos Exercícios de 15 a 20, faça o seguinte: (a) Use uma calculadora para tabular, até quatro casas decimais, os valores de $f(x)$ para os valores fixados dos de x. Do que $f(x)$ parece tender quando x se aproxima de c? (b) Encontre o $\lim_{x \to c} f(x)$ e, quando aplicável, indique os teoremas de limite usados.

15. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$; x é 1, 1,5, 1,9, 1,99, 1,999, e x é 3, 2,5, 2,1, 2,01, 2,001; $c = 2$

16. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 6x - 16}$; x é, −3, −2,5, −2,1, −2,01, −2,001 e x é −1, −1,5, −1,9, −1,99, −1,999; $c = -2$

17. $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 12}$; x é −4, −3,5, −3,1, −3,01, −3,001, −3,0001 e x é −2, −2,5, −2,9, −2,99, −2,999, −2,9999; $c = -3$

18. $f(x) = \dfrac{2x - 3}{4x^2 - 9}$; x é 1, 1,4, 1,49, 1,499, 1,4999 e x é 2, 1,6, 1,51, 1,501, 1,5001; $c = \frac{3}{2}$

19. $f(x) = \dfrac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$; x é 8, 8,5, 8,9, 8,99, 8,999 e x é 10, 9,5, 9,1, 9,01, 9,001; $c = 9$

20. $f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{4 - x}}{x}$; x é −1, −0,5, −0,1, −0,01, −0,001 e x é 1, 0,5, 0,1, 0,01, 0,001; $c = 0$

Nos Exercícios de 21 a 39, encontre o limite e, quando aplicável, indique os teoremas de limite usados.

21. $\lim_{x \to 7} \dfrac{x^2 - 49}{x - 7}$

22. $\lim_{z \to -5} \dfrac{z^2 - 25}{z + 5}$

23. $\lim_{x \to -3/2} \dfrac{4x^2 - 9}{2x + 3}$

24. $\lim_{x \to 1/3} \dfrac{3x - 1}{9x^2 - 1}$

25. $\lim_{s \to 4} \dfrac{3s^2 - 8s - 16}{2s^2 - 9s + 4}$

26. $\lim_{x \to 4} \dfrac{3x^2 - 17x + 20}{4x^2 - 25x + 36}$

27. $\lim_{y \to -2} \dfrac{y^3 + 8}{y + 2}$

28. $\lim_{s \to 1} \dfrac{s^3 - 1}{s - 1}$

29. $\lim_{y \to -3} \sqrt{\dfrac{y^2 - 9}{2y^2 + 7y + 3}}$

30. $\lim_{t \to 3/2} \sqrt{\dfrac{8t^3 - 27}{4t^2 - 9}}$

31. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

32. $\lim_{h \to -1} \dfrac{\sqrt{h + 5} - 2}{h + 1}$

33. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x}$

34. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

35. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{h + 1} - 1}{h}$

36. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 10}{x^2 + 3x + 2}$

37. $\lim_{x \to -1} \dfrac{2x^2 - x - 3}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5}$

38. $\lim_{y \to 4} \dfrac{2y^3 - 11y^2 + 10y + 8}{3y^3 - 17y^2 + 16y + 16}$

39. $\lim_{x \to 3} \dfrac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3}$

40. Se $f(x) = x^2 + 5x - 3$, mostre que $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

41. Se $F(x) = 2x^3 + 7x - 1$, mostre que $\lim_{x \to -1} F(x) = F(-1)$.

42. Se $g(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$, mostre que $\lim_{x \to 4} g(x) = 8$, mas que $g(4)$ não é definida.

43. Se $h(x) = \dfrac{\sqrt{x + 9} - 3}{x}$, mostre que $\lim_{x \to 0} h(x) = \frac{1}{6}$, mas que $h(0)$ não está definida.

44. Dado que f é a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

(a) Ache $\lim_{x \to 2} f(x)$ e mostre que $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$. (b) Faça um esboço do gráfico de f.

45. Dada a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9, & \text{se } x \neq -3 \\ 4 & \text{se } x = -3 \end{cases}$$

(a) Ache $\lim_{x \to -3} f(x)$ e mostre que $\lim_{x \to -3} f(x) \neq f(-3)$. (b) Faça um esboço do gráfico de f.

46. Use a Definição 2.1.1 para provar que se

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = M$$

então

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = L - M$$

47. Prove o Teorema de Limite 5 aplicando o Teorema de Limite 4 e usando indução matemática.

48. Prove o Teorema de Limite 7 aplicando o Teorema de Limite 6 e usando indução matemática.

49. Use a Definição 2.1.1 para provar que se

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

então

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$$

(*Sugestão*: para provar que $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$ precisamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) \cdot g(x)| < \epsilon$. Primeiro mostre que existe um $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta_1$, então $|f(x)| < 1 + |L|$, aplicando a Definição 2.1.1 ao $\lim_{x \to a} f(x) = L$ com $\epsilon = 1$ e $\delta = \delta_1$, então use a desigualdade triangular. Mostre então que existe um $\delta_2 > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta_2$, então $|g(x)| < \epsilon/(1 + |L|)$ aplicando a Definição 2.1.1 a $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Tomando δ como o menor dos dois números δ_1 e δ_2, o teorema está provado.)

50. Prove o Teorema de Limite 6: Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, então

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

(*Sugestão*: escreva $f(x) \cdot g(x) = [f(x) - L]g(x) + L[g(x) - M] + L \cdot M$. Aplique o Teorema de Limite 5, e o resultado do Exercício 49.)

2.3 LIMITES LATERAIS

Quando consideramos $\lim_{x \to a} f(x)$, estamos interessados em valores de x no intervalo aberto contendo a, mas não no próprio a, isto é, em valores de x próximos a a, maiores ou menores do que a. Mas, suponha que tenhamos a função f como por exemplo, $f(x) = \sqrt{x - 4}$. Como $f(x)$ não existe para $x < 4$, f não está definida em nenhum intervalo aberto contendo 4. Logo, $\lim_{x \to 4} \sqrt{x - 4}$ não tem significado. No entanto, se x estiver restrito a valores maiores do que 4, o valor de $\sqrt{x - 4}$ poderá se tornar tão próximo de zero quanto desejarmos, tomando x suficientemente próximo de 4, mas maior do que 4. Em tal caso, deixamos x aproximar-se de 4 pela direita e consideramos o **limite lateral direito** ou o **limite direito**, que será definido agora.

2.3.1 DEFINIÇÃO Seja f uma função que está definida em todos os números de algum intervalo aberto (a, c). Então, o **limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita é L**, e escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

se, para todo $\epsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < x - a < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon$$

Note que na afirmativa precedente não existem barras de valor absoluto em torno de $x - a$, pois $x - a > 0$, uma vez que $x > a$.

Segue, da Definição 2.3.1, que

$$\lim_{x \to 4^+} \sqrt{x - 4} = 0$$

Se, ao considerarmos o limite de uma função, a variável independente x estiver restrita a valores menores do que um número a, dizemos que x tende a a pela esquerda; o limite é chamado, então, de **limite lateral esquerdo** ou **limite esquerdo**.

2.3.2 DEFINIÇÃO Seja f uma função definida em todos os números de algum intervalo aberto (d, a). Então, o **limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda é L**, e escrevemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

se, para todo $\epsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < a - x < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon$$

Podemos nos referir ao $\lim_{x \to a} f(x)$ como o **limite bilateral**, para distingui-lo dos limites laterais.

Os Teoremas de Limite de 1 a 10, dados na Secção 2.2, permanecem válidos quando trocamos "$x \to a$" por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

EXEMPLO 1 A **função sinal** é definida por

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \end{cases}$$

Signum é a palavra em latim para sinal.

(a) Faça um esboço do gráfico dessa função. (b) Determine $\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x$ e $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x$, se existirem.

Solução

(a) Um esboço do gráfico aparece na Figura 1.

(b) Como $\operatorname{sgn} x = -1$ se $x < 0$ e $\operatorname{sgn} x = 1$ se $x > 0$, temos

$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1 \qquad \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

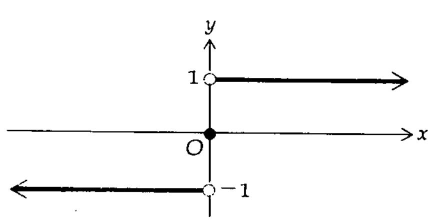


FIGURA 1

No Exemplo 1, $\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x \neq \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x$. Como os limites à esquerda e à direita não são iguais, o limite bilateral não existe. O fato de a desigualdade dos limites laterais implicar a inexistência do limite bilateral será objeto do próximo teorema.

2.3.3 TEOREMA $\lim_{x \to a} f(x)$ existe e será igual a L se e somente se $\lim_{x \to a^-} f(x)$ e $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existirem e forem iguais a L.

A prova do Teorema 2.3.3 será deixada como exercício (veja o Exercício 34).

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Um atacadista vende um produto por quilo (ou fração de quilo); se forem pedidos não mais de 10 quilos, o atacadista cobrará \$ 1 por quilo. No entanto, para incentivar pedidos maiores, ele cobra \$ 0,90 por quilo, se mais do que 10 quilos forem comprados. Assim, se x quilos do produto forem comprados e $C(x)$ for o custo total do pedido, então

$$C(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0{,}9x & \text{se } 10 < x \end{cases}$$

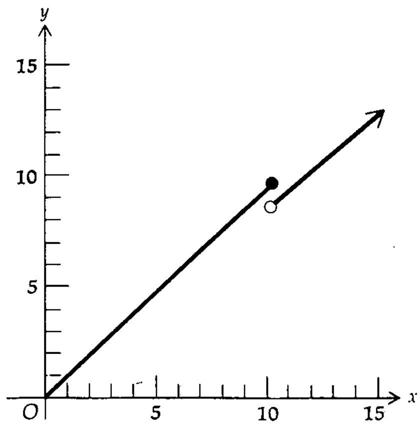


FIGURA 2

Um esboço do gráfico de C está na Figura 2. Observe que $C(x)$ foi obtido da igualdade $C(x) = x$ quando $0 \leqslant x \leqslant 10$ e da igualdade $C(x) = 0{,}9x$ quando $10 < x$. Devido a essa situação, ao considerar o limite de $C(x)$ para x tendendo a 10, precisamos distinguir entre o limite lateral esquerdo e o limite lateral direito em 10. Para a função C, temos

$$\lim_{x\to 10^-} C(x) = \lim_{x\to 10^-} x \qquad \lim_{x\to 10^+} C(x) = \lim_{x\to 10^+} 0{,}9x$$
$$= 10 \qquad\qquad\qquad = 9$$

Como $\lim\limits_{x\to 10^-} C(x) \neq \lim\limits_{x\to 10^+} C(x)$, concluímos pelo Teorema 2.3.3 que $\lim\limits_{x\to 10} C(x)$ não existe. Observe na Figura 2 que em $x = 10$ há uma quebra no gráfico da função C. Vamos retornar a essa função na Secção 2.6. ◀

EXEMPLO 2 Seja g definida por

$$g(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Faça um esboço do gráfico de g. (b) Ache $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$, se existir.

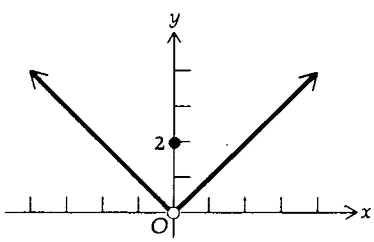


FIGURA 3

Solução
(a) Um esboço do gráfico está na Figura 3.
(b) $$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x) \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} x$$
$$= 0 \qquad\qquad\qquad = 0$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$, segue do Teorema 2.3.3 que $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ existe e é igual a zero.

Observe no Exemplo 2 que $g(0) = 2$, o que não afeta $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$. Observe também que há uma quebra no gráfico de g em $x = 0$.

EXEMPLO 3 Seja h definida por

$$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } x \leqslant 1 \\ 2 + x^2 & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

(a) Faça um esboço do gráfico de h. (b) Ache cada um dos seguintes limites, se existirem: $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$.

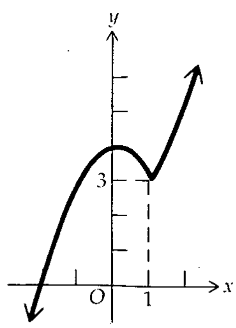


FIGURA 4

Solução
(a) Um esboço do gráfico está na Figura 4.
(b) $$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} (4 - x^2) \qquad \lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+} (2 + x^2)$$
$$= 3 \qquad\qquad\qquad = 3$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$ e ambos são iguais a 3, segue do Teorema 2.3.3 que $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = 3$.

EXEMPLO 4 Seja f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{se } x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{se } -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ 3 - x & \text{se } 3 < x \end{cases}$$

(a) Faça um esboço do gráfico de f. (b) Ache, se existirem, cada um dos seguintes limites: $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

Solução

(a) Um esboço do gráfico de f está na Figura 5.

(b) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^-} (x + 5) = 2$ $\qquad \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^+} \sqrt{9 - x^2} = 0$

Como $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$, então $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ não existe.

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \sqrt{9 - x^2} = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (3 - x) = 0$

Como $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$, então $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ não existe.

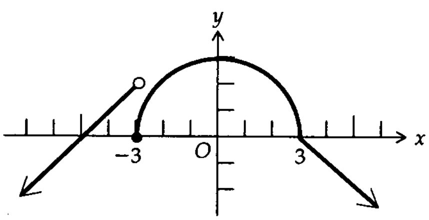


FIGURA 5

EXERCÍCIOS 2.3

Nos Exercícios de 1 a 22, faça um esboço do gráfico e ache o limite indicado, se existir; se não existir, indique a razão disto.

1. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 1 \\ -1 & \text{se } x = 1 \\ -3 & \text{se } 1 < x \end{cases}$

   (a) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$; (b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$; (c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

2. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases}$

   (a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; (b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$; (c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

3. $f(t) = \begin{cases} t + 4 & \text{se } t \leqslant -4 \\ 4 - t & \text{se } -4 < t \end{cases}$

   (a) $\lim\limits_{t \to -4^+} f(t)$; (b) $\lim\limits_{t \to -4^-} f(t)$; (c) $\lim\limits_{t \to -4} f(t)$

4. $g(s) = \begin{cases} s + 3 & \text{se } s \leqslant -2 \\ 3 - s & \text{se } -2 < s \end{cases}$

   (a) $\lim\limits_{s \to -2^+} g(s)$; (b) $\lim\limits_{s \to -2^-} g(s)$; (c) $\lim\limits_{s \to -2} g(s)$

5. $F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 2 \\ 8 - 2x & \text{se } 2 < x \end{cases}$

   (a) $\lim\limits_{x \to 2^+} F(x)$; (b) $\lim\limits_{x \to 2^-} F(x)$; (c) $\lim\limits_{x \to 2} F(x)$

6. $h(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x < 3 \\ 10 - x & \text{se } 3 \leqslant x \end{cases}$

   (a) $\lim\limits_{x \to 3^+} h(x)$; (b) $\lim\limits_{x \to 3^-} h(x)$; (c) $\lim\limits_{x \to 3} h(x)$

7. $g(r) = \begin{cases} 2r + 3 & \text{se } r < 1 \\ 2 & \text{se } r = 1 \\ 7 - 2r & \text{se } 1 < r \end{cases}$

   (a) $\lim\limits_{r \to 1^+} g(r)$; (b) $\lim\limits_{r \to 1^-} g(r)$; (c) $\lim\limits_{r \to 1} g(r)$

8. $g(t) = \begin{cases} 3 + t^2 & \text{se } t < -2 \\ 0 & \text{se } t = -2 \\ 11 - t^2 & \text{se } -2 < t \end{cases}$

   (a) $\lim\limits_{t \to -2^+} g(t)$; (b) $\lim\limits_{t \to -2^-} g(t)$; (c) $\lim\limits_{t \to -2} g(t)$

9. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 2 \\ 4 & \text{se } x = 2 \\ 4 - x^2 & \text{se } 2 < x \end{cases}$

   (a) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$; (b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$; (c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

10. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{se } x < 1 \\ 4 & \text{se } x = 1 \\ x^2 + 2 & \text{se } 1 < x \end{cases}$

    (a) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$; (b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$; (c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

11. $F(x) = |x - 5|$
(a) $\lim_{x \to 5^+} F(x)$; (b) $\lim_{x \to 5^-} F(x)$; (c) $\lim_{x \to 5} F(x)$

12. $f(x) = 3 + |2x - 4|$
(a) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$; (b) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$; (c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

13. $G(x) = |2x - 3| - 4$
(a) $\lim_{x \to 3/2^+} G(x)$; (b) $\lim_{x \to 3/2^-} G(x)$; (c) $\lim_{x \to 3/2} G(x)$

14. $F(x) = \begin{cases} |x - 1| & \text{se } x < -1 \\ 0 & \text{se } x = -1 \\ |1 - x| & \text{se } -1 < x \end{cases}$
(a) $\lim_{x \to -1^+} F(x)$; (b) $\lim_{x \to -1^-} F(x)$; (c) $\lim_{x \to -1} F(x)$

15. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$
(a) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$; (b) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$; (c) $\lim_{x \to 0} f(x)$

16. $S(x) = |\operatorname{sgn} x|$ (sgn x é definido no Exemplo 1)
(a) $\lim_{x \to 0^+} S(x)$; (b) $\lim_{x \to 0^-} S(x)$; (c) $\lim_{x \to 0} S(x)$

17. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < -2 \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{se } -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ -2 & \text{se } 2 < x \end{cases}$
(a) $\lim_{x \to -2^-} f(x)$; (b) $\lim_{x \to -2^+} f(x)$; (c) $\lim_{x \to -2} f(x)$; (d) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$;
(e) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$; (f) $\lim_{x \to 2} f(x)$

18. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x < -1 \\ x^2 & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 < x \end{cases}$
(a) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$; (b) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$; (c) $\lim_{x \to -1} f(x)$; (d) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$;
(e) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$; (f) $\lim_{x \to 1} f(x)$

19. $f(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{t} & \text{se } t < 0 \\ \sqrt{t} & \text{se } 0 \leqslant t \end{cases}$
(a) $\lim_{t \to 0^+} f(t)$; (b) $\lim_{t \to 0^-} f(t)$; (c) $\lim_{t \to 0} f(t)$

20. $g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x} & \text{se } x \leqslant 0 \\ \sqrt[3]{x} & \text{se } 0 < x \end{cases}$
(a) $\lim_{x \to 0^+} g(x)$; (b) $\lim_{x \to 0^-} g(x)$; (c) $\lim_{x \to 0} g(x)$

21. $F(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 9} & \text{se } x \leqslant -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{se } -3 < x < 3 \\ \sqrt{x^2 - 9} & \text{se } 3 \leqslant x \end{cases}$
(a) $\lim_{x \to -3^-} F(x)$; (b) $\lim_{x \to -3^+} F(x)$; (c) $\lim_{x \to -3} F(x)$; (d) $\lim_{x \to 3^-} F(x)$;
(e) $\lim_{x \to 3^+} F(x)$; (f) $\lim_{x \to 3} F(x)$

22. $G(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{t + 1} & \text{se } t \leqslant -1 \\ \sqrt{1 - t^2} & \text{se } -1 < t < 1 \\ \sqrt[3]{t - 1} & \text{se } 1 \leqslant t \end{cases}$
(a) $\lim_{t \to -1^-} G(t)$; (b) $\lim_{t \to -1^+} G(t)$; (c) $\lim_{t \to -1} G(t)$; (d) $\lim_{t \to 1^-} G(t)$;
(e) $\lim_{t \to 1^+} G(t)$; (f) $\lim_{t \to 1} G(t)$

23. $F(x) = x - 2 \operatorname{sgn} x$, onde sgn x está definido no Exemplo 1. Ache, se existirem: (a) $\lim_{x \to 0^+} F(x)$; (b) $\lim_{x \to 0^-} F(x)$; (c) $\lim_{x \to 0} F(x)$.

24. $h(x) = \operatorname{sgn} x - U(x)$, onde sgn x está definido no Exemplo 1 e U é uma função escada definida por

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases}$$

Ache, se existirem: (a) $\lim_{x \to 0^+} h(x)$; (b) $\lim_{x \to 0^-} h(x)$; (c) $\lim_{x \to 0} h(x)$.

25. Ache, se existirem: (a) $\lim_{x \to 2^+} [\![x]\!]$; (b) $\lim_{x \to 2^-} [\![x]\!]$; (c) $\lim_{x \to 2} [\![x]\!]$.

26. Ache, se existirem: (a) $\lim_{x \to 4^+} [\![x - 3]\!]$; (b) $\lim_{x \to 4^-} [\![x - 3]\!]$; (c) $\lim_{x \to 4} [\![x - 3]\!]$.

27. Seja $h(x) = (x - 1) \operatorname{sgn} x$. Faça um esboço do gráfico de h. Ache, se existirem: (a) $\lim_{x \to 0^+} h(x)$; (b) $\lim_{x \to 0^-} h(x)$; (c) $\lim_{x \to 0} h(x)$.

28. Seja $G(x) = [\![x]\!] + [\![4 - x]\!]$. Faça um esboço do gráfico de G. Ache, se existirem: (a) $\lim_{x \to 3^+} G(x)$; (b) $\lim_{x \to 3^-} G(x)$; (c) $\lim_{x \to 3} G(x)$.

29. Dada $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{se } x < 4 \\ 5x + k & \text{se } 4 \leqslant x \end{cases}$. Ache o valor de k para o qual $\lim_{x \to 4} f(x)$ existe.

30. Dada $f(x) = \begin{cases} kx - 3 & \text{se } x \leqslant -1 \\ x^2 + k & \text{se } -1 < x \end{cases}$. Ache o valor de k para o qual $\lim_{x \to -1} f(x)$ existe.

31. Dada $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant -2 \\ ax + b & \text{se } -2 < x < 2 \\ 2x - 6 & \text{se } 2 \leqslant x \end{cases}$. Ache os valores de a e b, tais que $\lim_{x \to -2} f(x)$ e $\lim_{x \to 2} f(x)$ ambos existam.

32. Dada $f(x) = \begin{cases} 2x - a & \text{se } x < -3 \\ ax + 2b & \text{se } -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ b - 5x & \text{se } 3 < x \end{cases}$. Ache os valores de a e b, tais que existam os limites: $\lim_{x \to -3} f(x)$ e $\lim_{x \to 3} f(x)$.

33. Seja $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \end{cases}$. Mostre que $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe, porém $\lim_{x \to 0} |f(x)|$ não existe.

34. Prove o Teorema 2.3.3.

35. As taxas para despachar cargas por navio são freqüentemente baseadas em fórmulas que oferecem um preço menor por quilo quando o tamanho da carga é maior. Suponha que x quilos sejam o peso de uma carga, $C(x)$ seja o seu custo total e

$$C(x) = \begin{cases} 0{,}80x & \text{se } 0 < x \leqslant 50 \\ 0{,}70x & \text{se } 50 < x \leqslant 200 \\ 0{,}65x & \text{se } 200 < x \end{cases}$$

(a) Faça um esboço do gráfico de C. Ache cada um dos seguintes limites: (b) $\lim_{x \to 50^-} C(x)$; (c) $\lim_{x \to 50^+} C(x)$;
(d) $\lim_{x \to 200^-} C(x)$; (e) $\lim_{x \to 200^+} C(x)$.

36. Dada $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{se } x \leqslant 1 \\ x + 1 & \text{se } 1 < x \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 1 \\ 2 & \text{se } 1 < x \end{cases}$

(a) Mostre que $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ ambos existem, mas não são iguais e, portanto, $\lim_{x \to 1} f(x)$ não existe.

(b) Mostre que $\lim_{x \to 1^-} g(x)$ e $\lim_{x \to 1^+} g(x)$ ambos existem, mas não são iguais e, portanto, $\lim_{x \to 1} g(x)$ não existe.

(c) Ache fórmulas para $f(x) \cdot g(x)$.

(d) Prove que $\lim_{x \to 1} [f(x) \cdot g(x)]$ existe mostrando que $\lim_{x \to 1^-} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to 1^+} [f(x) \cdot g(x)]$.

2.4 LIMITES INFINITOS

Nesta secção discutiremos funções cujos valores aumentam ou diminuem sem limitação, quando a variável independente aproxima-se cada vez mais de um número fixo. Primeiro consideraremos a função definida por

$$f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$$

O domínio de f é o conjunto de todos os números reais exceto 2 e a imagem é o conjunto de todos os números positivos. Vamos pesquisar os valores funcionais de f quando x está próximo de 2. Façamos x aproximar-se de 2 pela direita; seja x 3, 2,5, 2,25, 2,1, 2,01 e 2,001 e usamos uma calculadora para calcular os valores correspondentes de $f(x)$ mostrados na Tabela 1. Dessa tabela você vê intuitivamente que à medida que x se aproxima de 2 por valores maiores do que 2, $f(x)$ cresce indefinidamente. Em outras palavras, podemos tornar $f(x)$ maior do que qualquer número positivo prefixado (isto é, $f(x)$ pode se tornar tão grande quanto desejarmos) para todos os valores de x suficientemente próximos de 2 e x maior do que 2.

Tabela 1

x	$f(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}$
3	3
2,5	12
2,25	48
2,1	300
2,01	30.000
2,001	3.000.000

Para indicar que $f(x)$ cresce indefinidamente quando x tende a 2 por valores maiores do que 2, escrevemos

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$$

Façamos agora x aproximar-se de 2 pela esquerda; consideraremos os valores de x iguais a 1, 1,5, 1,75, 1,9, 1,99 e 1,999 e usaremos uma calculadora para obter os valores correspondentes de $f(x)$ que aparecem na Tabela 2. Você vê intuitivamente, dessa tabela, que à medida que x aproxima-se de 2 por valores menores do que 2, $f(x)$ cresce sem limites e escrevemos

Tabela 2

x	$f(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}$
1	3
1,5	12
1,75	48
1,9	300
1,99	30.000
1,999	3.000.000

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$$

Assim sendo, quando x tende a 2 pela direita ou pela esquerda, $f(x)$ cresce sem limites e escrevemos

$$\lim_{x \to 2} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$$

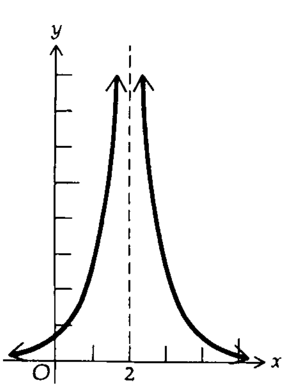


FIGURA 1

Dos dados apresentados nas Tabelas 1 e 2 obtemos o esboço do gráfico de f mostrado na Figura 1. Observe que ambos os "ramos" da curva aproximam-se da reta pontilhada $x = 2$, quando x cresce indefinidamente. Essa reta pontilhada é chamada de *assíntota vertical* e será definida mais adiante, nesta secção.

Apresentaremos agora a definição formal de *valores funcionais que crescem indefinidamente*.

2.4.1 DEFINIÇÃO

Seja f uma função definida em todo número de um intervalo aberto I contendo a, exceto possivelmente no próprio a. **Quando x tende a a, $f(x)$ cresce indefinidamente** e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \tag{1}$$

se para qualquer número $N > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que

se $0 < |x - a| < \delta$ então $f(x) > N$

Outra maneira de dar a Definição 2.4.1 é a seguinte: "Os valores funcionais de $f(x)$ crescem indefinidamente quando x tende a um número a, se $f(x)$ puder se tornar tão grande quanto desejarmos (isto é, maior do que qualquer número positivo N) para todos os valores de x suficientemente próximos de a, mas não iguais a a."

Devemos enfatizar novamente que $+\infty$ não é o símbolo de um número real; logo, ao escrevermos $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, isto não tem o mesmo significado que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, onde L é um número real. A igualdade (1) pode ser lida como "o limite de $f(x)$ quando x tende a a é infinito positivo". Em tal caso, o limite não existe, mas o símbolo $+\infty$ indica o comportamento dos valores funcionais $f(x)$ quando x aproxima-se cada vez mais de a.

Analogamente, podemos indicar o comportamento de uma função cujos valores funcionais decrescem indefinidamente. Para tanto, consideremos a função g definida pela igualdade

$$g(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

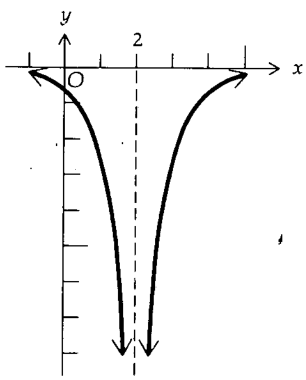


FIGURA 2

Um esboço do gráfico dessa função está na Figura 2.

Os valores funcionais dados por $g(x) = -3/(x-2)^2$ são os negativos dos valores dados por $f(x) = 3/(x-2)^2$. Assim, para a função g, quando x tende a 2, pela direita ou pela esquerda, $g(x)$ decresce indefinidamente e escrevemos

$$\lim_{x \to 2} \frac{-3}{(x-2)^2} = -\infty$$

2.4.2 DEFINIÇÃO

Seja f uma função definida em todo número de algum intervalo I contendo a, exceto possivelmente no próprio a. **Quando x tende a a, $f(x)$ decresce indefinidamente** e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

se para todo número $N < 0$, existir um $\delta > 0$ tal que

se $0 < |x - a| < \delta$ então $f(x) < N$

Nota: A igualdade (2) pode ser lida como "o limite de $f(x)$ quando x tende a a é infinito negativo", observando novamente que o limite não existe e que o símbolo $-\infty$ indica somente o comportamento dos valores funcionais quando x tende a a.

Podemos considerar limites laterais "infinitos". Especificando, $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$, se f estiver definida em todo número de algum intervalo aberto (a, c) e se para todo número $N > 0$ existir em $\delta > 0$ tal que

se $0 < x - a < \delta$ então $f(x) > N$

Definições análogas podem ser dadas para $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

Suponha, agora, que h seja a função definida pela igualdade

$$h(x) = \frac{2x}{x-1} \tag{3}$$

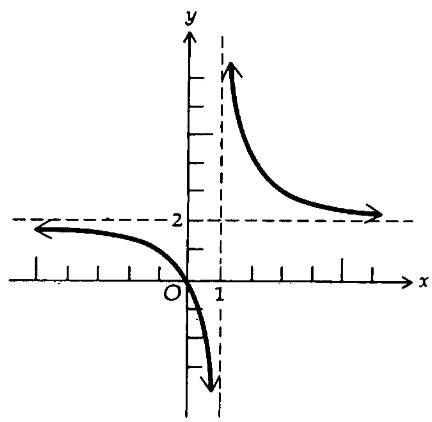


FIGURA 3

Um esboço do gráfico dessa função está na Figura 3. Observando as Figuras 1, 2 e 3, note a diferença entre o comportamento da função cujo gráfico está esboçado na Figura 3 e o das funções das duas outras figuras. Observe que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty \tag{4}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x}{x-1} = +\infty \tag{5}$$

Isto é, para a função definida por (3), à medida que x se aproxima de 1 por valores menores do que 1, a função decresce indefinidamente e, à medida que x se aproxima de 1 por valores maiores do que 1, os valores funcionais crescem indefinidamente.

Antes de dar alguns exemplos, precisamos de dois teoremas que tratam de limites "infinitos".

2.4.3 TEOREMA DE LIMITE 11

Se r for um inteiro positivo qualquer, então

(i) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^r} = +\infty$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty \text{ se } r \text{ for ímpar} \\ +\infty \text{ se } r \text{ for par} \end{cases}$

Prova Vamos demonstrar a parte (i). A prova da parte (ii) é análoga e será deixada como exercício (veja o Exercício 45). Precisamos mostrar que para todo $N > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < x < \delta \text{ então } \frac{1}{x^r} > N$$

ou, equivalentemente, como $x > 0$ e $N > 0$,

$$\text{se } 0 < x < \delta \text{ então } x^r < \frac{1}{N}$$

ou, equivalentemente, como $r > 0$,

$$\text{se } 0 < x < \delta \text{ então } x < \left(\frac{1}{N}\right)^{1/r}$$

A afirmativa acima é válida se $\delta = \left(\frac{1}{N}\right)^{1/r}$. Assim sendo, quando $\delta = \left(\frac{1}{N}\right)^{1/r}$

$$\text{se } 0 < x < \delta \text{ então } \frac{1}{x^r} > N \qquad \blacksquare$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Do Teorema de Limite 11(i) segue que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^4} = +\infty$$

Do Teorema de Limite 11(ii)

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^4} = +\infty$$ ◀

O Teorema de Limite 12, a seguir, trata do limite de uma função racional para a qual o limite do denominador é 0 e o limite do numerador é uma constante não-nula. Tal situação ocorre em (4) e (5).

2.4.4 TEOREMA DE LIMITE 12

Se a for um número real qualquer e se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = c$, onde c é uma constante não-nula, então

(i) se $c > 0$ e se $f(x) \to 0$ por valores positivos de $f(x)$

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

(ii) se $c > 0$ e se $f(x) \to 0$ por valores negativos de $f(x)$,

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

(iii) se $c < 0$ e se $f(x) \to 0$ por valores positivos de $f(x)$,

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty.$$

(iv) se $c < 0$ e se $f(x) \to 0$ por valores negativos de $f(x)$,

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

O teorema também será válido se "$x \to a$" for substituído por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

Prova Provaremos a parte (i) e deixaremos as demonstrações das outras partes como exercícios (veja os Exercícios 46-48).

Para provar que

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

precisamos mostrar que para todo $N > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad \frac{g(x)}{f(x)} > N \tag{6}$$

Como $\lim_{x\to a} g(x) = c > 0$, tomando $\epsilon = \frac{1}{2}c$ na Definição 2.1.1, segue que existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{então} \quad |g(x) - c| < \tfrac{1}{2}c$$

Aplicando o Teorema 1.1.10 à desigualdade da página anterior, segue que existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ então } -\tfrac{1}{2}c < g(x) - c < \tfrac{1}{2}c$$

$$\Leftrightarrow \text{ se } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ então } \tfrac{1}{2}c < g(x) < \tfrac{3}{2}c$$

Assim, existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ então } g(x) > \tfrac{1}{2}c \tag{7}$$

Agora, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$. Assim, para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ então } |f(x)| < \epsilon$$

Como $f(x)$ está se aproximando de zero por valores positivos de $f(x)$, as barras de valor absoluto em $f(x)$ podem ser removidas; assim, para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ então } 0 < f(x) < \epsilon \tag{8}$$

Das afirmações (7) e (8), podemos concluir que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ e um $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{e} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ então } \frac{g(x)}{f(x)} > \frac{\frac{1}{2}c}{\epsilon}$$

Logo, se $\epsilon = c/(2N)$ e $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ então

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } \frac{g(x)}{f(x)} > \frac{\frac{1}{2}c}{c/(2N)} = N$$

que é a afirmativa (6). Assim sendo, a parte (i) está provada. ■

Aplicando o Teorema de Limite 12, podemos freqüentemente obter uma indicação de que o resultado será $+\infty$ ou $-\infty$, tomando um *valor adequado* de x próximo de a para nos assegurarmos de que o quociente é positivo ou negativo, conforme mostra a ilustração a seguir.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Em (4) tínhamos

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{x - 1}$$

O Teorema de Limite 12 é aplicável, pois $\lim\limits_{x \to 1^-} 2x = 2$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} (x - 1) = 0$. Queremos determinar se temos $+\infty$ ou $-\infty$. Como $x \to 1^-$, vamos tomar um valor de x próximo e menor do que 1; por exemplo, seja $x = 0{,}9$. Então

$$\frac{2x}{x - 1} = \frac{2(0{,}9)}{0{,}9 - 1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{x - 1} = -18$$

O quociente negativo leva-nos a suspeitar que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{x - 1} = -\infty$$

Esse resultado segue da parte (ii) do Teorema de Limite 12, pois quando $x \to 1^-$, $x - 1$ está tendendo a 0 por valores negativos.

Para o limite em (5), como $x \to 1^+$, vamos tomar $x = 1{,}1$. Então

$$\frac{2x}{x-1} = \frac{2(1{,}1)}{1{,}1-1} \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} = 22$$

Como o quociente é positivo, suspeitamos que

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x}{x-1} = +\infty$$

Esse resultado segue da parte (i) do Teorema de Limite 12, pois quando $x \to 1^+$, $x - 1$ está tendendo a 0 por valores positivos. ◄

Ao usar o procedimento descrito na Ilustração 2, certifique-se de que os valores escolhidos de x estejam suficientemente próximos de a para obter o verdadeiro comportamento do quociente. Por exemplo, ao calcular $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x}{x-1}$, o valor de x escolhido deve ser não somente menor do que 1, mas também maior do que 0.

EXEMPLO 1 Ache

(a) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3}$ (b) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3}$

Solução

(a) $$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 + x + 2}{(x-3)(x+1)}$$

O limite do numerador é 14, o que pode ser facilmente verificado.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 3^+} (x-3)(x+1) &= \lim_{x \to 3^+} (x-3) \cdot \lim_{x \to 3^+} (x+1) \\ &= 0 \cdot 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

O limite do denominador é 0 e ele está tendendo a 0 por valores positivos. Então, do Teorema de Limite 12(i),

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = +\infty$$

(b) $$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 + x + 2}{(x-3)(x+1)}$$

Como na parte (a), o limite do numerador é 14.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 3^-} (x-3)(x+1) &= \lim_{x \to 3^-} (x-3) \cdot \lim_{x \to 3^-} (x+1) \\ &= 0 \cdot 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nesse caso, o limite do denominador é 0, mas ele está tendendo a 0 por valores negativos. Do Teorema de Limite 12(ii),

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = -\infty$$

EXEMPLO 2 Ache

(a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ (b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$

Solução

(a) Como $x \to 2^+$, $x - 2 > 0$; então $x - 2 = \sqrt{(x-2)^2}$. Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} &= \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{\sqrt{(x-2)^2}}\\ &= \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}\sqrt{x-2}}\\ &= \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}\end{aligned}$$

O limite do numerador é 2. O limite do denominador é 0 e ele está tendendo a 0 por valores positivos. Logo, do Teorema de Limite 12(i), segue que

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} = +\infty$$

(b) Como $x \to 2^-$, $x - 2 < 0$; então $x - 2 = -\sqrt{(2-x)^2}$. Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} &= \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{2-x}\sqrt{2+x}}{-\sqrt{2-x}\sqrt{2-x}}\\ &= \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{2+x}}{-\sqrt{2-x}}\end{aligned}$$

O limite do numerador é 2. O limite do denominador é 0 e ele está tendendo a 0 por valores negativos. Logo, pelo Teorema de Limite 12(ii),

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} = -\infty$$

EXEMPLO 3 Ache

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{[\![x]\!]-4}{x-4}$$

Solução $\lim\limits_{x\to 4^-} [\![x]\!] = 3$. Logo, $\lim\limits_{x\to 4^-} ([\![x]\!] - 4) = 1$. Além disso, $\lim\limits_{x\to 4^-} (x-4) = 0$ e $x - 4$ tende a 0 por valores negativos. Assim, do Teorema de Limite 12(iv),

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{[\![x]\!]-4}{x-4} = +\infty$$

Lembre-se de que como $+\infty$ e $-\infty$ não são símbolos de números reais, os Teoremas de Limite 1 – 10 da Secção 2.2 não são válidos para limites "infinitos". Mas existem propriedades referentes a tais limites, que serão dadas a seguir. As demonstrações serão deixadas como exercícios (veja os Exercícios 49-51).

2.4.5 TEOREMA

(i) se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = c$, onde c é uma constante qualquer, então $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = +\infty$

(ii) se $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = c$, onde c é uma constante qualquer, então $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = -\infty$

O teorema continua válido se "$x \to a$" for substituído por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Como $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$ e $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{4}$, segue do Teorema 2.4.5(i) que

$$\lim_{x \to 2^+} \left[\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}\right] = +\infty$$ ◀

2.4.6 TEOREMA

Se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = c$, onde c é uma constante não-nula, então

(i) se $c > 0$, $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = +\infty$;

(ii) se $c < 0$, $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = -\infty$.

O teorema continua válido se "$x \to a$" for substituído por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

▶ **ILUSTRAÇÃO 4**

$$\lim_{x \to 3} \frac{5}{(x-3)^2} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 3} \frac{x+4}{x-4} = -7$$

Logo, pelo Teorema 2.4.6 (ii),

$$\lim_{x \to 3} \left[\frac{5}{(x-3)^2} \cdot \frac{x+4}{x-4}\right] = -\infty$$ ◀

2.4.7 TEOREMA

Se $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = c$, onde c é uma constante não-nula, então

(i) se $c > 0$, $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = -\infty$;

(ii) se $c < 0$, $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = +\infty$.

O teorema permanecerá válido se "$x \to a$" for substituído por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

ILUSTRAÇÃO 5 No Exemplo 2(b) mostramos que

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 2} = -\infty$$

Além disso

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x-3}{x+2} = -\frac{1}{4}$$

Assim, do Teorema 2.4.7 (ii), segue que

$$\lim_{x \to 2^-} \left[\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} \cdot \frac{x-3}{x+2} \right] = +\infty$$ ◀

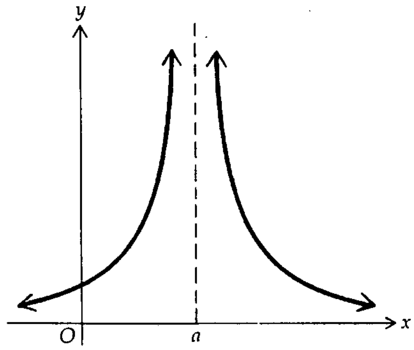


FIGURA 4

Os limites infinitos são aplicados para encontrarmos *assíntotas verticais* de um gráfico, se elas existirem. Veja a Figura 4 que mostra um esboço do gráfico da função definida por

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^2} \tag{9}$$

Qualquer reta paralela e acima do eixo x interceptará esse gráfico em dois pontos: um ponto à esquerda da reta $x = a$ e outro à sua direita. Assim, para todo $k > 0$, não importa quão grande, a reta $y = k$ interceptará o gráfico de f em dois pontos; a distância desses pontos à reta $x = a$ torna-se cada vez menor, à medida que k é tomado cada vez maior. A reta $x = a$ é chamada de *assíntota vertical* do gráfico de f.

2.4.8 DEFINIÇÃO

A reta $x = a$ será uma **assíntota vertical** do gráfico da função f, se pelo menos uma das afirmativas for verdadeira:

(i) $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

(ii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

(iii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

(iv) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

▶ **ILUSTRAÇÃO 6** Cada uma das Figuras de 5 a 8 mostra parte do gráfico de uma função para a qual a reta $x = a$ é uma assíntota vertical. Na Figura 5 a parte (i) da Definição 2.4.8 se aplica; na Figura 6 aplica-se a parte (ii) e nas Figuras 7 e 8 aplicam-se as partes (iii) e (iv), respectivamente. ◀

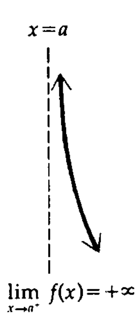


FIGURA 5

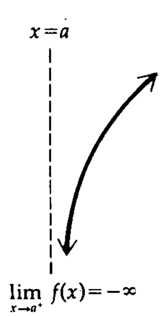


FIGURA 6

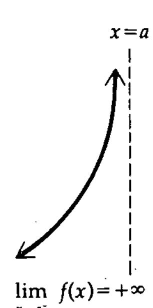


FIGURA 7

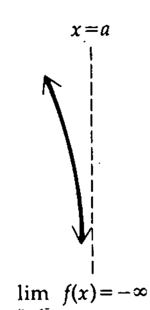


FIGURA 8

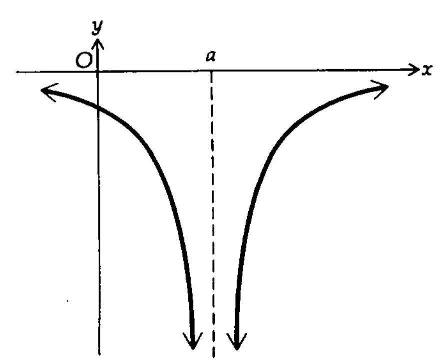


FIGURA 9

Para a função definida por (9), ambas as partes (i) e (iii) da definição acima são verdadeiras. Veja a Figura 4 se g for a função definida por

$$g(x) = -\frac{1}{(x-a)^2}$$

então ambas as partes (ii) e (iv) serão verdadeiras e a reta $x = a$ será uma assíntota vertical do gráfico de g. Isso é ilustrado pela Figura 9.

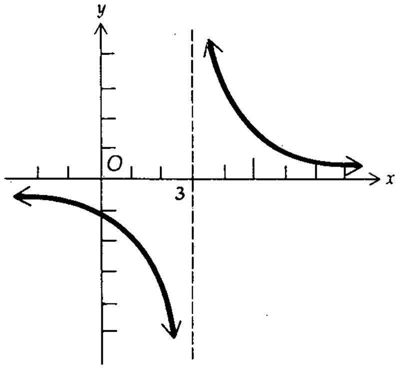


FIGURA 10

EXEMPLO 4 Ache a assíntota vertical e faça um esboço do gráfico da função definida

$$f(x) = \frac{3}{x-3}$$

Solução

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{3}{x-3} = +\infty \qquad \lim_{x \to 3^-} \frac{3}{x-3} = -\infty$$

Segue, da Definição 2.4.8, que a reta $x = 3$ é uma assíntota vertical do gráfico de f, cujo esboço está na Figura 10.

EXERCÍCIOS 2.4

Nos Exercícios de 1 a 12, faça o seguinte: (a) use uma calculadora para tabular valores de f(x) para valores fixados de x e, a partir deles, faça uma afirmação a respeito do comportamento evidente de f(x). (b) Ache o limite indicado.

1. (a) $f(x) = \frac{1}{x-5}$; x é 6, 5,5, 5,1, 5,01, 5,001, 5,0001;
(b) $\lim_{x \to 5^+} \frac{1}{x-5}$

2. (a) $f(x) = \frac{1}{x-5}$; x é 4, 4,5, 4,9, 4,99, 4,999, 4,9999;
(b) $\lim_{x \to 5^-} \frac{1}{x-5}$

3. (a) $f(x) = \frac{1}{(x-5)^2}$; x é 6, 5,5, 5,1, 5,01, 5,001, 5,0001 e x é 4, 4,5, 4,9, 4,99, 4,999, 4,9999; (b) $\lim_{x \to 5} \frac{1}{(x-5)^2}$

4. (a) $f(x) = \frac{x+2}{1-x}$; x é 0, 0,5, 0,9, 0,99, 0,999, 0,9999;
(b) $\lim_{x \to 1^-} \frac{x+2}{1-x}$

5. (a) $f(x) = \frac{x+2}{1-x}$; x é 2, 1,5, 1,1, 1,01, 1,001, 1,0001;
(b) $\lim_{x \to 1^+} \frac{x+2}{1-x}$

6. (a) $f(x) = \frac{x+2}{(x-1)^2}$; x 0, 0,5, 0,9, 0,99, 0,999, 0,9999 e x é 2, 1,5, 1,1, 1,01, 1,001, 1,0001; (b) $\lim_{x \to 1} \frac{x+2}{(x-1)^2}$

7. (a) $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$; x é 0, −0,5, −0,9, −0,99, −0,999, −0,9999; (b) $\lim_{x \to -1^+} \frac{x-2}{x+1}$

8. (a) $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$; x é −2, −1,5, −1,1, −1,01, −1,001, −1,0001; (b) $\lim_{x \to -1^-} \frac{x-2}{x+1}$

9. (a) $f(x) = \frac{x}{x+4}$; x é −5, −4,5, −4,1, −4,01, −4,001, −4,0001; (b) $\lim_{x \to -4^-} \frac{x}{x+4}$

10. (a) $f(x) = \frac{x}{x-4}$; x é 5, 4,5, 4,1, 4,01, 4,001, 4,0001;
(b) $\lim_{x \to 4^+} \frac{x}{x-4}$

11. (a) $f(x) = \frac{4x}{9-x^2}$; x é −4, −3,5, −3,1, −3,01, −3,001, −3,0001; (b) $\lim_{x \to -3^-} \frac{4x}{9-x^2}$

12. (a) $f(x) = \dfrac{4x^2}{9 - x^2}$; x é 4, 3,5, 3,1, 3,01, 3,001, 3,0001;
(b) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{4x^2}{9 - x^2}$

Nos Exercícios de 13 a 32, ache o limite.

13. $\lim\limits_{t \to 2^+} \dfrac{t + 2}{t^2 - 4}$
14. $\lim\limits_{t \to 2^-} \dfrac{-t + 2}{(t - 2)^2}$
15. $\lim\limits_{t \to 2^-} \dfrac{t + 2}{t^2 - 4}$
16. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{3 + x^2}}{x}$
17. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{3 + x^2}}{x}$
18. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{3 + x^2}}{x^2}$
19. $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 3}$
20. $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{\sqrt{16 - x^2}}{x - 4}$
21. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$
22. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - 3}{x^3 + x^2}$
23. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2 - 4x^3}{5x^2 + 3x^3}$
24. $\lim\limits_{s \to 2^-} \left(\dfrac{1}{s - 2} - \dfrac{3}{s^2 - 4}\right)$
25. $\lim\limits_{t \to -4^-} \left(\dfrac{2}{t^2 + 3t - 4} - \dfrac{3}{t + 4}\right)$
26. $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x^3 - 5x^2}{x^2 - 1}$
27. $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{[\![x]\!] - x}{3 - x}$
28. $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{[\![x^2]\!] - 1}{x^2 - 1}$
29. $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^3 + 9x^2 + 20x}{x^2 + x - 12}$
30. $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{6x^2 + x - 2}{2x^2 + 3x - 2}$
31. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x - 1}{\sqrt{2x - x^2} - 1}$
32. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x - 2}{2 - \sqrt{4x - x^2}}$

33. Para cada uma das funções a seguir, ache a assíntota vertical do gráfico e faça um esboço dele:
(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; (b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$; (c) $h(x) = \dfrac{1}{x^3}$; (d) $\phi(x) = \dfrac{1}{x^4}$.

34. Para cada uma das funções a seguir, ache a assíntota vertical do gráfico e faça um esboço dele:
(a) $f(x) = -\dfrac{1}{x}$; (b) $g(x) = -\dfrac{1}{x^2}$; (c) $h(x) = -\dfrac{1}{x^3}$;
(d) $\phi(x) = -\dfrac{1}{x^4}$.

Nos Exercícios de 35 a 42, ache a(s) assíntota(s) vertical(is) do gráfico da função e faça um esboço dele.

35. $f(x) = \dfrac{2}{x - 4}$
36. $f(x) = \dfrac{3}{x + 1}$
37. $f(x) = \dfrac{-2}{x + 3}$
38. $f(x) = \dfrac{-4}{x - 5}$
39. $f(x) = \dfrac{-2}{(x + 3)^2}$
40. $f(x) = \dfrac{4}{(x - 5)^2}$
41. $f(x) = \dfrac{5}{x^2 + 8x + 15}$
42. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 5x - 6}$

43. Prove que $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3}{(x - 2)^2} = +\infty$, usando a Definição 2.4.1.
44. Prove que $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{-2}{(x - 4)^2} = -\infty$, usando a Definição 2.4.2.
45. Prove o Teorema 2.4.3 (ii).
46. Prove o Teorema 2.4.4 (ii).
47. Prove o Teorema 2.4.4 (iii).
48. Prove o Teorema 2.4.4 (iv).
49. Prove o Teorema 2.4.5.
50. Prove o Teorema 2.4.6.
51. Prove o Teorema 2.4.7.
52. Use a Definição 2.4.1 para provar que $\lim\limits_{x \to -3} \left|\dfrac{5 - x}{3 + x}\right| = +\infty$.

2.5 LIMITES NO INIFINITO

A secção anterior foi dedicada a limites infinitos onde os valores funcionais aumentavam ou diminuíam indefinidamente, enquanto a variável independente aproximava-se de um número real. Agora vamos considerar limites de funções, quando a variável independente cresce ou diminui indefinidamente. Começaremos com a função definida por

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

Atribuímos a x os valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 100, 1000 e assim por diante, permitindo que aumente indefinidamente. Os valores funcionais correspondentes, exatos ou aproximados, encontrados com o uso de uma calculadora com seis casas, são dados na Tabela 1. Observe na tabela que quando x cresce, tomando valores positivos, os valores funcionais aproximam-se de 2.

Tabela 1

x	$f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + 1}$
0	0
1	1
2	1,6
3	1,8
4	1,882353
5	1,923077
10	1,980198
100	1,999800
1000	1,999998

Em particular, quando $x = 4$.

$$2 - \frac{2x^2}{x^2+1} = 2 - 1{,}882353$$
$$= 0{,}117647$$

Logo, a diferença entre 2 e $f(x)$ é 0,117647, quando $x = 4$. Para $x = 100$,

$$2 - \frac{2x^2}{x^2+1} = 2 - 1{,}999800$$
$$= 0{,}000200$$

Assim, a diferença entre 2 e $f(x)$ é 0,000200, quando $x = 100$.

Continuando, vemos intuitivamente que o valor de $f(x)$ pode ser obtido tão próximo de 2 quanto desejarmos, escolhendo x suficientemente grande. Em outras palavras, podemos obter uma diferença entre 2 e $f(x)$ tão pequena quanto desejarmos escolhendo x como qualquer número maior do que algum número positivo suficientemente grande. Ou, avançando um pouco, para todo $\epsilon > 0$, não importa quão pequeno, podemos encontrar um número $N > 0$, tal que se $x > N$, então $|f(x) - 2| < \epsilon$.

Quando uma variável independente x for crescente indefinidamente, através de valores positivos, escrevemos "$x \to +\infty$". Do exemplo acima, então, podemos dizer que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2$$

2.5.1 DEFINIÇÃO Seja f uma função definida em um intervalo $(a, +\infty)$ o **limite de $f(x)$ quando x cresce indefinidamente, é L,** escrito

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

se para todo $\epsilon > 0$, não importa quão pequeno, existir um número $N > 0$ tal que

se $x > N$ então $|f(x) - L| < \epsilon$

Nota: Quando escrevemos $x \to +\infty$, isto não tem o mesmo significado que, por exemplo, $x \to 1000$. O símbolo $x \to +\infty$ indica o comportamento da variável x tal como definido acima.

Vamos considerar a mesma função e atribuir a x os valores -1, -2, -3, -4, -5, -10, -100, -1000, e assim por diante, permitindo que x decresça através de valores negativos indefinidamente. A Tabela 2 dá os valores correspondentes de $f(x)$.

Tabela 2

x	$f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$
-1	1
-2	1,6
-3	1,8
-4	1,882353
-5	1,923077
-10	1,980198
-100	1,999800
-1000	1,999998

Observe que os valores funcionais para os números negativos são os mesmos que aqueles para os números positivos correspondentes. Assim, vemos intuitivamente que quando x decresce indefinidamente, $f(x)$ tende a 2; isto é, $|f(x) - 2|$ pode ser obtido tão pequeno quanto desejarmos, escolhendo x como qualquer número menor do que algum número negativo tendo um valor absoluto suficientemente grande. Formalmente, dizemos que para todo $\epsilon > 0$, não importa quão pequeno, podemos encontrar um número $N < 0$ tal que se $x < N$, então $|f(x) - 2| < \epsilon$. Usando o símbolo $x \to -\infty$ para mostrar que a variável x de-

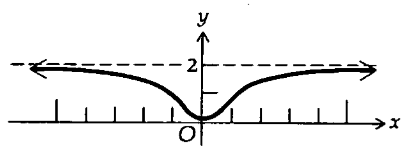


FIGURA 1

cresce indefinidamente, escrevemos

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2$$

A Figura 1 mostra um esboço do gráfico de nossa função. A reta $x = 2$ aparece como uma linha pontilhada, chamada *assíntota horizontal*, que definiremos mais adiante, nesta secção.

2.5.2 DEFINIÇÃO Seja f uma função que está definida em um intervalo $(-\infty, a)$. O **limite de $f(x)$ quando x decresce indefinidamente é L**, notado por

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

se para todo $\epsilon > 0$, não importa quão pequeno, existir um número $N < 0$ tal que

$$\text{se } x < N \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon$$

Nota: como na nota seguindo a Definição 2.5.1, o símbolo $x \to -\infty$ indica somente o comportamento da variável x.

Os Teoremas de Limite 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 da Secção 2. 2, bem como os Teoremas de Limite 11 e 12 da Secção 2.4, permanecem inalterados quando substituímos "$x \to a$" por "$x \to +\infty$" ou "$x \to -\infty$". Temos ainda os teoremas adicionais enunciados a seguir:

2.5.3 TEOREMA DE LIMITE 13 Se r for um inteiro positivo qualquer, então

(i) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

(ii) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

Prova de (i) Para demonstrar a parte (i), precisamos mostrar que a Definição 2.5.1 é válida para $f(x) = 1/x^r$ e $L = 0$; isto é, precisamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe um número N tal que

$$\text{se } x > N \text{ então } \left|\frac{1}{x^r} - 0\right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{ se } x > N \text{ então } |x|^r > \frac{1}{\epsilon}$$

ou, equivalentemente, como $r > 0$,

$$\text{se } x > N \text{ então } |x| > \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{1/r}$$

Para que isso seja válido, tomamos $N = (1/\epsilon)^{1/r}$. Assim

$$\text{se } N = \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{1/r} \text{ e } x > N \text{ então } \left|\frac{1}{x^r} - 0\right| < \epsilon$$

Isto prova a parte (i). ■

A demonstração da parte (ii) é análoga e será deixada como um exercício (veja o Exercício 66).

EXEMPLO 1 Ache

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x - 3}{2x + 5}$$

Solução Para usar o Teorema de Limite 13, vamos dividir o numerador e o denominador por x, obtendo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x - 3}{2x + 5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4 - \frac{3}{x}}{2 + \frac{5}{x}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 4 - \lim\limits_{x \to +\infty} 3 \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}}{\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \lim\limits_{x \to +\infty} 5 \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{4 - 3 \cdot 0}{2 + 5 \cdot 0}$$

$$= 2$$

EXEMPLO 2 Ache

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1}$$

Solução Para usar o Teorema de Limite 13, dividimos o numerador e o denominador pela maior potência de x que ocorre neles; neste caso, x^3.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{4 - \frac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} 2 \cdot \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} - \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} + \lim\limits_{x \to -\infty} 5 \cdot \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x \to -\infty} 4 - \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{2 \cdot 0 - 0 + 5 \cdot 0}{4 - 0}$$

$$= 0$$

EXEMPLO 3 Ache

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}}$$

Solução Como a maior potência de x é 2 e ela aparece sob o radical, dividimos o numerador e o denominador por $\sqrt{x^2}$, que é $|x|$. Temos, então,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{3x}{\sqrt{x^2}} + \dfrac{4}{\sqrt{x^2}}}{\dfrac{\sqrt{2x^2 - 5}}{\sqrt{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{3x}{|x|} + \dfrac{4}{|x|}}{\sqrt{2 - \dfrac{5}{x^2}}}$$

Como $x \to +\infty$, $x > 0$; então $|x| = x$. Assim temos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{3x}{x} + \dfrac{4}{x}}{\sqrt{2 - \dfrac{5}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 3 + \lim\limits_{x \to +\infty} 4 \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \lim\limits_{x \to +\infty} 5 \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \frac{3 + 4 \cdot 0}{\sqrt{2 - 5 \cdot 0}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}$$

EXEMPLO 4 Ache

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}}$$

Solução A função é igual a do Exemplo 3. Novamente, começamos por dividir o numerador e o denominador por $\sqrt{x^2}$ ou, equivalentemente, $|x|$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{3x}{|x|} + \dfrac{4}{|x|}}{\sqrt{2 - \dfrac{5}{x^2}}}$$

Como $x \to -\infty$, $x < 0$; portanto $|x| = -x$. Temos, então,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{3x}{-x} + \dfrac{4}{-x}}{\sqrt{2 - \dfrac{5}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} (-3) - \lim\limits_{x \to -\infty} 4 \cdot \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x}}{\sqrt{\lim\limits_{x \to -\infty} 2 - \lim\limits_{x \to -\infty} 5 \cdot \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{-3 - 4 \cdot 0}{\sqrt{2 - 5 \cdot 0}}$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

O limite "infinito" para valores da função quando a variável independente se aproxima do infinito também pode ser considerado por meio das seguintes definições formais:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Por exemplo, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se a função f estiver definida em algum intervalo $(a, +\infty)$ e se para todo $N > 0$ existir um $M > 0$ tal que se $x > M$ então $f(x) > N$. As demais definições serão deixadas como exercícios (veja o Exercício 63).

EXEMPLO 5 Ache

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+1}$$

Solução Dividimos o numerador e o denominador por x^2.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$$

Calculando o limite do denominador, temos

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$$

$$= 0 + 0$$

$$= 0$$

Logo, o limite do denominador é 0, e o denominador tende a 0 por valores positivos.

O limite do numerador é 1, e assim, pelo Teorema de Limite 12 (i) (2.4.4), segue que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+1} = +\infty$$

EXEMPLO 6 Ache

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - x^2}{3x + 5}$$

Solução

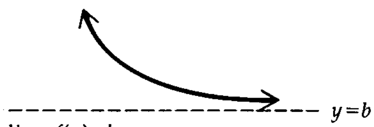
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - x^2}{3x + 5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{2}{x} - 1}{\dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x^2}}$$

Os limites do numerador e do denominador serão considerados separadamente.

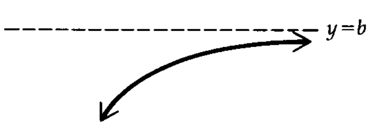
$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x} - 1\right) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} - \lim_{x \to +\infty} 1 \\ &= 0 - 1 \\ &= -1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{5}{x^2} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim sendo, temos o limite de um quociente no qual o limite do numerador é -1 e o limite do denominador é 0, onde o denominador está tendendo a zero por valores positivos. Pelo Teorema de Limite 12 (iii) segue que

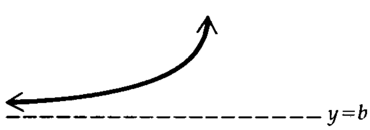
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - x^2}{3x + 5} = -\infty$$



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$
FIGURA 2



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$
FIGURA 3



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$
FIGURA 4

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$
FIGURA 5

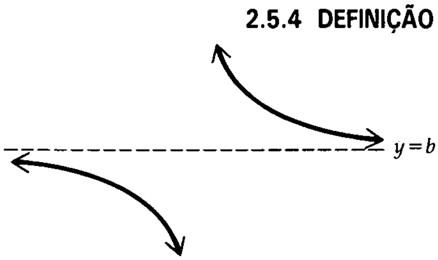
Na secção anterior discutimos assíntotas verticais de um gráfico como uma aplicação de limites infinitos. As *assíntotas horizontais* de um gráfico fornecem uma aplicação de limites no infinito uma assíntota horizontal é uma reta paralela ao eixo x, e a seguir temos uma definição formal.

2.5.4 DEFINIÇÃO

A reta $y = b$ é denominada uma **assíntota horizontal** do gráfico da função f se pelo menos uma das seguintes afirmações for válida:

(i) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ e para um número N, se $x > N$, então $f(x) \neq b$;

(ii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ e para um número N, se $x < N$, então $f(x) \neq b$.



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$
e
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$
FIGURA 6

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Em cada uma das figuras, de 2 a 5, há uma parte do gráfico de uma função para a qual a reta $y = b$ é uma assíntota horizontal. Nas Figuras 2 e 3, a parte (i) da Definição 2.5.4 se aplica, e nas Figuras 4 e 5 a parte (ii) é verdadeira. Ambas as parte (i) e (ii) são verificadas para a função cujo gráfico aparece na Figura 6. ◀

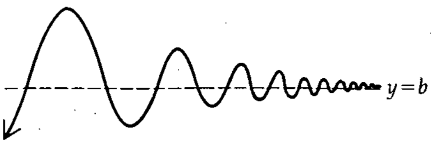


FIGURA 7

Na Figura 7 há um esboço do gráfico de uma função f para a qual $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$, mas não existe um número N tal que se $x > N$, então $f(x) \neq b$. Conseqüentemente, a reta $y = b$ não é uma assíntota horizontal do gráfico de f. Um exemplo de tal função aparece no Exercício 59 dos Exercícios 7.5

EXEMPLO 7 Ache as assíntotas horizontais e faça um esboço do gráfico da função definida por

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Solução Primeiro considere $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Dividimos o numerador e o denominador por $\sqrt{x^2}$ ou, equivalentemente, por $|x|$ e obtemos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}}{\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{x}{|x|}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}}$$

Como $x \to +\infty$, $x > 0$; logo $|x| = x$. Assim

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{x}{x}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim_{x \to +\infty} 1}{\sqrt{\lim_{x \to +\infty} 1 + \lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + 0}}$$

$$= 1$$

Logo, pela Definição 2.5.4 (i), a reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal.

Considere, agora, $\lim_{x\to -\infty} f(x)$. Novamente, dividimos o numerador e o denominador por $\sqrt{x^2}$, que é $|x|$; como $x \to -\infty$, $x < 0$ e assim $|x| = -x$. Temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -\infty} f(x) &= \lim_{x\to -\infty} \frac{\dfrac{x}{-x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}\\ &= \frac{\lim_{x\to -\infty}(-1)}{\sqrt{\lim_{x\to -\infty} 1 + \lim_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x^2}}}\\ &= \frac{-1}{\sqrt{1+0}}\\ &= -1\end{aligned}$$

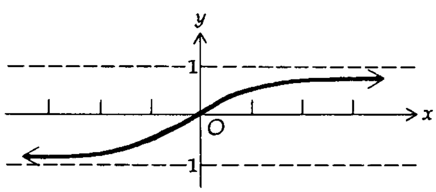


FIGURA 8

Assim, de acordo com a Definição 2.5.4 (ii), a reta $y = -1$ é uma assíntota horizontal. Um esboço do gráfico está na Figura 8.

EXEMPLO 8 Ache as assíntotas vertical e horizontal e faça um esboço do gráfico da equação

$$xy^2 - 2y^2 - 4x = 0$$

Solução Resolvendo em y a equação dada, obtemos

$$y = \pm 2\sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

Essa equação define duas funções:

$$y = f_1(x), \text{ onde } f_1 \text{ é definida por } f_1(x) = +2\sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

e

$$y = f_2(x), \text{ onde } f_2 \text{ é definida por } f_2(x) = -2\sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

O gráfico da equação dada é composto pelos gráficos de duas funções, f_1 e f_2. Os domínios das duas funções consistem naqueles valores de x para os quais $x/(x-2) \geqslant 0$. Usando o resultado do Exemplo 8 da Secção 1.5 e excluindo $x = 2$, vemos que o domínio de f_1 e f_2 é $(-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$.

Consideremos agora f_1. Como

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+} f_1(x) &= \lim_{x\to 2^+} 2\sqrt{\frac{x}{x-2}}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

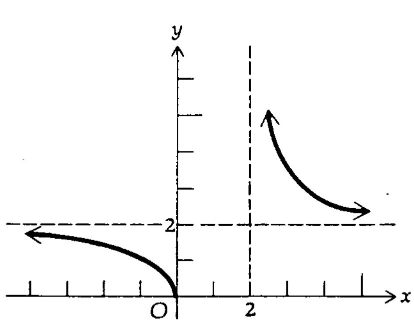


FIGURA 9

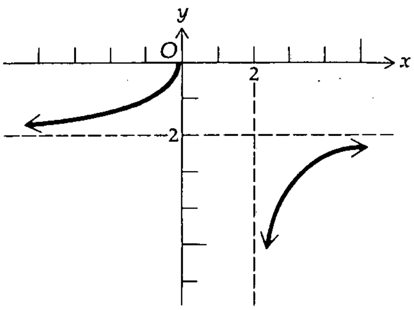


FIGURA 10

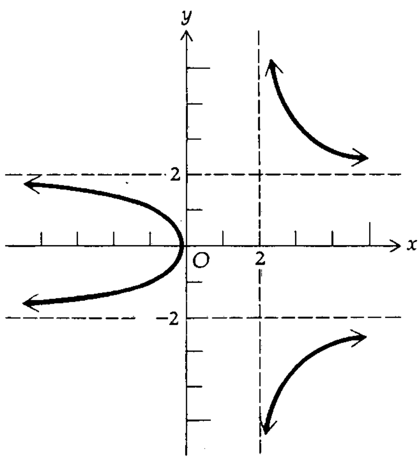


FIGURA 11

pela Definição 2.4.8 (i), a reta $x = 2$ é uma assíntota vertical do gráfico de f_1

$$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim_{x \to +\infty} 2\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{2}{x}}}$$
$$= 2$$

Assim, pela Definição 2.5.4 (i), a reta $y = 2$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f_1.

Do mesmo modo, $\lim_{x \to -\infty} f_1(x) = 2$. Um esboço do gráfico de f_1 está na Figura 9.

$$\lim_{x \to 2^+} f_2(x) = \lim_{x \to 2^+} \left[-2\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right]$$
$$= -\infty$$

Logo, para Definição 2.4.8 (ii), a reta $x = 2$ é uma assíntota vertical do gráfico de f_2.

$$\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[-2\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{2}{x}}}\right]$$
$$= -2$$

Assim, pela Definição 2.5.4 (i), a reta $y = -2$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f_2.

Também $\lim_{x \to -\infty} f_2(x) = -2$. Um esboço do gráfico de f_2 está na Figura 10.

O gráfico da equação dada é a união dos gráficos de f_1 e f_2 e um esboço está na Figura 11.

EXERCÍCIOS 2.5

Nos Exercícios de 1 a 10, faça o seguinte: Use uma calculadora para tabular os valores de $f(x)$ para valores fixados de x. (a) Do que $f(x)$ parece estar se aproximando, enquanto x cresce indefinidamente? (b) Do que $f(x)$ parece estar se aproximando enquanto x decresce indefinidamente? (c) Ache $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ (d) Ache $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

1. $f(x) = \frac{4}{x^2}$; x é 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1.000 e x é -1, -2, -4, -6, -8, -10, -100, -1.000.

2. $f(x) = \frac{3}{x^4}$; x é 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1.000 e x é -1, -2 -4, -6, -8, -10, -100, -1.000.

3. $f(x) = \frac{1}{x^3}$; x é 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1.000 e x é -1, -2, -4, -6, -8, -10, -100, -1.000.

4. $f(x) = -\frac{2}{x^3}$; x é 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1.000 e x é -1, -2, -4, -6, -8, -10, -100, -1.000.

5. $f(x) = -\frac{3x^2}{x^2+1}$; x é 0, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1.000 e x é -1, -2, -4, -6, -8, -10, -100, -1.000.

6. $f(x) = \frac{x^3}{x^3+2}$; x é 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1.000 e x é -2, -4, -6, -8, -10, -100, -1000.

7. $f(x) = \frac{4x+1}{2x-1}$; x é 2, 6, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000 e x é -2, -6, -10, -100, -1.000, -10.000, -100.000.

8. $f(x) = \frac{5x-3}{10x+1}$; x é 2, 6, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000 e x é -2, -6, -10, -100, -1.000, -10.000, -100.000.

9. $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$; x é 2, 6, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000 e x é -2, -6, -10, -100, -1000, -10.000, -100.000.

10. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$; x é 2, 6, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000 e x é -2, -6, -10, -100, -1000, -10.000, -100.000.

Nos Exercícios de 11 a 30, ache o limite.

11. $\lim_{t \to +\infty} \dfrac{2t+1}{5t-2}$ **12.** $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{6x-4}{3x+1}$

13. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x+7}{4-5x}$ **14.** $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1+5x}{2-3x}$

15. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{7x^2-2x+1}{3x^2+8x+5}$ **16.** $\lim_{s \to -\infty} \dfrac{4s^2+3}{2s^2-1}$

17. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x+4}{3x^2-5}$ **18.** $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+5}{x^3}$

19. $\lim_{y \to +\infty} \dfrac{2y^2-3y}{y+1}$ **20.** $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-2x+5}{7x^3+x+1}$

21. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{4x^3+2x^2-5}{8x^3+x+2}$ **22.** $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4-7x^2+2}{2x^4+1}$

23. $\lim_{y \to +\infty} \dfrac{2y^3-4}{5y+3}$ **24.** $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3-12x+7}{4x^2-1}$

25. $\lim_{x \to -\infty} \left(3x+\dfrac{1}{x^2}\right)$ **26.** $\lim_{t \to +\infty} \left(\dfrac{2}{t^2}-4t\right)$

27. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+4}$ **28.** $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+4}$

29. $\lim_{w \to -\infty} \dfrac{\sqrt{w^2-2w+3}}{w+5}$ **30.** $\lim_{y \to -\infty} \dfrac{\sqrt{y^4+1}}{2y^2-3}$

Nos Exercícios de 31 a 36, ache o limite (Sugestão: primeiro obtenha uma fração com um numerador racional).

31. $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1}-x)$ **32.** $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+x}-x)$

33. $\lim_{r \to +\infty} (\sqrt{3r^2+r}-2r)$ **34.** $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt[3]{x^3+1}-x)$

35. $\lim_{x \to -\infty} (\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3+1})$ **36.** $\lim_{t \to +\infty} \dfrac{\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}}{\sqrt{t+1}}$

Nos Exercícios de 37 a 48, encontre as assíntotas horizontal e vertical e trace um esboço do gráfico da função.

37. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$ **38.** $f(x) = \dfrac{4-3x}{x+1}$

39. $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ **40.** $h(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2}$

41. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2-4}}$ **42.** $F(x) = \dfrac{-3x}{\sqrt{x^2+3}}$

43. $G(x) = \dfrac{4x^2}{x^2-9}$ **44.** $g(x) = \dfrac{x^2}{4-x^2}$

45. $h(x) = \dfrac{2x}{6x^2+11x-10}$ **46.** $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+5x+6}}$

47. $f(x) = \dfrac{4x^2}{\sqrt{x^2-2}}$ **48.** $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}$

Nos Exercícios de 49 a 56, encontre as assíntotas horizontal e vertical e faça um esboço do gráfico da equação.

49. $3xy-2x-4y-3=0$ **50.** $2xy+4x-3y+6=0$

51. $x^2y^2-x^2+4y^2=0$ **52.** $xy^2+3y^2-9x=0$

53. $(y^2-1)(x-3)=6$ **54.** $2xy^2+4y^2-3x=0$

55. $x^2y-2x^2-y-2=0$

56. $x^2y+4xy-x^2+x+4y-6=0$

Nos Exercícios de 57 a 60, prove que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$, *aplicando a Definição 2.5.1; isto é, dado* $\epsilon > 0$, *mostre que existe um número* $N > 0$ tal que se $x > N$, *então* $|f(x) - 1| < \epsilon$.

57. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ **58.** $f(x) = \dfrac{2x}{2x+3}$

59. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ **60.** $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^2-1}$

61. Prove que $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{8x+3}{2x-1} = 4$, mostrando que para todo $\epsilon > 0$ existe um número $N < 0$, tal que se $x < N$ então $\left|\dfrac{8x+3}{2x-1} - 4\right| < \epsilon$.

62. Prove a parte (i) do Teorema de Limite 12 (2.4.4) se "$x \to a$" for substituído por "$x \to +\infty$".

63. Dê uma definição para cada um dos seguintes:
(a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; (b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$;
(c) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

64. Prove que $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 4) = +\infty$, mostrando que para todo $N > 0$ existe um $M > 0$ tal que se $x > M$ tal que se $x > M$ então $x^2 - 4 < N$.

65. Prove que $\lim_{x \to +\infty} (6 - x - x^2) = -\infty$ aplicando a definição do Exercício 63(a).

66. Prove a parte (ii) do Teorema de Limite 13 (2.5.3).

2.6 CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO EM UM NÚMERO

Na Ilustração 1 da Secção 23 discutimos a função C definida por

$$C(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0{,}9x & \text{se } 10 < x \end{cases} \tag{1}$$

onde \$ $C(x)$ é o custo total de x quilos de um produto. Mostramos que $\lim_{x \to 10} C(x)$ não existe pois $\lim_{x \to 10^-} C(x) \neq \lim_{x \to 10^+} C(x)$. Um esboço do gráfico de C está na Figura 1. Observe que há uma quebra no gráfico de C em $x = 10$.

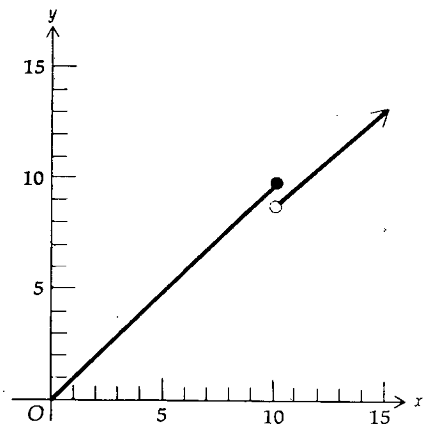


FIGURA 1

Afirmamos que C é *descontínua* em 10. Essa descontinuidade é causada pelo fato de $\lim_{x \to 10} C(x)$ não existir. Iremos nos referir a essa função novamente na Ilustração 1.

Na secção 2.1, consideramos a função f definida por

$$f(x) = \frac{(2x + 3)(x - 1)}{x - 1} \tag{2}$$

Observamos que f está definida para todos os valores de x, exceto 1. Um esboço do gráfico que consiste em todos os pontos da reta $y = 2x + 3$, exceto (1,5), está na Figura 2. Há uma quebra no gráfico, no ponto (1, 5) e afirmamos que essa função f é *descontínua* no número 1. A descontinuidade ocorre porque $f(1)$ não existe.

Se f for a função definida por (2) quando $x \neq 1$ e se definirmos $f(1) = 2$, por exemplo, a função estará definida para todos os valores de x, mas ainda existirá uma quebra no gráfico (veja a Figura 3), sendo a função descontínua em 1. Se, contudo, definirmos $f(1) = 5$, não haverá quebra no gráfico e a função será *contínua* para todos os valores de x. Temos a definição a seguir.

2.6.1 DEFINIÇÃO

Dizemos que a função f é **contínua** no número a se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) $f(a)$ existe;

(ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe;

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Se uma ou mais de uma dessas condições não forem verificadas em a, a função f será **descontínua** em a.

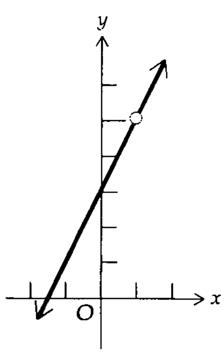


FIGURA 2

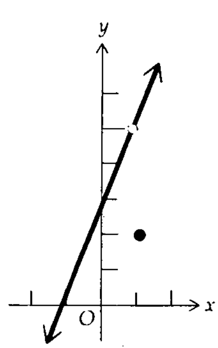


FIGURA 3

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** A função C, definida por (1), tem seu gráfico mostrado na Figura 1 como existe uma quebra no gráfico, no ponto onde $x = 10$, vamos investigar as condições da Definição 2.6.1 em 10.

Como $C(10) = 10$, a condição (i) está satisfeita.

Como $\lim_{x \to a} C(x)$ não existe, a condição (ii) não está verificada em 10. Concluímos que C é descontínua em 10.

Observe que devido à descontinuidade de C, seria vantajoso aumentar o tamanho de alguns pedidos para tirar vantagem de um custo total menor. Seria insensato comprar $9\frac{1}{2}$ kg por \$ 9,50 quando $10\frac{1}{2}$ kg podem ser comprados por \$ 9,45. ◀

Na Ilustração 2 aparece outra situação na qual a fórmula para calcular o custo de mais do que 10 kg de um produto é diferente da fórmula para o cálculo do custo de 10 kg ou menos. Mas aqui a função custo é contínua em 10.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Um atacadista que vende um produto por quilo (ou fração de quilo), cobra \$ 1 por quilo se o pedido for de até 10 kg. Mas se o pedido ultrapassar esse peso, ele cobrará \$ 10 mais \$ 0,7 por quilo excedente. Assim, se x quilos do produto forem pedidos e $C(x)$ for o custo total, então $C(x) = x$, se $0 \leqslant x \leqslant 10$ e $C(x) = 10 + 0{,}7\,(x - 10)$, se $10 < x$. Logo,

$$C(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0{,}7x + 3 & \text{se } 10 < x \end{cases}$$

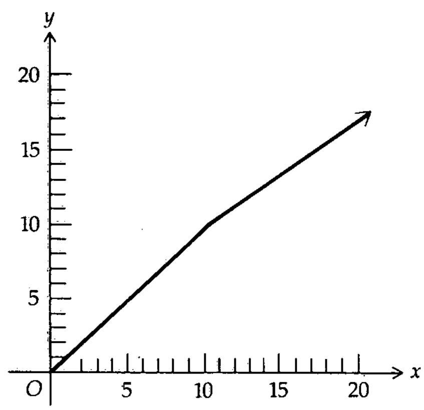


FIGURA 4

Um esboço do gráfico de C está na Figura 4. Para essa função $C(10) = 10$ e

$$\lim_{x\to 10^-} C(x) = \lim_{x\to 10^-} x \qquad \lim_{x\to 10^+} C(x) = \lim_{x\to 10^+} (0{,}7x + 3)$$
$$= 10 \qquad\qquad\qquad\qquad = 10$$

Logo, $\lim\limits_{x\to 10} C(x)$ existe e é igual a $C(10)$. Assim, C é contínua em 10. ◀

Vamos considerar agora algumas ilustrações de funções descontínuas. Para cada ilustração, há um esboço do gráfico da função. Vamos determinar os pontos onde há uma quebra no gráfico e mostraremos qual das condições na definição de continuidade não é satisfeita em cada caso de descontinuidade.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Seja f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Um esboço do gráfico dessa função está na Figura 3. Observe que há uma quebra no gráfico, no ponto onde $x = 1$. Assim, vamos verificar aí as condições da Definição 2.6.1.

$f(1) = 2$; logo, a condição (i) é satisfeita.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 5$: logo, a condição (ii) está satisfeita.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 5$; mas $f(1) = 2$; logo, a condição (iii) não está satisfeita.

Assim, f é descontínua em 1. ◀

Note que se na Ilustração 3 $f(1)$ for definida como sendo 5, então $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$ $= f(1)$ e f seria contínua em 1.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Seja f definida por

$$f(x) = \frac{1}{x - 2}$$

Um esboço do gráfico f é dado na Figura 5. Há uma quebra no gráfico, no ponto onde $x = 2$, e assim sendo vamos examinar ai as condições da Definição 2.6.1

Como $f(2)$ não está definida, a condição (i) não é satisfeita. Logo, f é descontínua em 2. ◀

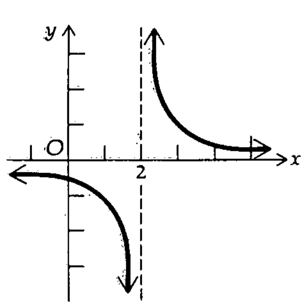


FIGURA 5

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** Seja g definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ 3 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

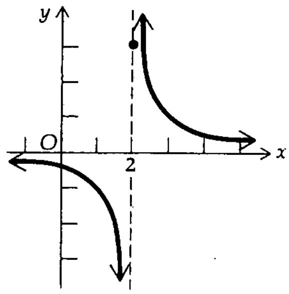


FIGURA 6

Um esboço do gráfico de g está na Figura 6. As três condições da Definição 2.6.1 serão testadas em 2.

Uma vez que $g(2) = 3$, a condição (i) é satisfeita.

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2}$$
$$= -\infty \qquad\qquad\qquad\qquad = +\infty$$

Como $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ não existe, a condição (ii) não é satisfeita. Logo, g é descontínua em 2. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 6** Seja h definida por

$$h(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{se } x \leqslant 1 \\ 3 - x & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

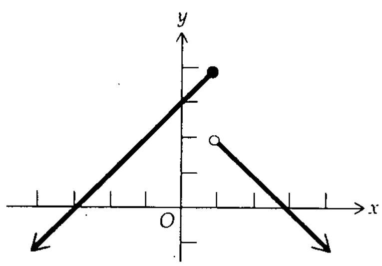


FIGURA 7

Um esboço do gráfico de h está na Figura 7. Como há uma quebra no gráfico, no ponto onde $x = 1$, investigaremos as condições da Definição 2.6.1 em 1.

Como $h(1) = 4$, a condição (i) é verificada.

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} (3 + x) \qquad \lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+} (3 - x)$$
$$= 4 \qquad\qquad\qquad\qquad = 2$$

Como $\lim\limits_{x\to 1} h(x) \neq \lim\limits_{x\to 1} h(x)$, então $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$ não existe, assim sendo, a condição (ii) não é verificada em 1. Logo, h é descontínua em 1. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 7** Seja F definida por

$$F(x) = \begin{cases} |x - 3| & \text{se } x \neq 3 \\ 2 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

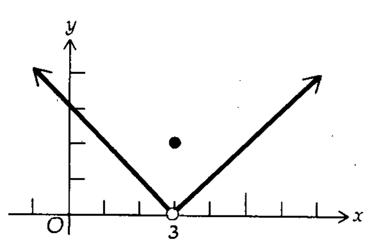


FIGURA 8

um esboço do gráfico de F aparece na Figura 8. Vamos verificar as três condições da Definição 2.6.1 no ponto $x = 3$.

Uma vez que $F(3) = 2$, a condição (i) é satisfeita.

$$\lim_{x\to 3^-} F(x) = \lim_{x\to 3^-} (3 - x) \qquad \lim_{x\to 3^+} F(x) = \lim_{x\to 3^+} (x - 3)$$
$$= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad = 0$$

Logo, $\lim\limits_{x\to 3} F(x) = 0$ e assim a condição (ii) é verificada. O $\lim\limits_{x\to 3} F(x) = 0$; porém, $F(3) = 2$, assim sendo, a condição (iii) não é verificada. Portanto, F é descontínua em 3. ◀

Deve estar claro que a noção geométrica de quebra em certo ponto no gráfico tem o mesmo significado do conceito de descontinuidade de uma função num certo valor da variável independente.

Seguindo a Ilustração 3 foi mencionado que se $f(1)$ tivesse sido definida como sendo 5, então f seria contínua em 1. Isso ilustra o conceito de *descontinuidade removível*. Em geral, suponha que f seja uma função descontínua em um número a, mas para a qual $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe. Assim, $f(a) \neq \lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou então $f(a)$ *não existe. Tal descontinuidade é chamada de* **descontinuidade removível**, pois se f for redefinida em a de tal forma que $f(a)$ seja igual ao $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, a nova função tornar-se-á contínua em a. Se a descontinuidade não for removível, ela será chamada de **descontinuidade essencial.**

EXEMPLO 1 Em cada uma das Ilustrações de 3 até 7, determine se a descontinuidade é removível ou essencial.

Solução Na Ilustração 3 a função é descontínua em 1, mas $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$. Redefinindo $f(1) = 5$, então $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$: logo descontinuidade é removível.

Na Ilustração 4 a função f é descontínua em 2; $\lim_{x \to 2} f(x)$ não existe; logo, a descontinuidade é essencial.

Na Ilustração 5, $\lim_{x \to 2} g(x)$ não existe; assim, a descontinuidade é essencial.

Na Ilustração 6 a função h é descontínua pois $\lim_{x \to 1} h(x)$ não existe; assim, de novo, a descontinuidade é essencial.

Na Ilustração 7, $\lim_{x \to 3} F(x) = 0$, mas $F(3) = 2$; assim F é descontínua em 3. Se, contudo, $F(3)$ for redefinida como sendo 0, então a função ficará contínua em 3; assim, a descontinuidade será removível.

EXEMPLO 2 A função definida por

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

é descontínua em 4. Mostre que a descontinuidade é removível e redefina $f(4)$ de tal modo que a descontinuidade seja removida.

Solução A função f é descontínua em 4, pois $f(4)$ não existe. Se $\lim_{x \to 4} f(x)$ existir, a descontinuidade poderá ser removida, redefinindo $f(4) = \lim_{x \to 4} f(x)$. Vamos calcular o limite.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to4} f(x) &= \lim_{x\to4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \\
&= \lim_{x\to4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\
&= \lim_{x\to4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\
&= \lim_{x\to4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Logo, expressando $f(4) = \frac{1}{4}$, teremos a nova função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} & \text{se } x \neq 4 \\ \frac{1}{4} & \text{se } x = 4 \end{cases}$$

e essa função é contínua em 4.

Obtemos o teorema a seguir sobre funções que são contínuas em um número, aplicando a Definição 2.6.1 e os teoremas de limite.

2.6.2 TEOREMA Se f e g forem funções contínuas em um número a, então

(i) $f + g$ será contínua em a;
(ii) $f - g$ será contínua em a;
(iii) $f \cdot g$ será contínua em a;
(iv) f/g será contínua em a, desde que $g(a) \neq 0$.

Para ilustrar o tipo de prova que cada uma das partes desse teorema exige, vamos demonstrar a parte (i).

Como f e g são contínuas em a, da Definição 2.6.1 segue que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

Logo, desses limites e do Teorema de Limite 4,

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = f(a) + g(a)$$

a qual é a condição para que $f + g$ seja contínua em a. Assim, demonstramos a parte (i).

As provas das partes (ii), (iii) e (iv) são similares.

Considere a função polinomial f definida por

$$f(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n \qquad b_0 \neq 0$$

onde n é um inteiro não negativo e b_0, b_1, ..., b_n são números reais. Através de sucessivas aplicações dos teoremas de limite, podemos mostrar que se a for um número qualquer,

$$\lim_{x \to a} f(x) = b_0a^n + b_1a^{n-1} + b_2a^{n-2} + \ldots + b_{n-1}a + b_n$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

estabelecendo assim o teorema a seguir.

2.6.3 TEOREMA Uma função polinomial é contínua em qualquer número.

▶ **ILUSTRAÇÃO 8** Se $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1$, então f será uma função polinomial e, portanto, pelo Teorema 2.6.3, contínua em qualquer número. Em particular, como f é contínua em 3, então $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$. Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 3} (x^3 - 2x^2 + 5x + 1) &= 3^3 - 2(3)^2 + 5(3) + 1 \\ &= 27 - 18 + 15 + 1 \\ &= 25\end{aligned}$$ ◀

2.6.4 TEOREMA Uma função racional é contínua em todos os números do seu domínio.

Prova Se f for uma função racional, ela poderá ser expressa como o quociente de duas funções polinomiais. Assim, f pode ser definida por

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

onde g e h são duas funções polinomiais e o domínio de f consiste em todos os números, exceto aqueles para os quais $h(x) = 0$.

Se a for qualquer número no domínio de f, então $h(a) \neq 0$; assim, pelo Teorema de Limite 9,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim\limits_{x \to a} g(x)}{\lim\limits_{x \to a} h(x)} \tag{3}$$

Como g e h são funções polinomiais, pelo Teorema 2.6.3 elas são contínuas em a; assim, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$ e o $\lim\limits_{x \to a} h(x) = h(a)$. Conseqüentemente, de (3),

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{g(a)}{h(a)}$$

Assim, f é contínua em qualquer número de seu domínio. ■

EXEMPLO 3 Determine os números nos quais a função a seguir é contínua:

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 9}$$

Solução O domínio de f é o conjunto R dos números reais, exceto aqueles para os quais $x^2 - 9 = 0$. Como $x^2 - 9 = 0$ quando $x = \pm 3$, segue que o domínio de f é o conjunto de todos os números reais, exceto 3 e -3.

Como f é uma função racional, segue do Teorema 2.6.4 que f será contínua em todos os números reais, exceto 3 e -3.

EXEMPLO 4 Determine os números nos quais a função a seguir é contínua.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{se } x \leqslant 1 \\ x^2 & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

Solução As funções tendo valores $2x - 3$ e x^2 são funções polinomiais e, portanto, contínuas em qualquer número. Assim, o único número no qual a continuidade é questionável é 1. Vamos testar as três condições de continuidade em 1.

(i) $f(1) = -1$. Assim, a condição (i) é verificada.

(ii) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x - 3) = -1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1$

Como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, o limite bilateral $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ não existe. Logo, f é descontínua em 1. Mas f é contínua em todo número real, exceto 1.

Na Secção Suplementar 2.9 provaremos o teorema a seguir sobre a continuidade da função definida por $f(x) = \sqrt[n]{x}$.

2.6.5 TEOREMA Se n for um inteiro positivo e

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

então

(i) se n for ímpar, f será contínua em qualquer número;
(ii) se n for par, f será contínua em todo número positivo.

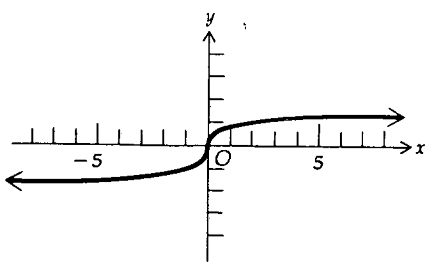


FIGURA 9

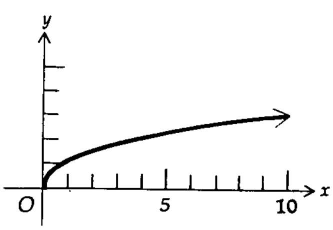


FIGURA 10

▶ **ILUSTRAÇÃO 9** (a) Se $f(x) = \sqrt[3]{x}$, segue do Teorema 2.6.5 (i) que f será contínua em todo número real. Um esboço do gráfico de f está na Figura 9.

(b) se $g(x) = \sqrt{x}$, então do Teorema 2.6.5 (ii) segue que g será contínua em todo número positivo. Na Figura 10 há um esboço do gráfico de g. ◀

Na Secção 2.7 aplicamos a definição de continuidade de uma função usando ϵ e δ. Para obter essa definição alternativa partimos da Definição 2.6.1 a qual estabelece que a função f é contínua em um número a. Se $f(a)$ existir, se $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existir e se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{4}$$

Aplicando a Definição 2.1.1 onde L é $f(a)$, segue que (4) será verdadeira se para todo $\epsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } \; 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon \tag{5}$$

Se f for contínua em a, $f(a)$ deverá existir; assim, na afirmativa (5) a condição $|x - a| > 0$ não é necessária, pois quando $x = a$, $|f(x) - f(a)|$ será 0 e, portanto, menor do que ϵ. Temos, então, o teorema a seguir, que irá servir como a definição alternativa de continuidade que desejamos.

2.6.6 TEOREMA A função f será contínua no número a se f estiver definida em algum intervalo aberto contendo a e se para todo $\epsilon > 0$ exitir um $\delta > 0$ tal que se $|x - a| < \delta$ então $|f(x) - f(a)| < \epsilon$

EXERCÍCIOS 2.6

Nos Exercícios de 1 a 22, faça um esboço do gráfico da função; então, observando onde há quebras no gráfico, determine os valores da variável independente nos quais a função é descontínua e mostre por que a Definição 2.6.1 não é satisfeita em cada descontinuidade.

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}$

2. $F(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 4}$

3. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3} & \text{se } x \neq -3 \\ 1 & \text{se } x = -3 \end{cases}$

4. $G(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} & \text{se } x \neq 4 \\ 2 & \text{se } x = 4 \end{cases}$

5. $h(x) = \dfrac{5}{x - 4}$

6. $H(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

7. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{x - 4} & \text{se } x \neq 4 \\ 2 & \text{se } x = 4 \end{cases}$

8. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 2} & \text{se } x \neq -2 \\ 0 & \text{se } x = -2 \end{cases}$

9. $F(x) = \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 4}$

10. $h(x) = \dfrac{(x - 1)(x^2 - x - 12)}{x^2 - 5x + 4}$

11. $G(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^4 - 16}$

12. $H(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{(x - 1)(x^2 - x - 12)}$

13. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } 0 < x \end{cases}$

14. $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ 1 - x & \text{se } 1 < x \end{cases}$

15. $g(t) = \begin{cases} t^2 - 4 & \text{se } t < 2 \\ 4 & \text{se } t = 2 \\ 4 - t^2 & \text{se } 2 < t \end{cases}$

16. $H(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{se } x \leqslant -2 \\ 2 - x & \text{se } -2 < x \leqslant 2 \\ 2x - 1 & \text{se } 2 < x \end{cases}$

17. $g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \\ \sqrt[3]{x + 1} & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases}$

18. $f(t) = \begin{cases} |t + 2| & \text{se } t \neq -2 \\ 3 & \text{se } t = -2 \end{cases}$

19. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

20. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

21. A função maior inteiro.

22. A função sinal (veja o Exemplo 1 na Secção 2.3).

Nos Exercícios de 23 a 32, prove que a função é descontínua no número a. Então determine se a descontinuidade é removível ou essencial. Se a descontinuidade for removível, redefina f(a) de tal modo que seja removida.

23. $f(x) = \dfrac{9x^2 - 4}{3x - 2}$; $a = \dfrac{2}{3}$

24. $f(s) = \left\{\begin{matrix} \dfrac{1}{s + 5} & \text{se } s \neq -5 \\ 0 & \text{se } s = -5 \end{matrix}\right\}$; $a = -5$

25. $f(t) = \left\{\begin{matrix} 9 - t^2 & \text{se } t \leqslant 2 \\ 3t + 2 & \text{se } 2 < t \end{matrix}\right\}$; $a = 2$

26. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 3}$; $a = -3$

27. $f(x) = \left\{\begin{matrix} |x - 3| & \text{se } x \neq 3 \\ 2 & \text{se } x = 3 \end{matrix}\right\}$; $a = 3$

28. $f(x) = \left\{\begin{matrix} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & \text{se } x \neq 3 \\ 5 & \text{se } x = 3 \end{matrix}\right\}$; $a = 3$

29. $f(t) = \left\{\begin{matrix} t^2 - 4 & \text{se } t \leqslant 2 \\ t & \text{se } 2 < t \end{matrix}\right\}$; $a = 2$

30. $f(y) = \dfrac{\sqrt{y + 5} - \sqrt{5}}{y}$; $a = 0$

31. $f(x) = \dfrac{3 - \sqrt{x + 9}}{x}$; $a = 0$

32. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x + 1} - 1}{x}$; $a = 0$

Nos Exercícios de 33 a 42, determine os números nos quais a função dada é contínua.

33. $f(x) = x^2(x + 3)^2$

34. $f(x) = (x - 5)^3(x^2 + 4)^5$

35. $g(x) = \dfrac{x}{x - 3}$

36. $h(x) = \dfrac{x + 1}{2x + 5}$

37. $F(x) = \dfrac{x^3 + 7}{x^2 - 4}$

38. $G(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 + 2x - 8}$

39. $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{se } x < 2 \\ 4 - x^2 & \text{se } 2 \leqslant x \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} (x + 2)^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ x^2 + 2 & \text{se } 0 < x \end{cases}$

41. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 2} & \text{se } x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } 1 < x \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 1} & \text{se } x < 4 \\ \sqrt{x - 4} & \text{se } 4 \leqslant x \end{cases}$

43. A função C do Exercício 35, nos Exercícios 2.3, está definida por

$$C(x) = \begin{cases} 0{,}80x & \text{se } 0 < x \leqslant 50 \\ 0{,}70x & \text{se } 50 < x \leqslant 200 \\ 0{,}65x & \text{se } 200 < x \end{cases}$$

(a) Faça um esboço do gráfico de C. (b) Em quais números C é descontínua? (c) Mostre por que a Definição 2.6.1 não é satisfeita em cada descontinuidade da parte (b).

44. Suponha que a taxa postal de uma carta seja calculada da seguinte forma; $ 0,22 por qualquer peso até os 30 primeiros gramas e então $ 0,17 a cada 30 gramas, ou fração adicional, até 330 gramas adicionais. Se x gramas for o peso da carta e $0 < x \leqslant 360$, expresse a taxa postal como função de x. (a) faça um esboço do gráfico dessa função. (b) Em quais números do intervalo aberto $(0, 360)$ a função é descontínua? (c) Mostre por que a Definição 2.6.1 não é satisfeita em cada descontinuidade da parte (b).

45. Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} |x - [\![x]\!]| & \text{se } [\![x]\!] \text{ for par} \\ |x - [\![x + 1]\!]| & \text{se } [\![x]\!] \text{ for ímpar} \end{cases}$$

Faça um esboço do gráfico de f. Em quais números f é descontínua?

46. A função f definida por

$$f(x) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt[3]{x}} - 2}{x - 8}$$

é descontínua em 8. Mostre que a descontinuidade é removível e redefina $f(8)$ de modo a removê-la.

47. A função g definida por

$$g(x) = \frac{\sqrt[3]{x + a^3} - a}{x}$$

é descontínua no 0. Mostre que a descontinuidade é removível e redefina $g(0)$, de modo a removê-la.

48. A função f é definida por

$$f(x) = \lim_{n \to 0} \frac{2nx}{n^2 - nx}$$

Faça um esboço do gráfico de f. Em que valores de x f é descontínua?

49. Se

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases}$$

Prove que f e g são ambas descontínuas em 0, mas o produto $f \cdot g$ é contínuo em 0.

50. Dê um exemplo para mostrar que o produto de duas funções f e g pode ser contínuo em um número a, onde f é contínua mas g é descontínua.

51. Dê um exemplo de duas funções que sejam ambas descontínuas em um número a, mas cuja soma seja contínua em a.

52. Prove que se f for contínua em a e g for descontínua em a, então $f + g$ será descontínua em a.

2.7 CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO COMPOSTA E CONTINUIDADE EM UM INTERVALO

Na Secção 1.4 uma função composta foi definida da seguinte forma:

Dadas as duas funções f e g, a função composta, denotada por $f \circ g$, é definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

e o domínio de $f \circ g$ é o conjunto de todos os números no domínio de g, tal que $g(x)$ esteja no domínio de f.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 4 - x^2$ e se h for a função composta $f \circ g$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= f(g(x)) \\ &= f(4 - x^2) \\ &= \sqrt{4 - x^2} \end{aligned}$$

Como o domínio de g é o conjunto de todos os números reais e o domínio de f é o conjunto de todos os números não negativos, o domínio de h será o conjunto de todos os números reais, tais que $4 - x^2 \geqslant 0$, isto é, todos os números no intervalo fechado $[-2, 2]$. Um esboço do gráfico de h está na Figura 1. ◀

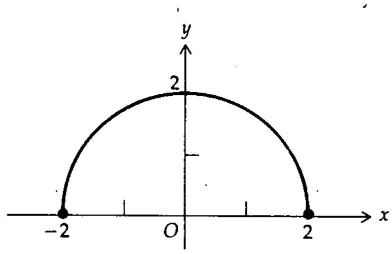


FIGURA 1

Da Figura 1 podemos ver que h parece ser contínua em todo número do intervalo aberto $(-2, 2)$. Mostraremos mais adiante, no Exemplo 1, como esse fato pode ser provado pelos teoremas sobre continuidade. Mas primeiro necessitamos de um importante teorema a respeito do limite de uma função composta. A demonstração desse teorema faz uso do Teorema 2.6.6, que é a definição de continuidade envolvendo ϵ e δ.

2.7.1 TEOREMA

Se $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ e se a função f for contínua em b,

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = f(b)$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x))$$

Prova Como f é contínua em b, temos do Teorema 2.6.6 a seguinte afirmativa: para todo $\epsilon_1 > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } |y - b| < \delta_1 \quad \text{então } |f(y) - f(b)| < \epsilon_1 \tag{1}$$

Como $\lim_{x \to a} g(x) = b$, para todo $\delta_1 > 0$, existe um $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{então} \quad |g(x) - b| < \delta_1 \tag{2}$$

Se $0 < |x - a| < \delta_2$, substituímos y na afirmativa (1) por $g(x)$ e obtemos o seguinte: para todo $\epsilon_1 > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se} \quad |g(x) - b| < \delta_1 \quad \text{então} \quad |f(g(x)) - f(b)| < \epsilon_1 \tag{3}$$

Das afirmativas (2) e (3) concluímos que para todo $\epsilon_1 > 0$ existe um $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{então} \quad |f(g(x)) - f(b)| < \epsilon_1$$

de onde segue que

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x)) \qquad \blacksquare$$

O Teorema 2.7.1 será aplicado na Secção Suplementar 2.9 para provar os Teoremas de Limite 9 e 10. Outra aplicação do Teorema 2.7.1 está na demonstração do teorema a seguir, sobre continuidade de uma função composta.

2.7.2 TEOREMA Se a função g for contínua em a e a função f for contínua em $g(a)$, então a função composta $f \circ g$ será contínua em a.

Prova Como g é contínua em a

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a) \tag{4}$$

Agora, como f é contínua em $g(a)$, podemos então aplicar o Teorema 2.7.1 à função composta $f \circ g$, obtendo

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} (f \circ g)(x) &= \lim_{x \to a} f(g(x)) \\ &= f(\lim_{x \to a} g(x)) \\ &= f(g(a)) \quad \text{(pela igualdade (4))} \\ &= (f \circ g)(a) \end{aligned}$$

o que prova que $f \circ g$ é contínua em a. $\blacksquare$

O Teorema 2.7.2 estabelece que uma *função contínua de uma função contínua é contínua*. O exemplo a seguir mostra como usá-lo para determinar os números nos quais uma determinada função é contínua.

EXEMPLO 1 Determine os valores em que a função a seguir é contínua:

$$h(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

Solução A função h é aquela obtida na Ilustração 1 como a função composta $f \circ g$, onde $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 4 - x^2$. Como g é uma função polinomial, ela será contínua em toda parte. Além disso, f é contínua em todo número positivo pelo Teorema 2.6.5 (ii). Logo, pelo Teorema 2.7.2, h é contínua em todo número x para o qual $g(x) > 0$, isto é, quando $4 - x^2 > 0$. Logo, h é contínua em todos os números do intervalo aberto $(-2, 2)$.

Como a função h do Exemplo 1 é contínua em todos os números do intervalo aberto $(-2, 2)$, dizemos que h é *contínua no intervalo aberto* $(-2, 2)$.

2.7.3 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função é **contínua em um intervalo aberto** se e somente se ela for contínua em todos os números do intervalo aberto.

Vamos voltar novamente à função h do Exemplo 1. Como h não está definida em nenhum intervalo aberto contendo ou -2 ou 2, não podemos considerar $\lim_{x \to -2} h(x)$ ou $\lim_{x \to 2} h(x)$. Portanto, nossa definição (2.6.1) de continuidade em um número não permite que h seja contínua em -2 e 2. Assim sendo, para discutir a questão da continuidade de h no intervalo fechado $[-2, 2]$, precisamos estender o conceito de continuidade para incluir a continuidade nos extremos de um intervalo fechado. Faremos isso definindo primeiro *continuidade à direita* e *continuidade à esquerda*.

2.7.4 DEFINIÇÃO A função f será **contínua à direita em um número** a se e somente se forem satisfeitas as três condições a seguir:

(i) $f(a)$ existe;

(ii) $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existe;

(iii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

2.7.5 DEFINIÇÃO A função f será **contínua à esquerda em um número** a se e somente se forem satisfeitas as três condições a seguir:

(i) $f(a)$ existe;

(ii) $\lim_{x \to a^-} f(x)$ existe;

(iii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

2.7.6 DEFINIÇÃO Uma função cujo domínio inclui o intervalo fechado $[a, b]$ será **contínua em** $[a, b]$ se e somente se ela for contínua no intervalo aberto (a, b), contínua à direita em a e contínua à esquerda em b.

EXEMPLO 2 Prove que a função h do Exemplo 1 é contínua no intervalo fechado $[-2, 2]$.

Solução A função h é definida por

$$h(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

e no Exemplo 1 mostramos que h é contínua no intervalo aberto $(-2, 2)$. Aplicando o Teorema 2.7.1 calculamos $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x)$ e $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2^+} h(x) &= \lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} \\ &= 0 \\ &= h(-2) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lim_{x \to 2^-} h(x) &= \lim_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} \\ &= 0 \\ &= h(2) \end{aligned}$$

Assim, h é contínua à direita, em -2 e contínua à esquerda, em 2. Logo, pela Definição 2.7.6, h é contínua no intervalo fechado $[-2, 2]$.

Um esboço do gráfico de h está na Figura 1.

Observe a diferença na terminologia que usamos nos Exemplos 1 e 2. No Exemplo 1 estabelecemos que *h é contínua em todo número no intervalo aberto* $(-2, 2)$, enquanto que no Exemplo 2 concluímos que *h é contínua no intervalo fechado* $[-2, 2]$.

2.7.7 DEFINIÇÃO

(i) Uma função cujo domínio inclui o intervalo semi-aberto $[a, b)$ será **contínua em** $[a, b)$ se e somente se ela for contínua no intervalo aberto (a, b) e contínua à direita em a.

(ii) Uma função cujo domínio inclui o intervalo semi-aberto $(a, b]$ será **contínua em** $(a, b]$ se e somente se ela for contínua no intervalo aberto (a, b) e contínua à esquerda em b.

Definições similares àquelas apresentadas na Definição 2.7.7 podem ser dadas para a continuidade nos intervalos $[a, +\infty)$ e $(-\infty, b]$.

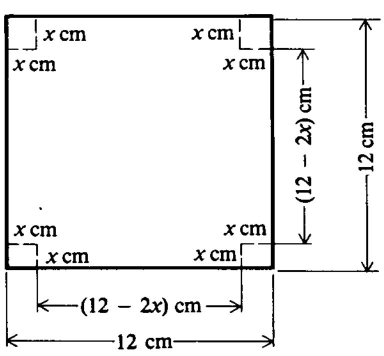


FIGURA 2

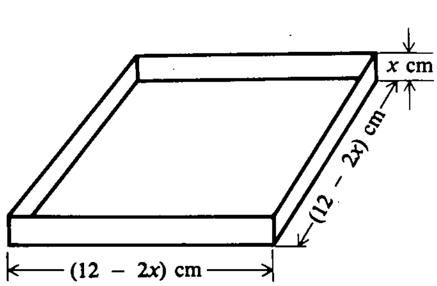


FIGURA 3

EXEMPLO 3 Determine o maior intervalo (ou união de intervalos) em que a função a seguir é contínua:

$$f(x) = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x - 3}$$

Solução Primeiro determinamos o domínio de f. A função é definida em qualquer parte, exceto quando $x = 3$ ou $25 - x^2 < 0$ (isto é, quando $x > 5$ ou $x < -5$). Portanto, o domínio de f é $[-5, 3) \cup (3, 5]$. Como

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -5^+} f(x) &= 0 \\ &= f(-5) \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \lim_{x \to 5^-} f(x) &= 0 \\ &= f(5) \end{aligned}$$

f é contínua à direita, em -5 e à esquerda, em 5. Além disso, f é contínua nos intervalos abertos $(-5, 3)$ e $(3, 5)$. Logo, f é contínua em $[-5, 3) \cup (3, 5]$.

EXEMPLO 4 Um fabricante de caixas de papelão deseja fazer caixas abertas de pedaços quadrados de papelão com 12 cm de lado. Para isso, ele pretende retirar quadrados iguais dos quatro cantos, dobrando a seguir os lados. (a) Se x cm for o comprimento dos quadrados a serem cortados, expresse o volume da caixa em centímetros cúbicos como função de x. (b) Qual é o domínio da função? (c) Prove que a função é contínua em seu domínio.

Solução

(a) A Figura 2 representa um pedaço quadrado de papelão e a Figura 3 ilustra a caixa de papelão obtida. As medidas em centímetros das dimensões da caixa são x, $12 - 2x$ e $12 - 2x$. O volume da caixa é o produto das três dimensões. Logo, se $V(x)$ cm³ for o volume da caixa,

$$
\begin{aligned}
V(x) &= x(12-2x)(12-2x) \\
&= 144x - 48x^2 + 4x^3
\end{aligned}
$$

(b) Observe que $V(0) = 0$ e $V(6) = 0$. Das condições do problema, temos que x não pode ser negativo, nem maior do que 6. Assim, o domínio de V é o intervalo fechado $[0, 6]$.

(c) Como V é uma função polinomial, será contínua em toda parte. Assim sendo, V é contínua no intervalo fechado $[0, 6]$.

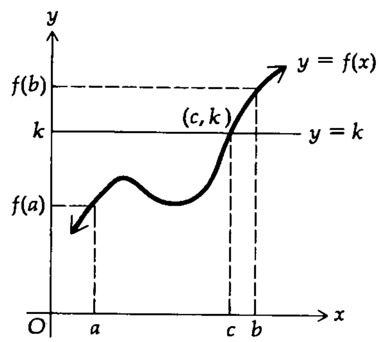


FIGURA 4

A função do Exemplo 4 será discutida novamente na Secção 4.2, onde usaremos o fato de que V é contínua no intervalo fechado $[0, 6]$ para determinar o valor de x que resultará uma caixa com o maior volume possível.

Agora discutiremos um teorema importante sobre funções que são contínuas num intervalo fechado. Ele é chamado de **teorema do valor intermediário.**

2.7.8 TEOREMA
Teorema do Valor Intermediário

Se a função f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, e se $f(a) \neq f(b)$, então, para todo número k entre $f(a)$ e $f(b)$ existirá um número c entre a e b tal que $f(c) = k$.

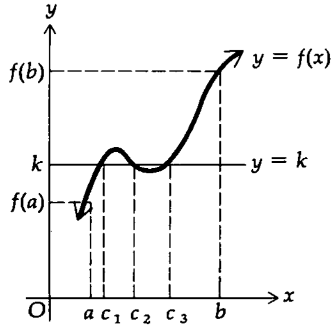


FIGURA 5

A demonstração desse teorema está fora do contexto deste livro; ela poderá ser encontrada num texto de Cálculo Avançado. Discutiremos, contudo, a interpretação geométrica do teorema. Na Figura 4, $(0, k)$ é um ponto qualquer sobre o eixo y entre os pontos $(0, f(a))$ e $(0, f(b))$. O Teorema 2.7.8 estabelece que a reta $y = k$ deve interceptar a curva cuja equação é $y = f(x)$ no ponto (c, k), onde c está entre a e b. A Figura 4 mostra essa intersecção.

Note que para alguns valores de k pode existir mais de um valor possível para c. O teorema estabelece que existe pelo menos um valor de c, mas que ele não é necessariamente único. A Figura 5 mostra três valores possíveis de c (c_1, c_2 e c_3) para um dado k.

O Teorema 2.7.8 estabelece que se a função f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então f assumirá todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$, enquanto x assumirá todos os valores entre a e b. A importância da continuidade de f em $[a, b]$ é demonstrada na ilustração a seguir.

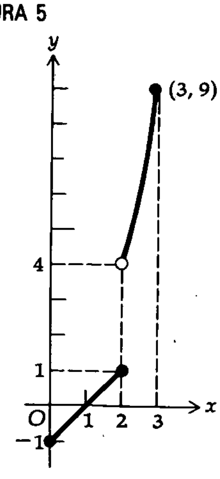


FIGURA 6

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Considere a função f definida por

$$
f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ x^2 & \text{se } 2 < x \leqslant 3 \end{cases}
$$

Um esboço do gráfico dessa função está na Figura 6.

A função f é descontínua em 2, que está no intervalo fechado $[0, 3]$; $f(0) = -1$ e $f(3) = 9$. Se k for qualquer número entre 1 e 4, não existe um valor de c tal que $f(c) = k$, pois não existem valores da função entre 1 e 4.

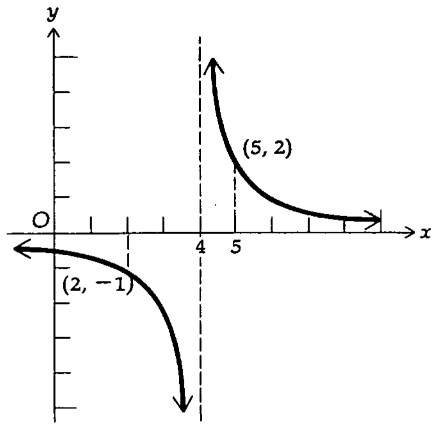


FIGURA 7

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Seja g a função definida por

$$g(x) = \frac{2}{x-4}$$

Um esboço do gráfico dessa função está na Figura 7.

A função g é descontínua em 4 que está no intervalo fechado $[2, 5]$; $g(2) = -1$ e $g(5) = 2$. Se k for qualquer número entre -1 e 2, não existe valor de c entre 2 e 5 tal que $g(c) = k$. Especificando, se $k = 1$, então $g(6) = 1$, mas 6 não está em $[2, 5]$. ◀

EXEMPLO 5 Dada a função f definida por

$$f(x) = 4 + 3x - x^2 \qquad 2 \leqslant x \leqslant 5$$

(a) verifique o teorema do valor intermediário se $k = 1$; isto é, ache um número c no intervalo $[2, 5]$ tal que $f(c) = 1$. (b) Faça um esboço do gráfico de f em $[2, 5]$ e mostre o ponto $(c, 1)$.

Solução

(a) Como f é uma função polinomial, ela será contínua em toda parte e assim será contínua em $[2, 5]$. Uma vez que $f(2) = 6$ e $f(5) = -6$, o teorema do valor intermediário garante que existe um número e entre 2 e 5 tal que $f(c) = 1$; isto é,

$$4 + 3c - c^2 = 1$$

$$c^2 - 3c - 3 = 0$$

$$c = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 12}}{2}$$

$$c = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Rejeitamos $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{21})$, pois esse número está fora do intervalo $[2, 5]$. O número $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{21})$ está no intervalo $[2, 5]$ e

$$f\left(\frac{3 + \sqrt{21}}{2}\right) = 1$$

(b) O esboço pedido está na Figura 8.

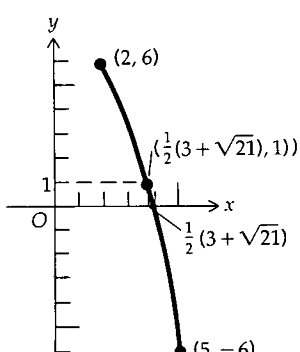


FIGURA 8

EXERCÍCIOS 2.7

Nos Exercícios de 1 a 14 defina $f \circ g$ e determine os números nos quais $f \circ g$ é contínua.

1. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 9 - x^2$ **2.** $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 16 - x^2$

3. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 16$ **4.** $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 + 4$

5. $f(x) = x^3$; $g(x) = \sqrt{x}$ **6.** $f(x) = x^2$; $g(x) = x^2 - 3$

7. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $g(x) = x - 2$ **8.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $g(x) = x + 3$

9. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$ **10.** $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $g(x) = \sqrt{x+1}$

11. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$; $g(x) = \sqrt{x}$ **12.** $f(x) = \sqrt{x+1}$; $g(x) = \sqrt[3]{x}$

13. $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x-1}}$; $g(x) = |x|$ **14.** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{4-x}}$; $g(x) = |x|$

Nos Exercícios de 15 a 24, ache o domínio da função dada e então determine se a função é contínua ou descontínua em cada um dos intervalos indicados.

15. $f(x) = \dfrac{2}{x+5}$; $(3, 7)$, $[-6, 4]$, $(-\infty, 0)$, $(-5, +\infty)$, $[-5, +\infty)$, $[-10, -5)$

16. $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$; $(-\infty, 0]$, $[0, +\infty)$, $(0, 2)$, $(0, 2]$, $[2, +\infty)$, $(2, +\infty)$

17. $f(t) = \dfrac{t}{t^2-1}$; $(0, 1)$, $(-1, 1)$, $[0, 1]$, $(-1, 0]$, $(-\infty, -1]$, $(1, +\infty)$

18. $f(r) = \dfrac{r+3}{r^2-4}$; $(0, 4]$, $(-2, 2)$, $(-\infty, -2]$, $(2, +\infty)$, $[-4, 4]$, $(-2, 2]$

19. $g(x) = \sqrt{x^2-9}$; $(-\infty, -3)$, $(-\infty, -3]$, $(3, +\infty)$, $[3, +\infty)$, $(-3, 3)$

20. $f(x) = [\![x]\!]$; $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $(1, 2)$, $[1, 2)$, $(1, 2]$

21. $f(t) = \dfrac{|t-1|}{t-1}$; $(-\infty, 1)$ $(-\infty, 1]$, $[-1, 1]$, $(-1, +\infty)$, $(1, +\infty)$

22. $h(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{se } x < -2 \\ x - 5 & \text{se } -2 \leqslant x \leqslant 1 \\ 3 - x & \text{se } 1 < x \end{cases}$; $(-\infty, 1)$, $(-2, +\infty)$, $(-2, 1)$, $[-2, 1)$, $[-2, 1]$

23. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$; $(-2, 2)$, $[-2, 2]$, $[-2, 2)$, $(-2, 2]$, $(-\infty, -2]$, $(2, +\infty)$

24. $F(y) = \dfrac{1}{3+2y-y^2}$; $(-1, 3)$, $[-1, 3]$, $[-1, 3)$, $(-1, 3]$

Nos exercícios de 25 a 34, determine o maior intervalo (ou a união de intervalos) em que a função $f \circ g$ do exercício indicado é contínua.

25. Exercício 1. **26.** Exercício 2. **27.** Exercício 3.
28. Exercício 4. **29.** Exercício 9. **30.** Exercício 10.
31. Exercício 11. **32.** Exercício 12. **33.** Exercício 13.
34. Exercício 14.

Nos Exercícios de 35 a 38, faça um esboço do gráfico da função f que satisfaça as condições dadas.

35. f é contínua em $(-\infty, 2]$ e $(2, +\infty)$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -3$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 0$

36. f é contínua em $(-\infty, 0)$ e $[0, +\infty)$; $\lim\limits_{x\to -4} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -3$; $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 2$

37. f é contínua em $(-\infty, -3]$, $(-3, 3)$, e $[3, +\infty)$; $\lim\limits_{x\to -5} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -5$; $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 0$

38. f é contínua em $(-\infty, -2)$, $[-2, 4]$, e $(4, +\infty)$; $\lim\limits_{x\to -5} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -3$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 5$; $\lim\limits_{x\to 6} f(x) = 0$

39. Determine o intervalo maior (ou união de intervalos) em que a função do Exercício 17 nos Exercícios 2.3 é contínua.

40. Determine o intervalo maior (ou união de intervalos) em que a função do Exemplo 4 na Secção 2.3 é contínua.

41. Um fabricante de latas quadradas sem tampa deseja usar pedaços de folha-de-flandres com dimensões 8 e 15 cm, cortando quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando os lados. (a) Se x cm for o comprimento do lado do quadrado a ser cortado, expresse o volume da caixa em centímetros cúbicos como uma função de x. (b) Qual o domínio da função? (c) Prove que a função é contínua em seu domínio.

42. Suponha que o fabricante do Exercício 41 produza as latas com folhas-de-flandres que medem k cm de lado. (a) Se x cm for o comprimento do lado dos quadrados a serem cortados, expresse o volume da lata em centímetros cúbicos como uma função de x. (b) Qual é o domínio da função? (c) Prove que a função é contínua em seu domínio.

43. Um terreno retangular deve ser fechado com 240 metros de cerca. (a) Se x metros for o seu comprimento, expresse a área do terreno em metros quadrados como uma função de x. (b) Qual o domínio da função? (c) Prove que a função é contínua em seu domínio.

44. Um jardim retangular deve ser feito, de modo que o lado da casa sirva de limite e 100 metros de cerca sejam usados para os outros três lados. (a) Se x metros for o comprimento do lado do jardim paralelo à casa, expresse a área do jardim em metros quadrados como uma função de x. (b) Qual é o domínio da função? (c) Prove que a função é contínua em seu domínio.

Nos Exercícios de 45 a 48, ache os valores das constantes c e k que tornam a função contínua em $(-\infty, +\infty)$ e faça um esboço do gráfico da função resultante.

45. $f(x) = \begin{cases} 3x + 7 & \text{se } x \leqslant 4 \\ kx - 1 & \text{se } 4 < x \end{cases}$

46. $f(x) = \begin{cases} kx - 1 & \text{se } x < 2 \\ kx^2 & \text{se } 2 \leqslant x \end{cases}$

47. $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leqslant 1 \\ cx + k & \text{se } 1 < x < 4 \\ -2x & \text{se } 4 \leqslant x \end{cases}$

48. $f(x) = \begin{cases} x + 2c & \text{se } x < -2 \\ 3cx + k & \text{se } -2 \leqslant x \leqslant 1 \\ 3x - 2k & \text{se } 1 < x \end{cases}$

Nos Exercícios de 49 a 56, são dados uma função f e um intervalo fechado [a, b]. Determine se o teorema do valor intermediário se aplica para o valor de k dado. Se o teorema for aplicável, ache um número c tal que f(c) = k. Caso contrário, explique porquê. Faça um esboço da curva e da reta y = k.

49. $f(x) = 2 + x - x^2$; $[a, b] = [0, 3]$; $k = 1$

50. $f(x) = x^2 + 5x - 6$; $[a, b] = [-1, 2]$; $k = 4$

51. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$; $[a, b] = [-4.5, 3]$; $k = 3$

52. $f(x) = -\sqrt{100 - x^2}$; $[a, b] = [0, 8]$; $k = -8$

53. $f(x) = \dfrac{4}{x+2}$; $[a, b] = [-3, 1]$; $k = \frac{1}{2}$

54. $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{se } -4 \leqslant x \leqslant -2 \\ 2 - x & \text{se } -2 < x \leqslant 1 \end{cases}$; $[a, b] = [-4, 1]$; $k = \frac{1}{2}$

55. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } -2 \leqslant x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$; $[a, b] = [-2, 3]$; $k = -1$

56. $f(x) = \dfrac{5}{2x-1}$; $[a, b] = [0, 1]$; $k = 2$

57. Dada a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } a \leqslant x < b \\ h(x) & \text{se } b \leqslant x \leqslant c \end{cases}$$

Se g for contínua em $[a, b)$ e h for contínua em $[b, c]$, podemos concluir que f é contínua em $[a, c]$? Se sua resposta for sim, prove-a. Se sua resposta for não, que condição ou condições adicionais assegurariam a continuidade de f em $[a, c]$?

58. Prove que se a função f for contínua em a, então $\lim\limits_{t \to 0} t(a - t) = f(a)$.

59. Ache o maior valor de k para o qual a função definida por $f(x) = x^2 - 2$ é contínua no intervalo $[3, 3 + k)$.

60. Suponha que f seja uma função para a qual $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ se $0 \leqslant x \leqslant 1$. Prove que se f for contínua em $[0, 1]$, existirá pelo menos um número c em $[0, 1]$ tal que $f(c) = c$. (*Sugestão*: se nem 0 nem 1 servirem como c, então $f(0) > 0$ e $f(1) < 1$. Considere a função g para a qual $g(x) = f(x) - x$ e aplique o teorema do valor intermediário a g em $[0, 1]$.)

61. Mostre que o teorema do valor intermediário garante que a equação $x^3 - 4x + x + 3 = 0$ tenha raiz entre 1 e 2.

62. Mostre que o teorema do valor intermediário garante que a equação $x^3 + x + 3 = 0$ tenha raiz entre -2 e -1.

2.8 CONTINUIDADE DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E O TEOREMA DO CONFRONTO DE LIMITES (OU TEOREMA DO "SANDUÍCHE")

Em nossa discussão sobre continuidade das funções trigonométricas, faremos uso do seguinte limite:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \tag{1}$$

Vemos que a função dada por $\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$ não é definida quando $t = 0$. Para termos uma idéia intuitiva da existência do limite em (1), consideremos valores de sen t/t para t próximo de 0. Na Tabela 1 estão os valores da função obtidos com uma calculadora quando t é 1,0, 0,9, 0,8,..., 0,1 e 0,01; na Tabela 2 estão os valores da função quando t é $-1{,}0$, $-0{,}9$, -8,..., $-0{,}1$ e $-0{,}01$.

Tabela 1

t	$\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$
1,0	0,84147
0,9	0,87036
0,8	0,89670
0,7	0,92031
0,6	0,94107
0,5	0,95885
0,4	0,97355
0,3	0,98507
0,2	0,99335
0,1	0,99833
0,01	0,99998

Tabela 2

t	$\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$
−1,0	0,84147
−0,9	0,87036
−0,8	0,89670
−0,7	0,92031
−0,6	0,94107
−0,5	0,95885
−0,4	0,97355
−0,3	0,98507
−0,2	0,99335
−0,1	0,99833
−0,01	0,99998

Das duas tabelas, notamos que o limite em (1) existe e é igual a 1. Que, de fato, o limite existe e é igual a 1 será provado no Teorema 2.8.2, mas na sua demonstração usaremos um outro teorema conhecido como **teorema do "sanduíche"**. O teorema do "sanduíche" não é importante apenas na demonstração do Teorema 2.8.2, mas também nas demonstrações de alguns teoremas fundamentais enunciados em secções subseqüentes.

2.8.1 TEOREMA TEOREMA DO "SANDUÍCHE"

Suponha que as funções f, g e h estejam definidas em algum intervalo aberto I contendo a, exceto possivelmente no próprio a e que $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ para todo x em I, tal que $x \neq a$. Suponha também que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} h(x)$ ambos existam e tenham o mesmo valor L. Então $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existe e é igual a L.

Antes de provar o Teorema 2.8.1, consideremos a seguinte ilustração que o interpreta geometricamente:

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Sejam f, g e h as funções definidas por

$$f(x) = -4(x-2)^2 + 3$$

$$g(x) = \frac{(x-2)(x^2 - 4x + 7)}{x - 2}$$

$$h(x) = 4(x-2)^2 + 3$$

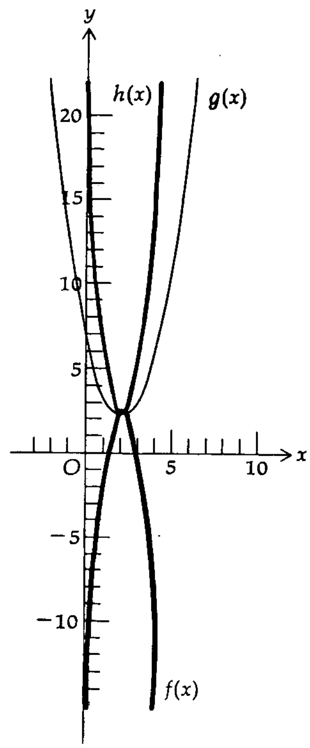


FIGURA 1

Os gráficos de f e h são parábolas tendo seu vértice em (2,3). O gráfico de g é uma parábola da qual exclui-se o vértice (2,3). Esboços desses gráficos estão na Figura 1. A função g não é definida para $x = 2$; contudo, para todo $x \neq 2$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$. Além disso, $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$ e $\lim_{x \to 2} h(x) = 3$. As hipóteses do Teorema 2.8.1 estão, portanto, satisfeitas e segue então que $\lim_{x \to 2} g(x) = 3$. ◀

Prova do Teorema 2.8.1 Para demonstrar que $\lim_{x \to a} g(x) = L$, precisamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |g(x) - L| < \epsilon \tag{2}$$

É dado que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} h(x) = L$$

e assim para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{ se } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ então } L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon \tag{3}$$

e um $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ então } |h(x) - L| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{ se } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ então } L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon \tag{4}$$

seja $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ e assim $\delta \leqslant \delta_1$ e $\delta \leqslant \delta_2$. Logo, segue da afirmativa (3) que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } L - \epsilon < f(x) \tag{5}$$

e da afirmativa (4), temos

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } h(x) < L + \epsilon \tag{6}$$

Sabemos que

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \tag{7}$$

Das afirmativas (5), (6) e (7),

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } L - \epsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < L + \epsilon$$

Logo,

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{ se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |g(x) - L| < \epsilon$$

que é a afirmativa (2). Logo,

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$ ■

EXEMPLO 1 Dado $|g(x) - 2| \leqslant 3(x - 1)^2$ para todo x, use o teorema do "sanduíche" para encontrar $\lim_{x \to 1} g(x)$.

Solução como $|g(x) - 2| \leqslant 3(x-1)^2$ para todo x, segue do Teorema 1.1.10 que

$$-3(x-1)^2 \leqslant g(x) - 2 \leqslant 3(x-1)^2 \qquad \text{para todo } x$$

$$\Leftrightarrow \qquad -3(x-1)^2 + 2 \leqslant g(x) \leqslant 3(x-1)^2 + 2 \qquad \text{para todo } x$$

Sejam $f(x) = -3(x-1)^2 + 2$ e $h(x) = 3(x-1)^2 + 2$, então

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1} h(x) = 2 \tag{8}$$

Além disso, para todo x

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \tag{9}$$

Logo, segue de (8), (9) e do teorema do "sanduíche" que

$$\lim_{x \to 1} g(x) = 2$$

EXEMPLO 2 Use o teorema do "sanduíche" para provar que

$$\lim_{x \to 0} \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = 0$$

Solução Como $-1 \leqslant \operatorname{sen} t \leqslant 1$ para todo t, então

$$0 \leqslant \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leqslant 1 \qquad \text{se } x \neq 0$$

Logo, se $x \neq 0$

$$\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right|$$

$$\leqslant |x|$$

Assim,

$$0 \leqslant \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leqslant |x| \qquad \text{se } x \neq 0 \tag{10}$$

Como $\lim_{x \to 0} 0 = 0$ e $\lim_{x \to 0} |x| = 0$, segue da desigualdade (10) e do teorema do "sanduíche" que

$$\lim_{x \to 0} \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = 0$$

2.8.2 TEOREMA

$$\boxed{\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1}$$

Prova Suponha primeiro que $0 < t < \frac{1}{2}\pi$. Veja a Figura 2 que mostra a circunferência do círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$ e o setor sombreado BOP, onde B é o ponto $(1,0)$ e P é o ponto $(\cos t, \operatorname{sen} t)$. A área de um setor circular de raio r e ângulo central, cuja medida em radianos é t, é determinada por $\frac{1}{2}r^2t$; assim, se a área do setor BOP for S unidades quadradas,

$$S = \tfrac{1}{2}t \tag{11}$$

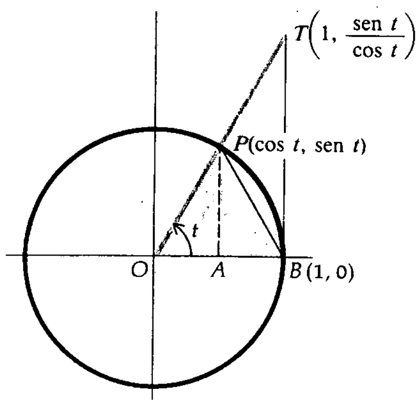


FIGURA 2

Considere agora o triângulo BOP e seja a área desse triângulo igual a K_1 unidades quadradas. Como $K_1 = \frac{1}{2}|\overline{AP}| \cdot |\overline{OB}|$, $|\overline{AP}| = \text{sen } t$ e $|\overline{OB}| = 1$, temos que

$$K_1 = \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\, t \tag{12}$$

A reta que passa pelos pontos O (0, 0) e $P(\cos t, \text{sen } t)$ tem por inclinação sen t/cos t e, portanto, sua equação é

$$y = \frac{\text{sen}\, t}{\cos t}\, x$$

Essa reta intercepta a reta $x = 1$ em (1, sen t/cos t) que é o ponto T na Figura 2. Se a área do triângulo retângulo BOT for K_2 unidades quadradas, então $K_2 = \frac{1}{2}|\overline{BT}| \cdot |\overline{OB}|$. Como $|\overline{BT}| = \text{sen } t/\cos t$ e $|\overline{OB}| = 1$, temos

$$K_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{sen}\, t}{\cos t} \tag{13}$$

Da Figura 2, observe que

$$K_1 < S < K_2$$

Substituindo (11), (12) e (13) nessa desigualdade,

$$\frac{1}{2}\,\text{sen}\, t < \frac{1}{2}\, t < \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{sen}\, t}{\cos t}$$

Multiplicando cada membro da desigualdade acima por 2/sen t, que é positivo pois $0 < t < \frac{1}{2}\pi$,

$$1 < \frac{t}{\text{sen}\, t} < \frac{1}{\cos t}$$

Tomando o recíproco de cada membro da desigualdade acima e invertendo os sinais das desigualdades,

$$\cos t < \frac{\text{sen}\, t}{t} < 1 \tag{14}$$

Da desigualdade à direita,

$$\text{sen}\, t < t \tag{15}$$

e da identidade em Trigonometria,

$$\frac{1 - \cos t}{2} = \text{sen}^2 \frac{1}{2} t \tag{16}$$

Substituindo t por $\frac{1}{2}t$ na desigualdade (15) e elevando ao quadrado

$$\text{sen}^2 \tfrac{1}{2}t < \tfrac{1}{4}t^2 \tag{17}$$

Assim, de (16) e (17), segue que

$$\frac{1 - \cos t}{2} < \frac{t^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \tfrac{1}{2}t^2 < \cos t \tag{18}$$

De (14) e (18) e como $0 < t < \frac{1}{2}\pi$,

$$1 - \frac{1}{2}t^2 < \frac{\text{sen}\, t}{t} < 1 \qquad \text{se } 0 < t < \tfrac{1}{2}\pi \tag{19}$$

Se $-\frac{1}{2}\pi < t < 0$, então $0 < -t < \frac{1}{2}\pi$; e assim de (19),

$$1 - \frac{1}{2}(-t)^2 < \frac{\operatorname{sen}(-t)}{-t} < 1 \qquad \text{se } -\tfrac{1}{2}\pi < t < 0$$

Mas sen $(-t) = -$sen t; assim podemos escrever o que está acima como

$$1 - \frac{1}{2}t^2 < \frac{\operatorname{sen} t}{t} < 1 \qquad \text{se } -\tfrac{1}{2}\pi < t < 0 \tag{20}$$

De (19) e (20) concluímos que

$$1 - \frac{1}{2}t^2 < \frac{\operatorname{sen} t}{t} < 1 \qquad \text{se } -\tfrac{1}{2}\pi < t < \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{e} \quad t \neq 0 \tag{21}$$

Como $\lim\limits_{t \to 0} (1 - \frac{1}{2}t^2) = 1$ e $\lim\limits_{t \to 0} 1 = 1$, segue de (21) e do teorema do "sanduíche" que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

■

EXEMPLO 3 Ache o limite, se existir:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x}$$

Solução Queremos escrever o quociente sen $3x$/sen $5x$ de tal forma que o Teorema 2.8.2 possa ser aplicado. Se $x \neq 0$,

$$\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x} = \frac{3\left(\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\right)}{5\left(\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x}\right)}$$

Quando x tende a zero, o mesmo acontece com $3x$ e $5x$. Logo,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = \lim_{3x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} = \lim_{5x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} = 1$$

Logo,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x} = \frac{3 \lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\right)}{5 \lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x}\right)} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 1} = \frac{3}{5}$$

Do Teorema 2.8.2, podemos provar que as funções seno e co-seno são contínuas em 0.

2.8.3 TEOREMA A função seno é contínua em 0.

Prova Podemos mostrar que são satisfeitas as três condições necessárias à continuidade:

(i) $\operatorname{sen} 0 = 0$

(ii) $$\lim_{t \to 0} \operatorname{sen} t = \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \cdot t$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \cdot \lim_{t \to 0} t$$
$$= 1 \cdot 0$$
$$= 0$$

(iii) $\lim_{t \to 0} \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} 0$

Logo, a função seno é contínua em 0. ■

2.8.4 TEOREMA A função co-seno é contínua em 0.

Prova Vamos verificar as três condições necessárias à continuidade em um número. Ao verificar a condição (ii), usamos o fato de que a função seno é contínua em 0 e substituímos $\cos t$ por $\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}$, pois $\cos t > 0$ quando $0 < t < \frac{1}{2}\pi$ e quando $-\frac{1}{2}\pi < t < 0$.

(i) $\cos 0 = 1$

(ii) $$\lim_{t \to 0} \cos t = \lim_{t \to 0} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}$$
$$= \sqrt{\lim_{t \to 0} (1 - \operatorname{sen}^2 t)}$$
$$= \sqrt{1 - 0}$$
$$= 1$$

(iii) $\lim_{t \to 0} \cos t = \cos 0$

Assim, a função co-seno é contínua em 0. ■

Precisaremos do limite a seguir mais adiante. Ele será obtido dos três teoremas anteriores e dos teoremas de limite.

2.8.5 TEOREMA $$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$$

Prova

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(1 - \cos t)(1 + \cos t)}{t(1 + \cos t)}$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{(1 - \cos^2 t)}{t(1 + \cos t)}$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t(1 + \cos t)}$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t}$$

Pelo Teorema 2.8.2,

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

e como as funções seno e co-seno são contínuas em 0, segue que

$$\begin{aligned}\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t} &= \frac{0}{1 + 1} \\ &= 0\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} &= 1 \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

■

EXEMPLO 4 Ache o limite, se existir:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Solução Como $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$, os teoremas de limite não podem ser aplicados ao quociente $(1 - \cos x)/\operatorname{sen} x$. Mas, se dividirmos o numerador e o denominador por x, o que é permissível, pois $x \neq 0$, poderemos aplicar os Teoremas 2.8.2 e 2.8.5. Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1 - \cos x}{x}}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} \\ &= \frac{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}}{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} \\ &= \frac{0}{1} \\ &= 0\end{aligned}$$

EXEMPLO 5 Ache o limite, se existir.

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{tg}^2 x}{x^2}$$

Solução Usaremos a identidade trigonométrica

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

e teremos

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{tg}^2\, x}{x^2} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}^2\, x}{x^2 \cdot \cos^2 x}$$
$$= 2 \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}\, x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}\, x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$= 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$
$$= 2$$

Usando o Teorema 2.2.12 e o fato de que as funções seno e co-seno são contínuas em 0, podemos provar o seguinte teorema:

2.8.6 TEOREMA As funções seno e co-seno são contínuas em todos os números reais.

Prova O conjunto de todos os números reais é o domínio de ambas as funções seno e co-seno. Logo, precisamos mostrar que se a for um número real qualquer,

$$\lim_{x\to a} \mathrm{sen}\, x = \mathrm{sen}\, a \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} \cos x = \cos a$$

ou, equivalentemente, do Teorema 2.2.12,

$$\lim_{t\to 0} \mathrm{sen}(t + a) = \mathrm{sen}\, a \text{ e } \lim_{t\to 0} \cos(t + a) = \cos a \tag{22}$$

Usaremos as identidades

$$\mathrm{sen}(t + a) = \mathrm{sen}\, t \cos a + \cos t\, \mathrm{sen}\, a \tag{23}$$

$$\cos(t + a) = \cos t \cos a - \mathrm{sen}\, t\, \mathrm{sen}\, a \tag{24}$$

De (23),

$$\lim_{t\to 0} \mathrm{sen}(t + a) = \lim_{t\to 0} (\mathrm{sen}\, t \cos a + \cos t\, \mathrm{sen}\, a)$$
$$= \lim_{t\to 0} \mathrm{sen}\, t \cdot \lim_{t\to 0} \cos a + \lim_{t\to 0} \cos t \cdot \lim_{t\to 0} \mathrm{sen}\, a$$
$$= 0 \cdot \cos a + 1 \cdot \mathrm{sen}\, a$$
$$= \mathrm{sen}\, a$$

Logo, a primeira das igualdades (22) é verdadeira; assim, a função seno é contínua em todo número real. De (24),

$$\lim_{t\to 0} \cos(t + a) = \lim_{t\to 0} (\cos t \cos a - \mathrm{sen}\, t\, \mathrm{sen}\, a)$$
$$= \lim_{t\to 0} \cos t \cdot \lim_{t\to 0} \cos a - \lim_{t\to 0} \mathrm{sen}\, t \cdot \lim_{t\to 0} \mathrm{sen}\, a$$
$$= 1 \cdot \cos a - 0 \cdot \mathrm{sen}\, a$$
$$= \cos a$$

Assim, a segunda das equações em (22) é verdadeira e, portanto, a função co-seno é contínua em todo número real. ■

Usando as identidades trigonométricas, o Teorema 2.6.4 sobre continuidade de uma função racional e o Teorema 2.8.6, podemos provar que as outras quatro funções trigonométricas são contínuas em seus domínios.

2.8.7 TEOREMA A tangente, co-tangente, secante e co-secante são funções contínuas em seus domínios.

A demonstração do Teorema 2.8.7 será deixada como exercício (veja os Exercícios de 35 a 38).

EXERCÍCIOS 2.8

Nos Exercícios de 1 a 26, calcule o limite, quando ele existir.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{x}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\operatorname{sen} 3x}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 9x}{\operatorname{sen} 7x}$
4. $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3t}{\operatorname{sen} 6t}$
5. $\lim_{y\to 0} \frac{3y}{\operatorname{sen} 5y}$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^2}$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 3x}$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^5 2x}{4x^5}$
9. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\cos x}$
10. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$
11. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{x}$
12. $\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos 2z}{4z}$
13. $\lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{1-\cos^2 \frac{1}{2}x}$
14. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{2x^2}$
15. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{2x}$
16. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^4 2x}{4x^4}$
17. $\lim_{t\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} t}{t^2}$
18. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$
19. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{\operatorname{sen} 3x}$
20. $\lim_{y\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} 4y}{\cos 3y - 1}$
21. $\lim_{x\to \pi/2} \frac{1-\operatorname{sen} x}{\frac{1}{2}\pi - x}$ (*Sugestão*: seja $t = \frac{1}{2}\pi - x$.)
22. $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\frac{1}{2}\pi - x}{\cos x}$ (*Sugestão*: seja $t = \frac{1}{2}\pi - x$.)
23. $\lim_{x\to \pi^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}$ (*Sugestão*: seja $t = x - \pi$.)
24. $\lim_{x\to \pi^+} \frac{\tan x}{x-\pi}$ (*Sugestão*: seja $t = x - \pi$.)
25. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+3x}{\operatorname{sen} x}$
26. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{3x^2+2x}$

Nos Exercícios de 27 a 30, use o teorema do "sanduíche" para encontrar o limite.

27. $\lim_{x\to 0} x \cos \frac{1}{x}$
28. $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
29. $\lim_{x\to 3} g(x)$, se $|g(x) + 4| < 2(3 - x)^4$ para todo x
30. $\lim_{x\to -2} g(x)$, se $|g(x) - 3| < 5(x + 2)^2$ para todo x

Nos Exercícios 31 e 32, encontre o limite, se existir

31. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{x}$
32. $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$
33. Dado: $1 - \cos^2 x \leqslant f(x) \leqslant x^2$ para todo x no intervalo aberto $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Ache $\lim_{x\to 0} f(x)$.
34. Dado: $-\operatorname{sen} x \leqslant f(x) \leqslant 2 + \operatorname{sen} x$ para todo x no intervalo aberto $(-\pi, 0)$. Ache $\lim_{x\to \pi/2} f(x)$.

Nos Exercícios de 35 a 38 prove que a função é contínua em seu domínio.

35. A função tangente.
36. A função co-tangente.
37. A função secante.
38. A função co-secante.
39. Se $|f(x)| \leqslant M$ para todo x, onde M é uma constante, use o teorema do "sanduíche" para provar que $\lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$
40. Suponha que $|f(x)| \leqslant M$ para todo x, onde M é uma constante. Além disso, suponha que $\lim_{x\to a} |g(x)| = 0$. Use o teorema do "sanduíche" para provar que $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.
41. Se $|f(x)| \leqslant k\,|x - a|$ para todo $x \neq a$, onde k é uma constante, prove que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$

2.9 PROVAS DE ALGUNS TEOREMAS SOBRE LIMITES DE FUNÇÕES *(Suplementar)*

Na Secção 2.1 há um teorema (Teorema 2.1.2) e na secção 2.2 há dois teoremas (Teoremas de Limite 9 e 10) cujas provas foram adiadas até esta secção.

Conforme ficou estabelecido na Secção 2.1, o Teorema 2.1.2 é um teorema de unicidade que garante que se o limite de uma função existir, ele será único. Vamos enunciá-lo novamente e demonstrá-lo.

2.1.2 TEOREMA Se $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.

Prova Vamos supor que $L_1 \neq L_2$ e mostrar que essa hipótese leva a uma contradição. Como $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$, segue, da Definição 2.1.1, que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{então} \quad |f(x) - L_1| < \epsilon \tag{1}$$

Também, como $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, existe um $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{então} \quad |f(x) - L_2| < \epsilon \tag{2}$$

Agora, escrevendo $L_1 - L_2$ como $L_1 - f(x) + f(x) - L_2$ e aplicando a desigualdade triangular (Teorema 1.1.15), temos

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |[L_1 - f(x)] + [f(x) - L_2]| \\ &\leqslant |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| \end{aligned} \tag{3}$$

Assim, de (1), (2) e (3) podemos concluir que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ e um $\delta_2 > 0$ tais que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{e} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{então} \quad |L_1 - L_2| < \epsilon + \epsilon \tag{4}$$

Se δ for o menor dentre δ_1 e δ_2, então $\delta \leqslant \delta_1$ e $\delta \leqslant \delta_2$ e (4) estabelece que para todo $\epsilon > 0$ há um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |L_1 - L_2| < 2\epsilon \tag{5}$$

Mas se $\epsilon = \frac{1}{2} |L_1 - L_2|$, então (5) estabelece que existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|$$

Evidentemente, $|L_1 - L_2|$ não pode ser menor que si próprio. Logo, temos uma contradição e nossa hipótese é falsa. Assim, $L_1 = L_2$, e o teorema está provado. ■

Para provar o Teorema de Limite 9 (limite do quociente de duas funções) e o Teorema de Limite 10 (limite da raiz enésima de uma função), aplicamos o Teorema 2.7.1 sobre o limite de uma função composta, que agora vamos enunciar novamente.

2.7.1 TEOREMA

Se $\lim_{x \to a} g(x) = b$ e se a função f for contínua em b,

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = f(b)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x))$$

O Teorema 2.7.1 foi provado na Secção 2.7. Antes de aplicá-lo na demonstração do Teorema de Limite 9, precisamos demonstrar um teorema sobre a continuidade da função definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

2.9.1 TEOREMA

Se a for qualquer número exceto 0 e

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

então f será contínua em a.

Prova O domínio de f é o conjunto de todos os números reais, exceto 0. Logo, a está nesse domínio. A prova estará completa se pudermos mostrar que

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$$

Para provar isso, dois casos devem ser considerados: $a > 0$ e $a < 0$. Provaremos o caso em que $a > 0$ e deixaremos a demonstração do caso $a < 0$ como exercício (veja o Exercício 18).

Como $1/x$ está definido para todo x exceto 0, o intervalo aberto requerido pela Definição 2.1.1 pode ser qualquer intervalo aberto contendo a, mas não contendo 0.

Considerando $a > 0$, precisamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \epsilon \tag{6}$$

Como

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| &= \left|\frac{a - x}{ax}\right| \\
&= \frac{|x - a|}{|a|\,|x|} \\
&= |x - a| \cdot \frac{1}{a|x|} \qquad \text{(pois } a > 0\text{)}
\end{aligned}$$

a afirmativa (6) é equivalente a

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |x - a| \cdot \frac{1}{a|x|} < \epsilon \tag{7}$$

Na parte final de (7), além de $|x - a|$, temos outro fator: o quociente $\frac{1}{a|x|}$. Logo, para provar (7) precisamos restringir δ para obtermos uma desigualdade envolvendo $\frac{1}{a|x|}$. Escolhendo o intervalo aberto exigido pela Definição 2.1.1 como sendo $(\frac{1}{2}a, \frac{3}{2}a)$, que contém a mas não 0, estamos exigindo $\delta \leqslant \frac{1}{2}a$. Então,

$$\begin{aligned}
& 0 < |x - a| < \delta \quad \text{e} \quad \delta \leqslant \tfrac{1}{2}a \\
\Rightarrow\quad & |x - a| < \tfrac{1}{2}a \\
\Rightarrow\quad & -\tfrac{1}{2}a < x - a < \tfrac{1}{2}a \\
\Rightarrow\quad & \tfrac{1}{2}a < x < \tfrac{3}{2}a \\
\Rightarrow\quad & \tfrac{1}{2}a < |x| < \tfrac{3}{2}a \qquad \text{(pois } a > 0\text{)} \\
\Rightarrow\quad & \frac{2}{3a} < \frac{1}{|x|} < \frac{2}{a} \\
\Rightarrow\quad & \frac{2}{3a^2} < \frac{1}{a|x|} < \frac{2}{a^2}
\end{aligned} \tag{8}$$

Agora

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{e} \quad \frac{1}{a|x|} < \frac{2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \quad |x - a| \cdot \frac{1}{a|x|} < \delta \cdot \frac{2}{a^2} \tag{9}$$

Como nossa meta é ter $|x - a| \cdot \dfrac{1}{a|x|} < \epsilon$, a afirmativa (9) indica que devemos exigir $\delta \cdot \dfrac{2}{a^2} \leqslant \epsilon$, isto é, $\delta \leqslant \frac{1}{2}a^2 \epsilon$. Assim, com essas duas restrições em δ, escolhemos $\delta = \min(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a^2 \epsilon)$. Com esse δ usamos o seguinte argumento:

$$0 < |x - a| < \delta$$

$$\Rightarrow \quad |x - a| \cdot \frac{1}{a|x|} < \delta \cdot \frac{1}{a|x|}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|x - a|}{|a|\,|x|} < \delta \cdot \frac{1}{a|x|} \qquad (\text{pois } a > 0)$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{a - x}{ax}\right| < \delta \cdot \frac{1}{a|x|}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \delta \cdot \frac{1}{a|x|}. \tag{10}$$

Mostramos em (8) se $\delta \leqslant \frac{1}{2}a$ e $0 < |x - a| < \delta$, então $\dfrac{1}{a\,|x|} < \dfrac{2}{a^2}$, isto é, $\delta \cdot \dfrac{1}{a\,|x|} < \delta \cdot \dfrac{2}{a^2}$. Continuando a partir de (10), temos

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \delta \cdot \frac{1}{a|x|} \quad \text{e} \quad \delta \cdot \frac{1}{a|x|} < \delta \cdot \frac{2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \delta \cdot \frac{2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \frac{1}{2}a^2\epsilon \cdot \frac{2}{a^2} \qquad (\text{pois } \delta \leqslant \tfrac{1}{2}a^2\epsilon)$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \epsilon$$

Assim, mostramos que para todos $\epsilon > 0$, com $\delta = \min(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a^2 \epsilon)$, a seguinte afirmativa será verdadeira:

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \epsilon$$

Isso prova que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a}$, se $a > 0$. Logo, f é contínua em a, se $a > 0$. ■

Antes de enunciar novamente o Teorema de Limite 9 e demonstrá-lo usando os Teoremas 2.7.1 e 2.9.1, vamos dar um exemplo mostrando como os Teoremas 2.7.1 e 2.9.1 podem ser usados para determinar o limite de um dado quociente.

EXEMPLO 1 Usando os Teoremas 2.7.1 e 2.9.1, em vez de aplicar o Teorema de Limite 9 (limite de um quociente), encontre

$$\lim_{x \to 2} \frac{4x - 3}{x^2 + 2x + 5}$$

Solução Sejam f e g as funções definidas por

$$f(x) = 4x - 3 \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 + 2x + 5$$

Consideraremos $f(x)/g(x)$ como o produto de $f(x)$ por $1/g(x)$ e usaremos o Teorema de Limite 6 (limite de um produto). Primeiro, porém, precisamos encontrar $\lim_{x \to 2} 1/g(x)$, o que é feito ao considerarmos $1/g(x)$ como o valor de uma função composta.

Se h for a função definida por $h(x) = 1/x$, então a função composta $h \circ g$ será a função definida por $h(g(x)) = 1/g(x)$. Agora

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} g(x) &= \lim_{x \to 2} (x^2 + 2x + 5) \\ &= 13 \end{aligned}$$

Do Teorema 2.9.1, h é contínua em 13; assim, podemos usar o Teorema 2.7.1 e ter

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} \frac{1}{x^2 + 2x + 5} &= \lim_{x \to 2} \frac{1}{g(x)} \\ &= \lim_{x \to 2} h(g(x)) \\ &= h(\lim_{x \to 2} g(x)) \qquad \text{(pelo Teorema 2.7.1).} \\ &= h(13) \\ &= \tfrac{1}{13} \end{aligned}$$

Logo, usando o Teorema de Limite 6,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} \frac{4x - 3}{x^2 + 2x + 5} &= \lim_{x \to 2} (4x - 3) \cdot \lim_{x \to 2} \frac{1}{x^2 + 2x + 5} \\ &= 5 \cdot \tfrac{1}{13} \\ &= \tfrac{5}{13} \end{aligned}$$

2.2.9 TEOREMA DE LIMITE 9

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e se $\lim_{x \to a} g(x) = M$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \text{ se } M \neq 0.$$

Prova Seja h a função definida por $h(x) = 1/x$. Então, a função composta de $h \circ g$ está definida por $h(g(x)) = 1/g(x)$. A função h é contínua em toda parte, exceto 0, o que segue do Teorema 2.9.1. Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} &= \lim_{x\to a} h(g(x))\\ &= h(\lim_{x\to a} g(x)) \qquad \text{(pelo Teorema 2.7.1)}\\ &= h(M)\\ &= \frac{1}{M}\end{aligned}$$

Do Teorema de limite 6 e do resultado acima,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}\\ &= L\cdot\frac{1}{M}\\ &= \frac{L}{M}\end{aligned}$$

■

Para provar o Teorema de Limite 10 usando o Teorema 2.7.1, vamos precisar usar também o teorema sobre a continuidade da função f definida por $f(x) = \sqrt[n]{x}$, o qual foi enunciado como o Teorema 2.6.5 na secção 2.6, mas não foi provado. Faremos agora a sua demonstração, usando para tanto as seguintes fórmulas, onde n é qualquer número inteiro positivo:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \tag{11}$$

A fórmula (11) segue de

$$a(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1}$$

e

$$b(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n$$

subtraindo os termos da segunda igualdade pelos da primeira igualdade.

2.6.5 TEOREMA Se n for um inteiro positivo e

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

então,

(i) se n for ímpar, f será contínua em todo número real a;
(ii) se n for par, f será contínua em todo número positivo a.

Prova Provaremos o teorema para o caso em que a é um número positivo e n é par ou ímpar. O caso em que a é negativo ou nulo e n é ímpar será deixado como exercício (veja o Exercício 19).

Queremos provar que se $a > 0$ e $f(x) = \sqrt[n]{x}$, então f será contínua em a. Como $\sqrt[n]{a}$ existe quando $a > 0$, a demonstração estará completa se mostrarmos que

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

Como $\sqrt[n]{x}$ está definida para todo número não-negativo, o intervalo aberto exigido pela Definição 2.1.1 poderá ser qualquer intervalo aberto contendo a e tendo um número não-negativo como extremo esquerdo. Precisamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \epsilon \tag{12}$$

Para expressarmos $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}|$ em termos de $|x - a|$ usaremos (11).

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| = \left|\frac{(x^{1/n} - a^{1/n})[(x^{1/n})^{n-1} + (x^{1/n})^{n-2}a^{1/n} + \ldots + x^{1/n}(a^{1/n})^{n-2} + (a^{1/n})^{n-1}]}{(x^{1/n})^{n-1} + (x^{1/n})^{n-2}a^{1/n} + \ldots + x^{1/n}(a^{1/n})^{n-2} + (a^{1/n})^{n-1}}\right|$$

Se (11) for aplicada ao numerador:

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| = |x - a| \cdot \frac{1}{|x^{(n-1)/n} + x^{(n-2)/n}a^{1/n} + \ldots + x^{1/n}a^{(n-2)/n} + a^{(n-1)/n}|}$$

Nessa equação expressaremos

$$|\phi(x)| = |x^{(n-1)/n} + x^{(n-2)/n}a^{1/n} + \ldots + x^{1/n}a^{(n-2)/n} + a^{(n-1)/n}|$$

e obteremos

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| = |x - a| \cdot \frac{1}{|\phi(x)|} \tag{13}$$

Assim, a afirmativa (12) é equivalente a:

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |x - a| \cdot \frac{1}{|\phi(x)|} < \epsilon \tag{14}$$

Na parte final de (14), além do fator $|x - a|$, temos a fração $\frac{1}{|\phi(x)|}$. Logo, para provar (14) precisamos restringir δ de forma a ter uma desigualdade envolvendo essa fração. Se escolhermos o intervalo aberto estipulado na Definição 2.1.1 como sendo o intervalo $(0, 2a)$, estaremos exigindo que $\delta \leqslant a$. Então

$$\begin{aligned}
& 0 < |x - a| < \delta \quad \text{e} \quad \delta \leqslant a \\
\Rightarrow\quad & |x - a| < a \\
\Rightarrow\quad & -a < x - a < a \\
\Rightarrow\quad & 0 < x < 2a \\
\Rightarrow\quad & a^{(n-1)/n} < |\phi(x)| \quad (\text{pois } x > 0) \\
\Rightarrow\quad & \frac{1}{|\phi(x)|} < \frac{1}{a^{(n-1)/n}}
\end{aligned} \tag{15}$$

Agora

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{e} \quad \frac{1}{|\phi(x)|} < \frac{1}{a^{(n-1)/n}}$$

$$\Rightarrow\quad |x - a| \cdot \frac{1}{|\phi(x)|} < \delta \cdot \frac{1}{a^{(n-1)/n}} \tag{16}$$

Nossa meta é obter $|x - a| \cdot \frac{1}{|\phi(x)|} < \epsilon$. Assim, a afirmativa (16) mostra que devemos exigir $\delta \cdot \dfrac{1}{a^{(n-1)/n}} \leqslant \epsilon$, isto é, $\delta \leqslant a^{(n-1)/n}\,\epsilon$. Assim, escolhemos $\delta = \min(a, a^{(n-1)/n}\epsilon)$. Com esse δ usamos o seguinte argumento:

$$
\begin{aligned}
& 0 < |x - a| < \delta \\
\Rightarrow\quad & |x - a| \cdot \frac{1}{|\phi(x)|} < \delta \cdot \frac{1}{|\phi(x)|} \\
\Rightarrow\quad & |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \delta \cdot \frac{1}{|\phi(x)|} \qquad \text{(de (13))}
\end{aligned}
$$

Mostramos em (15) que se $\delta \leqslant a$ e $0 < |x - a| < \delta$, então $\dfrac{1}{|\phi(x)|} < \dfrac{1}{a^{(n-1)/n}}$, isto é, $\delta \cdot \dfrac{1}{|\phi(x)|} < \delta \cdot \dfrac{1}{a^{(n-1)/n}}$. Continuando, teremos

$$
\begin{aligned}
& |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \delta \cdot \frac{1}{|\phi(x)|} \quad \text{e} \quad \delta \cdot \frac{1}{|\phi(x)|} < \delta \cdot \frac{1}{a^{(n-1)/n}} \\
\Rightarrow\quad & |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \delta \cdot \frac{1}{a^{(n-1)/n}} \\
\Rightarrow\quad & |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < a^{(n-1)/n}\epsilon \cdot \frac{1}{a^{(n-1)/n}} \qquad (\text{pois } \delta \leqslant a^{(n-1)/n}\,\epsilon) \\
\Rightarrow\quad & |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \epsilon
\end{aligned}
$$

Demonstramos que para todo $\epsilon > 0$, com $\delta = \min(a, a^{(n-1)/n}\epsilon)$, a seguinte afirmativa é verdadeira:

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \epsilon$$

Logo, provamos que $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, sendo a um número positivo. Portanto f é contínua em a, se $a > 0$. ■

Como fizemos com o Teorema de Limite 9, antes de enunciar novamente o Teorema de Limite 10 e apresentar a sua demonstração usando os Teoremas 2.7.1 e 2.6.5, daremos um exemplo mostrando como podemos usar esses teoremas para encontrar o limite da raiz enésima de uma dada função.

EXEMPLO 2 Usando os Teoremas 2.7.1 e 2.6.5, e não o Teorema de Limite 10 (limite da raiz enésima de uma função), encontre

$$\lim_{x \to 7} \sqrt[4]{3x - 5}$$

Solução Sejam h e f as funções definidas por

$$h(x) = \sqrt[4]{x} \quad \text{e} \quad f(x) = 3x - 5$$

A função composta $h \circ f$ está definida por $h(f(x)) = \sqrt[4]{f(x)}$. Agora

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 7} f(x) &= \lim_{x \to 7} (3x - 5) \\
&= 16
\end{aligned}
$$

Pelo Teorema 2.6.5, a função h é contínua em 16. Logo, podemos usar o Teorema 2.7.1 e obter

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 7}\sqrt[4]{3x-5} &= \lim_{x\to 7}\sqrt[4]{f(x)}\\ &= \lim_{x\to 7} h(f(x))\\ &= h(\lim_{x\to 7} f(x)) \qquad \text{(pelo Teorema 2.7.1)}\\ &= h(16)\\ &= 2\end{aligned}$$

2.2.10 TEOREMA DE LIMITE 10

Se n for um inteiro positivo e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, então

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

com a restrição de que se n for par, $L > 0$.

Prova Seja h a função definida por $h(x) = \sqrt[n]{x}$. Então, a função composta $h\circ f$ será definida por $h(f(x)) = \sqrt[n]{f(x)}$. Do Teorema 2.6.5, segue que h será contínua em L, se n for ímpar ou se n for par e $L > 0$. Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} &= \lim_{x\to a} h(f(x))\\ &= h(\lim_{x\to a} f(x)) \qquad \text{(pelo Teorema 2.7.1)}\\ &= h(L)\\ &= \sqrt[n]{L}\end{aligned}$$

■

EXERCÍCIOS 2.9

Nos Exercícios de 1 a 6, use os Teoremas 2.7.1 e 2.9.1, em vez do Teorema de Limite 9, para encontrar os limites.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4}{x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{8}{3x+2}$
3. $\lim\limits_{t\to -1}\dfrac{t+4}{t-2}$
4. $\lim\limits_{y\to 3}\dfrac{y-1}{y+5}$
5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x}{2x^2-3x+4}$
6. $\lim\limits_{t\to 4}\dfrac{2t}{t^2-4}$

Nos Exercícios de 7 a 12, use os Teoremas 2.7.1 e 2.6.5, em vez do Teorema de Limite 10, para encontrar os limites.

7. $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x^2-5}$
8. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{x-1}$
9. $\lim\limits_{y\to -4}\sqrt[3]{3y+4}$
10. $\lim\limits_{t\to -1/2}\sqrt{8t^3+6}$
11. $\lim\limits_{t\to 1}\sqrt[4]{t^2+5t+3}$
12. $\lim\limits_{y\to 0}\sqrt[3]{y^2-1}$
13. Se a função g for contínua num número a e a função f for descontínua em a, é possível que o quociente das duas funções f/g seja contínuo em a? Prove a sua resposta.
14. Se $f(x)$ for não-negativa para todo x em seu domínio, e $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^2$ existir e for positivo, prove que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \sqrt{\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^2}$.
15. Prove que se $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existir e for L, então $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|$ existe e é $|L|$.
16. Prove que se $f(x) = g(x)$ para todos os valores de x, exceto $x = a$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, se os limites existirem.
17. Prove que se $f(x) = g(x)$ para todos os valores de x, exceto $x = a$, então se $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ não existir, o $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ também não existirá. (*Sugestão:* mostre que a hipótese de que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ exista nos levará a uma contradição.)
18. Prove o Teorema 2.9.1, se $a < 0$.
19. Prove o Teorema 2.6.5 para o caso em que a é negativo ou nulo e n é ímpar.

2.10 TEOREMAS ADICIONAIS DE LIMITES DE FUNÇÕES *(Suplementar)*

Vamos discutir agora quatro teoremas que são necessários à demonstração de alguns teoremas importantes em secções posteriores. Após o enunciado de cada teorema será dada uma ilustração gráfica.

2.10.1 TEOREMA Se $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ existir e for positivo, então haverá um intervalo aberto contendo c, tal que $f(x) > 0$ para todo $x \neq c$ no intervalo.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Consideremos a função f definida por

$$f(x) = \frac{5}{2x - 1}$$

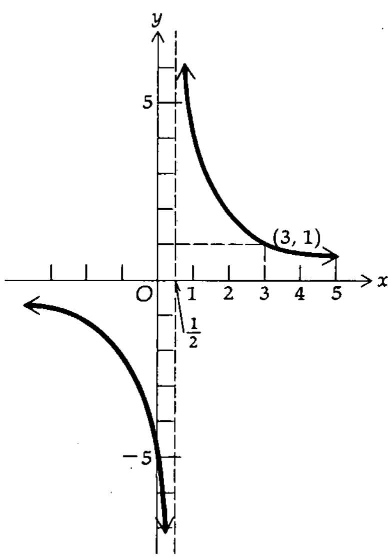


FIGURA 1

Um esboço do gráfico de f está na Figura 1. Como $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1$ e $1 > 0$, de acordo com o Teorema 2.10.1 haverá um intervalo aberto contendo 3, tal que $f(x) > 0$ para todo $x \neq 3$ nesse intervalo. Tal intervalo será, por exemplo, $(2, 4)$. Na verdade, qualquer intervalo aberto (a, b) para o qual $\frac{1}{2} \leqslant a < 3$ e $b > 3$, serve de exemplo. ◀

Prova do Teorema 2.10.1 Seja $L = \lim\limits_{x \to c} f(x)$. Por hipótese, $L > 0$. Aplicando a Definição 2.1.1 e tomando $\epsilon = \frac{1}{2}L$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } \; 0 < |x - c| < \delta \; \text{ então } \; |f(x) - L| < \tfrac{1}{2}L \tag{1}$$

Também, $|f(x) - L| < \frac{1}{2}L$ equivale a $-\frac{1}{2}L < f(x) - L < \frac{1}{2}L$ (consulte o Teorema 1.1.10), o que por sua vez equivale a

$$\tfrac{1}{2}L < f(x) < \tfrac{3}{2}L \tag{2}$$

Também, $0 < |x - c| < \delta$ equivale a $-\delta < x - c < \delta$, $x \neq c$, o que por sua vez equivale a

$$c - \delta < x < c + \delta \quad \text{mas} \quad x \neq c$$

$$\Leftrightarrow x \text{ está no intervalo aberto } (c - \delta, c + \delta) \text{ mas } x \neq c \tag{3}$$

Das afirmativas (2) e (3), podemos substituir (1) pela afirmativa:

se x estiver no intervalo aberto $(c - \delta, c + \delta)$, $x \neq c$, então $\frac{1}{2}L < f(x) < \frac{2}{3}L$.

Como $L > 0$, segue que $f(x) > 0$ para todo $x \neq c$ no intervalo aberto $(c - \delta, c + \delta)$. ■

EXEMPLO 1 Dada

$$f(x) = \frac{-3x}{2x - 7}$$

(a) Mostre que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) > 0$. (b) Verifique o Teorema 2.10.1 para essa função, encontrando um intervalo aberto que contenha 1 e no qual $f(x) > 0$ para todo $x \neq 1$ no intervalo.

Solução

(a) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{-3x}{2x - 7} = \frac{3}{5}$ e $\displaystyle \frac{3}{5} > 0$

(b) Os valores de x no intervalo aberto pedido devem ser tais que

$$\frac{-3x}{2x-7} > 0 \tag{4}$$

A desigualdade (4) será satisfeita quando ambos o numerador e o denominador forem positivos, ou quando ambos forem negativos. Há, portanto, dois casos a considerar:

Caso 1: $-3x > 0$ e $2x - 7 > 0$.

Isto é, $x < 0$ e $x > \frac{7}{2}$. Não existe valor de x que satisfaça ambas as desigualdades. Logo, o conjunto-solução do Caso 1 é vazio.

Caso 2: $-3x < 0$ e $2x - 7 < 0$.

Isto é, $x > 0$ e $x < \frac{7}{2}$. O conjunto-solução é o intervalo $(0, \frac{7}{2})$. Assim, a desigualdade (4) será satisfeita se x estiver no intervalo aberto $(0, \frac{7}{2})$.

Concluímos, então, que todo intervalo aberto (a, b), para o qual $0 \leqslant a < 1$ e $1 < b \leqslant \frac{7}{2}$, será tal que conterá 1 e $f(x) > 0$ para $x \neq 1$, sendo x pertencente a ele. O intervalo $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ é um exemplo.

2.10.2 TEOREMA Se $\lim_{x \to c} f(x)$ existir e for negativo, existirá um intervalo aberto contendo c, tal que $f(x) < 0$ para todo $x \neq c$ no intervalo.

A demonstração desse teorema é similar à do Teorema 2.10.1 e será deixada como exercício (veja o Exercício 17).

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Seja

$$g(x) = \frac{6-x}{3-2x}$$

A Figura 2 mostra um esboço do gráfico de $g \cdot \lim_{x \to 2} g(x) = -4$ e $-4 < 0$; logo, pelo Teorema 2.10.2 existe um intervalo aberto contendo 2, tal que $g(x) < 0$ para todo $x \neq 2$ no intervalo. Como exemplo de tal intervalo temos $(\frac{3}{2}, 3)$. Qualquer intervalo aberto (a, b) para o qual $\frac{3}{2} \leqslant a < 2$ e $2 < b \leqslant 6$ será suficiente. ◀

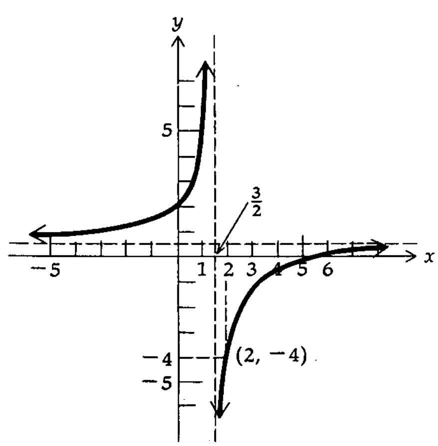


FIGURA 2

O exemplo a seguir ilustra o Teorema 2.10.2.

EXEMPLO 2 Dada

$$g(x) = \frac{1}{1-2x}$$

(a) Determine os valores de k, tais que $\lim_{x \to k} g(x) < 0$. (b) Ache todos os intervalos abertos (a, b) contendo um determinado valor de k que satisfaça a parte (a), tais que $g(x) < 0$ para todo $x \neq k$ em (a, b). (c) Faça um esboço do gráfico de g, e mostre no gráfico a interpretação geométrica dos resultados das partes (a) e (b).

Solução

(a) Se $k \neq \frac{1}{2}$,

$$\lim_{x \to k} \frac{1}{1-2x} = \frac{1}{1-2k}$$

Queremos encontrar os valores de k para os quais

$$\frac{1}{1-2k} < 0$$

Essa desigualdade será satisfeita se e somente se o denominador for negativo, isto é, se e somente se

$$1 - 2k < 0$$
$$-2k < -1$$
$$k > \tfrac{1}{2}$$

Logo, $\lim_{x \to k} g(x) < 0$, sempre que k estiver no intervalo $(\frac{1}{2}, +\infty)$.

(b) Como $g(x) < 0$ se e somente se $x > \frac{1}{2}$, os intervalos abertos requeridos (a, b) contendo k e tais que $g(x) < 0$ são aqueles para os quais $\frac{1}{2} \leqslant a < k$ e $b > k$.

(c) Um esboço do gráfico de g está na Figura 3, onde um valor de $k > \frac{1}{2}$ foi escolhido. Note que $\lim_{x \to k} g(x) = g(k)$ e assim sendo g é contínua em k. O ponto $(k, g(k))$ está no gráfico e $g(k) < 0$. Observe que para todos os valores de x em qualquer intervalo aberto (a, b), onde $\frac{1}{2} \leqslant a < k$ e $b > k$, o gráfico está no quarto quadrante, e assim $g(x) < 0$.

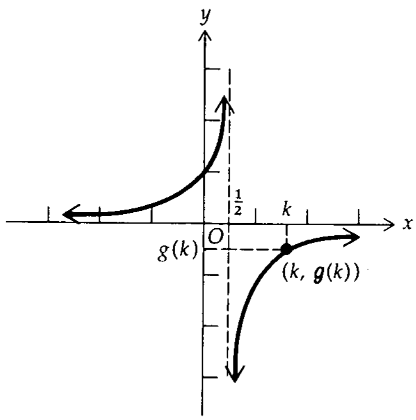


FIGURA 3

2.10.3 TEOREMA Suponha que a função f esteja definida em algum intervalo aberto I contendo c, exceto possivelmente em c. Suponha também que exista algum número M para o qual haja um $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - c| < \delta$, então $f(x) \leqslant M$. Logo, se $\lim_{x \to c} f(x)$ existir e for igual a L, $L \leqslant M$.

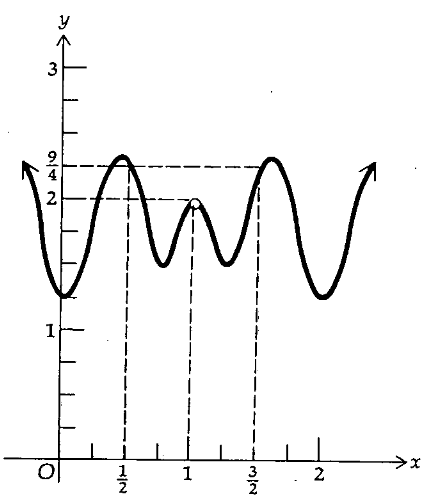


FIGURA 4

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** A Figura 4 mostra um esboço do gráfico de uma função f que satisfaz a hipótese do Teorema 2.10.3. Note pela figura, que $f(1)$ não está definida, mas f está definida no intervalo aberto $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, exceto em 1. Além disso, se $0 < |x - 1| < \frac{1}{2}$, então $f(x) \leqslant \frac{9}{4}$. Logo, segue do Teorema 2.10.3 que se $\lim_{x \to 1} f(x)$ existir e for L, então $L \leqslant \frac{9}{4}$. Da figura, observe que existe um L e é 2. ◀

Prova do Teorema 2.10.3 Suporemos que $M < L$ e vamos mostrar que essa hipótese leva a uma contradição. Se $M < L$, existirá algum $\epsilon > 0$ tal que $M + \epsilon = L$. Como $\lim_{x \to c} f(x) = L$, existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - c| < \delta_1 \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{se } 0 < |x - c| < \delta_1 \text{ então } L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$$

Substituindo L por $M + \epsilon$, segue que existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - c| < \delta_1 \text{ então } (M + \epsilon) - \epsilon < f(x)$$

$$\Leftrightarrow \text{se } 0 < |x - c| < \delta_1 \text{ então } M < f(x) \tag{5}$$

Mas, por hipótese, existe um δ tal que

$$\text{se } 0 < |x - c| < \delta \text{ então } f(x) \leqslant M \tag{6}$$

As afirmativas (5) e (6) são contraditórias. Logo, nossa hipótese de que $M < L$ é falsa. Portanto, $L \leqslant M$. ■

2.10.4 TEOREMA Suponha que a função f esteja definida em algum intervalo I contendo c, exceto possivelmente em c. Suponha também que exista algum número M para o qual haja um $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - c| < \delta$, então $f(x) \geqslant M$. Assim, se $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ existir e for igual a L, $L \geqslant M$.

A demonstração será deixada como exercício (veja o Exercício 18).

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** A Figura 4 também ilustra o Teorema 2.10.4. Na figura, observe que se $0 < |x - 1| < \frac{1}{2}$, então $f(x) \geqslant \frac{3}{2}$; e, como f está definida no intervalo aberto $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, exceto em 1, conforme estabelecido previamente, o Teorema 2.10.4 afirma que se $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ existir e for L, então $L \geqslant \frac{3}{2}$. ◀

EXERCÍCIOS 2.10

Nos Exercícios de 1 a 4, são dados uma função f e um número c. (a) Mostre que $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$; (b) verifique o Teorema 2.10.1 para a função f, encontrando um intervalo aberto contendo c, tal que $f(x) > 0$ para todo $x \neq c$ no intervalo.

1. $f(x) = \dfrac{5}{2x + 4}$; $c = 3$ **2.** $f(x) = \dfrac{7}{2x - 1}$; $c = 4$

3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$; $c = 1$ **4.** $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$; $c = -1$

Nos Exercícios de 5 a 8, são dados uma função g e um número c. (a) Mostre que $\lim\limits_{x \to c} g(x) < 0$; (b) verifique o Teorema 2.10.2 para a função g, encontrando um intervalo aberto contendo c, tal que $g(x) < 0$ para todo $x \neq c$ no intervalo.

5. $g(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$; $c = -3$ **6.** $g(x) = \dfrac{2 - 7x + 3x^2}{2 - x}$; $c = 2$

7. $g(x) = \dfrac{2 - \sqrt{4 + x}}{x}$; $c = 0$ **8.** $g(x) = \dfrac{\sqrt{x + 1} - 2}{3 - x}$; $c = 3$

Nos Exercícios 9 e 10, uma função f é dada. (a) Determine os valores de k tais que $\lim\limits_{x \to k} f(x) > 0$. (b) Ache todos os intervalos abertos (a, b) contendo um valor particular de k que satisfaçam a parte (a) tais que $f(x) < 0$ para todo $x \neq k$ em (a, b). (c) Faça um esboço do gráfico de f e mostre no gráfico a interpretação geométrica dos resultados das partes (a) e (b).

9. $f(x) = \dfrac{3x}{x + 1}$

10. $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 4x - 5}$

Nos Exercícios 11 e 12 é dada uma função g. (a) Determine os valores de k tais que $\lim\limits_{x \to k} g(x) < 0$. (b) Ache todos os intervalos abertos (a, b) que contêm um determinado valor de k que satisfaça a parte (a) tais que $g(x) < 0$ para todo $x \neq k$ em (a, b). (c) Faça um esboço do gráfico de g e mostre no gráfico a interpretação geométrica dos resultados das partes (a) e (b).

11. $g(x) = \dfrac{2x^2 + x - 6}{2x^2 + 11x + 14}$ **12.** $g(x) = 2 - \sqrt{x - 1}$

13. Faça um esboço do gráfico de uma função f satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.10.3 para a qual $f(2)$ não é definida. A função f está definida no intervalo aberto (1, 3), exceto em 2. Além disso, seja $f(x) \leqslant 5$ se $0 < |x - 2| < 1$ e seja $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ igual ao número L. Mostre, na figura, que $L \leqslant 5$.

14. Faça um esboço do gráfico de uma função f satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.10.3 para a qual $f(0)$ não é definida. A função f está definida no intervalo aberto $(-2, 2)$, exceto em 0. Além disso, seja $f(x) \leqslant 3$ se $0 < |x| < 2$ e seja $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ igual a um número L. Mostre na figura que $L \leqslant 3$.

15. Faça um esboço do gráfico de uma função satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.10.4 para a qual $f(0)$ não é definida. A função f está definida no intervalo aberto $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, exceto em 0. Além disso, seja $f(x) \geqslant 2$ se $0 < |x| < \frac{1}{2}$ e seja $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ igual ao número L. Mostre na figura que $L \geqslant 2$.

16. Faça um esboço do gráfico de uma função f satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.10.4 para a qual $f(1)$ não é definida. A função f está definida no intervalo aberto $(\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$, exceto em 1. Além disso, seja $f(x) \geqslant 0$, se $0 < |x - 1| < \frac{1}{4}$ e seja $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ igual ao número L. Mostre na figura que $L \geqslant 0$.

17. Prove o Teorema 2.10.2. **18.** Prove o Teorema 2.10.4.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 2

Nos Exercícios de 1 a 8, calcule o limite e, quando aplicável, indique o teorema de limite usado.

1. $\lim_{x \to 2} (3x^2 - 4x + 5)$
2. $\lim_{h \to 1} \frac{h^2 - 4}{3h^3 + 6}$
3. $\lim_{z \to -3} \frac{z^2 - 9}{z + 3}$
4. $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 5x - 14}$
5. $\lim_{x \to 1/2} \sqrt[3]{\frac{4x^2 + 4x - 3}{4x^2 - 1}}$
6. $\lim_{y \to -4} \sqrt{\frac{5y + 4}{y - 5}}$
7. $\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{9 - t} - 3}{t}$
8. $\lim_{t \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 + t}}{t}$

Nos Exercícios de 9 a 18, estabeleça o limite usando a Definição 2.1.1; isto é, para qualquer $\epsilon > 0$, ache um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \epsilon$.

9. $\lim_{x \to 3} (2x - 5) = 1$
10. $\lim_{x \to -2} (8 - 3x) = 14$
11. $\lim_{x \to -1} (3x + 8) = 5$
12. $\lim_{x \to 5} (4x - 11) = 9$
13. $\lim_{x \to -4} x^2 = 16$
14. $\lim_{x \to 1/2} x^2 = \frac{1}{4}$
15. $\lim_{x \to 2} (x^2 - 3x) = -2$
16. $\lim_{x \to 3} (2x^2 - x - 6) = 9$
17. $\lim_{x \to -3/4} \frac{16x^2 - 9}{4x + 3} = -6$
18. $\lim_{x \to 1/3} \frac{1 - 9x^2}{1 - 3x} = 2$

Nos Exercícios de 19 a 48, ache o limite, se existir.

19. $\lim_{x \to -1} \frac{2x^2 - x - 3}{3x^2 + 8x + 5}$
20. $\lim_{y \to 3} \sqrt{\frac{y - 3}{y^3 - 27}}$
21. $\lim_{x \to 3} f(x)$ se $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leqslant 3 \\ x + 5 & \text{se } 3 < x \end{cases}$
22. $\lim_{x \to 1/3} (|3x - 1| - 5)$
23. $\lim_{x \to 9} \frac{2\sqrt{x} - 6}{x - 9}$
24. $\lim_{y \to 5^-} \frac{\sqrt{25 - y^2}}{y - 5}$
25. $\lim_{x \to -4^+} \frac{2x}{16 - x^2}$
26. $\lim_{s \to 7} \frac{5 - \sqrt{4 + 3s}}{7 - s}$
27. $\lim_{t \to 5} \frac{\sqrt{t - 4}}{t^2 - 10t + 25}$
28. $\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 5}{2x^3 - 3x^2}$
29. $\lim_{x \to 2^+} \frac{[\![x]\!] - 1}{[\![x]\!] - x}$
30. $\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x - 1} - 2}{x - 5}$
31. $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 4}$
32. $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x - 3}{5x^2 - x + 1}$
33. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 5}{2x - 4}$
34. $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{8x^3 + 7x - 2}{7x^3 + 3x^2 + 5x}\right)^2$
35. $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x})$
36. $\lim_{t \to +\infty} (\sqrt{t^2 + t} - \sqrt{t^2 + 4})$
37. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} 3x}$
38. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$
39. $\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5t}{\operatorname{sen} 2t}$
40. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}$
41. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x}$
42. $\lim_{t \to 0} \frac{4t}{\operatorname{tg} t}$
43. $\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{cosec} 3\theta}{\operatorname{cotg} \theta}$
44. $\lim_{x \to 8} \frac{\sqrt{7 + \sqrt[3]{x}} - 3}{x - 8}$
45. $\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt[3]{(t + a)^2} - \sqrt[3]{a^2}}{t}$
46. $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 - 3x}{2 \operatorname{sen} x}$
47. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{x^2}$ (*Sugestão:* escreva $\frac{\sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{x^2} = \frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x^2} + \frac{\sqrt[4]{x^4 + 1} - 1}{x^2}$.)
48. $\lim_{x \to 1^+} \frac{[\![x^2]\!] - [\![x]\!]^2}{x^2 - 1}$

Nos Exercícios de 49 a 54, ache as assíntotas horizontais e verticais e desenhe um esboço do gráfico da função.

49. $f(x) = \frac{x + 8}{x - 4}$
50. $f(x) = \frac{3x - 2}{x - 2}$
51. $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$
52. $f(x) = \frac{-2}{x^2 - x - 6}$
53. $f(x) = \frac{5x^2}{x^2 - 4}$
54. $h(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$

Nos Exercícios 55 e 56, ache as assíntotas horizontais e verticais e trace um esboço do gráfico da equação.

55. $xy - 3x + 4y = 0$
56. $xy - 5x - 3y + 2 = 0$

Nos Exercícios de 57 a 62 faça um esboço do gráfico da função; então, observando as quebras no gráfico, determine os valores da variável independente nos quais a função é descontínua e mostre, em cada caso de descontinuidade, por que a Definição 2.6.1 não é satisfeita.

57. $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + x - 2}$
58. $g(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$
59. $g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \leqslant -2 \\ x - 2 & \text{se } -2 < x \leqslant 2 \\ 2 - x & \text{se } 2 < x \end{cases}$
60. $F(x) = \begin{cases} |4 - x| & \text{se } x \neq 4 \\ -2 & \text{se } x = 4 \end{cases}$
61. $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \leqslant 1 \\ x^2 - 1 & \text{se } 1 < x \end{cases}$
62. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{se } x < 3 \\ 5 & \text{se } x = 3 \\ 9 - x^2 & \text{se } 3 \leqslant x \end{cases}$

Nos Exercícios de 63 a 68, defina $f \circ g$ e determine os números nos quais $f \circ g$ é contínua.

63. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 25 - x^2$

64. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 25$

65. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{3 - x}}$; $g(x) = |x|$

66. $f(x) = \sqrt{x + 1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x - 3}$

67. $f(x) = \operatorname{sgn} x$; $g(x) = x^2 - 1$

68. $f(x) = \operatorname{sgn} x$; $g(x) = x^2 - x$

Nos Exercícios de 69 a 72, determine o maior intervalo (ou união de intervalos) no qual a função $f \circ g$ do exercício indicado seja contínua.

69. Exercício 63.
70. Exercício 64.
71. Exercício 65.
72. Exercício 66.

Nos Exercícios 73 e 74, determine o maior intervalo (ou união de intervalos) no qual a função seja contínua.

73. $f(x) = \begin{cases} -x - 6 & \text{se } x < -4 \\ \sqrt{16 - x^2} & \text{se } -4 \leqslant x < 4 \\ x - 6 & \text{se } 4 \leqslant x \end{cases}$

74. $f(x) = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{x + 2}$

Nos Exercícios de 75 a 78, prove que a função é descontínua no número a. Então, determine se a descontinuidade é removível ou essencial. Se for removível, redefina f(a) de forma a remover a descontinuidade.

75. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 3x - 4}$; $a = -4$

76. $f(x) = \left\{\begin{matrix} 4 - x^2 & \text{se } x < 1 \\ 2x + 3 & \text{se } 1 \leqslant x \end{matrix}\right\}$; $a = 1$

77. $f(x) = \dfrac{|2x - 1|}{2x - 1}$; $a = \dfrac{1}{2}$

78. $f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{x + 4}}{x}$; $a = 0$

Nos Exercícios 79 e 80, use o teorema do "sanduíche" para determinar o limite.

79. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \left[(x - 1)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt[3]{x - 1}} \right]$

80. $\displaystyle\lim_{x \to 4} g(x)$ se $|g(x) + 5| < 3(4 - x)^2$ para todo x

Nos Exercícios 81 e 82, ache os valores das constantes a e b que tornam contínua a função f em $(-\infty, +\infty)$ e faça um esboço do gráfico de f.

81. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \leqslant 3 \\ ax + b & \text{se } 3 < x < 5 \\ x^2 + 2 & \text{se } 5 \leqslant x \end{cases}$

82. $f(x) = \begin{cases} 3x + 6a & \text{se } x < -3 \\ 3ax - 7b & \text{se } -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ x - 12b & \text{se } 3 < x \end{cases}$

83. Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ for inteiro} \\ 0 & \text{se } x \text{ não for inteiro} \end{cases}$$

(a) Faça um esboço do gráfico de f. (b) Para quais valores de a existe $\lim_{x \to a} f(x)$? (c) Em quais números f é contínua?

84. Faça um esboço do gráfico de uma função f que satisfaça as seguintes condições: f é contínua em $(-\infty, -2)$, $[-2, 1]$, $[1, 3]$, e $(3, +\infty)$; $\lim_{x \to -4} f(x) = 0$; $\lim_{x \to -2} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -2+} f(x) = 0$; $\lim_{x \to 0} f(x) = -3$; $\lim_{x \to 1-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 1+} f(x) = 2$; $\lim_{x \to 3-} f(x) = 4$; $\lim_{x \to 3+} f(x) = -1$; $\lim_{x \to 5} f(x) = 0$.

85. Trace um esboço do gráfico de f se $f(x) = [\![1 - x^2]\!]$ e $-2 \leqslant x \leqslant 2$. (a) O $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe? (b) f é contínua em 0?

86. Trace um esboço do gráfico de g se $g(x) = (x - 1)[\![x]\!]$ e $0 \leqslant x \leqslant 2$. (a) O $\lim_{x \to 1} g(x)$ existe? (b) g é contínua em 1?

87. Dê um exemplo de uma função para a qual $\lim_{x \to 0} |f(x)|$ existe, mas $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe.

88. Se a função g for contínua em a e f for contínua em $g(a)$, a função composta $f \circ g$ será contínua em a? Por quê?

Nos Exercícios 89 e 90, são dados uma função f e um intervalo fechado [a, b]. Verifique se o teorema do valor intermediário é aplicável para o valor dado de k e ache um número c tal que $f(c) = k$. Faça um esboço da curva e da reta $y = k$.

89. $f(x) = x^2 + 3$; $[a, b] = [2, 4]$; $k = 10$

90. $f(x) = -\sqrt{16 - x^2}$; $[a, b] = [0, 4]$; $k = -1$

91. (a) Prove que se $\lim_{h \to 0} f(x + h) = f(x)$, então

$$\lim_{h \to 0} f(x + h) = \lim_{h \to 0} f(x - h)$$

(b) Mostre que o inverso do teorema em (2) não é verdadeiro, dando exemplo de uma função para a qual $\lim_{h \to 0} f(x + h) = \lim_{h \to 0} f(x - h)$, mas $\lim_{h \to 0} f(x + h) \neq f(x)$.

92. Dê exemplo de uma função f que seja descontínua em 1, para a qual (a) $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe, mas $f(1)$ não existe; (b) $f(1)$ existe, mas $f(x)$ não existe; (c) $\lim_{x \to 1} f(x)$ e $f(1)$ ambos existem, mas não são iguais.

93. Se o domínio de f for o conjunto de todos os números reais e se f for contínua em 0, prove que se $f(a + b) = f(a) + f(b)$ para todo a e b, então f será contínua em todo número.

94. Se o domínio de f for o conjunto de todos os números reais e se f for contínua em 0, prove que se $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$ para todo a e b, então f será contínua em todo número.

Os Exercícios de 95 a 98 referem-se à Secção Suplementar 2.9. Nos Exercícios 95 e 96, use os Teoremas de 2.7.1 a 2.9.1, mas não o Teorema 9 (o limite de um quociente), para encontrar o limite.

95. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{5 - 3x}{3 - x}$

96. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{5x - 3}{x^2 - x + 5}$

Nos Exercícios 97 e 98, use os Teoremas 2.7.1 e 2.6.5, mas não o Teorema 10 (o limite da enésima raiz), para encontrar o limite.

97. $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{2x^2 - 9}$

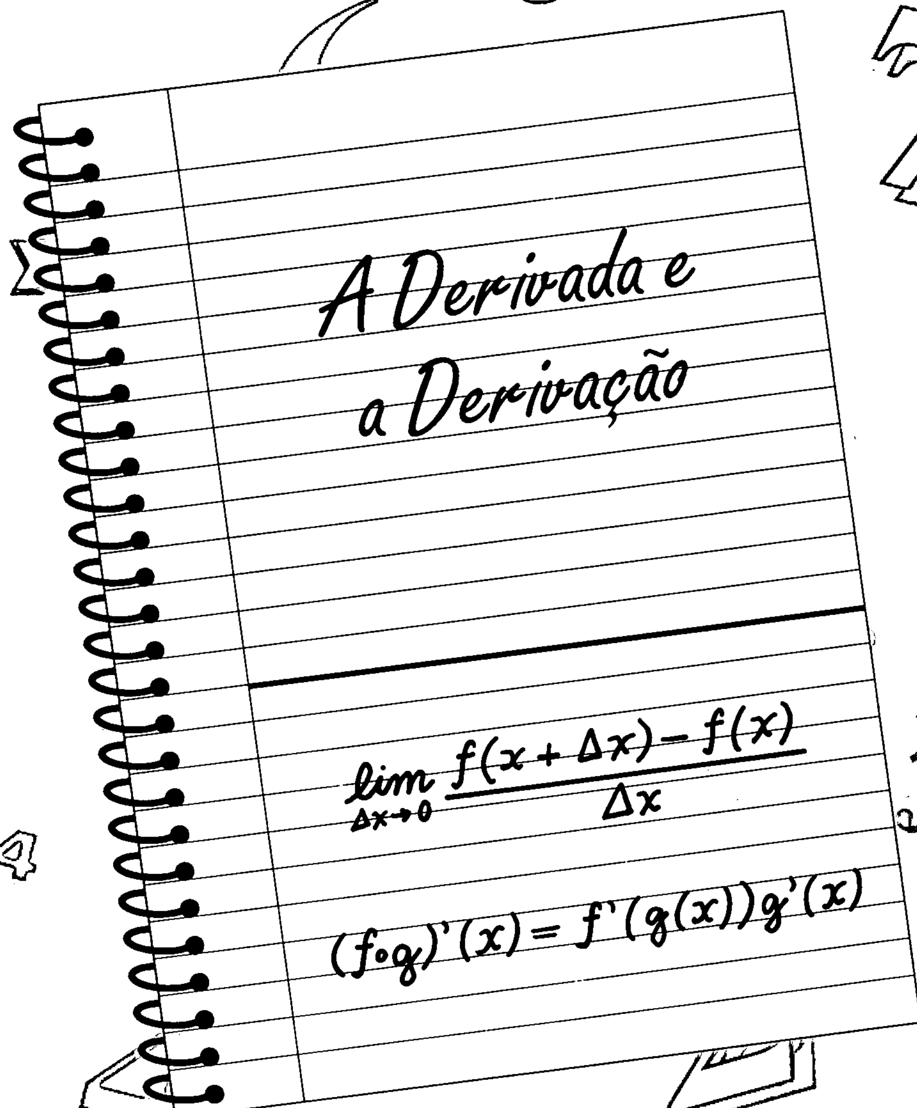
98. $\lim\limits_{x \to -4} \sqrt[3]{7 - 5x}$

Os Exercícios 99 e 100 referem-se à Secção Suplementar 2.10.

99. Dada $f(x) = \dfrac{4x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 6}$. (a) Mostre que $\lim\limits_{x \to -3/2} f(x) < 0$, (b) verifique o Teorema 2.10.2 para a função f, encontrando um intervalo aberto contendo $-\frac{3}{2}$ tal que $f(x) < 0$ para todo $x \neq -\frac{3}{2}$ no intervalo.

100. Dada $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 5}$. (a) Determine os valores de k tais que $\lim\limits_{x \to k} f(x) > 0$. (b) Ache todos os intervalos abertos (a, b) contendo um valor de k que satisfaça a parte (a) tal que $f(x) > 0$ para todo $x \neq k$ em (a, b). (c) Faça um esboço do gráfico de f e mostre no gráfico a interpretação geométrica dos resultados das partes (a) e (b).

TRÊS



Introduzimos a *derivada* na Secção 3.1, considerando primeiro sua interpretação geométrica como a inclinação de uma reta tangente a uma curva. Uma função que tenha uma derivada será denominada *derivável*, e na Secção 3.2 discutiremos a relação entre diferenciabilidade e continuidade. A derivada é calculada pela operação de *derivação* e os teoremas que auxiliam o cálculo de funções algébricas são enunciados e provados na Secção 3.3.

Na Secção 3.4 interpretamos a derivada como uma taxa de variação. Essa interpretação mostra a sua importância em diversos campos. Por exemplo, em Física, a velocidade no movimento retilíneo é definida em termos de uma derivada, pois é a medida da taxa de variação da distância com relação ao tempo. A taxa de crescimento de bactérias é uma aplicação da derivada em Biologia.

A taxa de variação de uma reação química é um tópico de interesse para um químico. Os economistas estão preocupados com conceitos marginais tais como a receita marginal. o custo marginal e o lucro marginal, que são taxas de variação.

A derivação de funções trigonométricas será discutida na Secção 3.5, e na Secção 3.6 estabeleceremos e provaremos a *regra da cadeia*, um recurso poderoso que usaremos para derivar funções compostas. Aplicamos a regra da cadeia na Secção 3.7 para obter a fórmula da qual resulta a derivada da função potência para expoentes racionais; na Secção 3.8, para derivar funções definidas implicitamente; e na Secção 3.9, para resolver problemas envolvendo taxas relacionadas. Derivadas de ordem superior e suas aplicações, em Física, ao movimento retilíneo serão tratadas na Secção 3.10.

3.1 A RETA TANGENTE E A DERIVADA

FIGURA 1

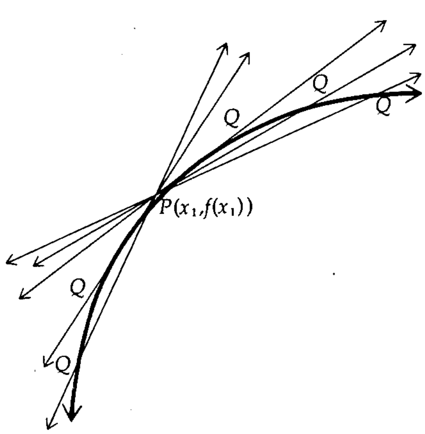


FIGURA 2

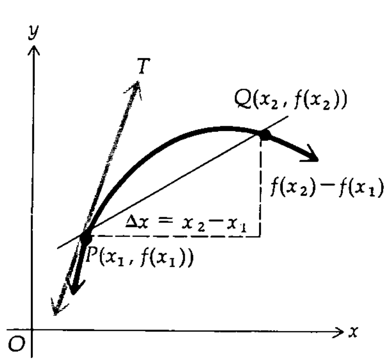


FIGURA 3

Muitos dos problemas importantes de Cálculo envolvem a determinação da reta tangente a uma curva dada, em um determinado ponto dela. Para uma circunferência, sabemos da Geometria Plana que a reta tangente em um ponto seu é a reta que tem com ela um único ponto comum. Essa definição não é válida para uma curva em geral. Por exemplo, na Figura 1 a reta que queremos que seja a tangente à curva no ponto P intercepta a curva em outro ponto Q. Para chegar a uma definição adequada de reta tangente ao gráfico de uma função em um de seus pontos, começamos pensando em definir a inclinação da reta tangente no ponto. Então, a tangente é determinada por sua inclinação e pelo ponto de tangência.

Consideremos a função f contínua em x_1. Queremos definir a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em $P(x_1, f(x_1))$. Seja I o intervalo aberto que contém x_1 e no qual f está definida. Seja $Q(x_2, f(x_2))$ outro ponto do gráfico de f, tal que x_2 também esteja em I. Tracemos uma reta através de P e Q. Qualquer reta que passe por dois pontos de uma curva é chamada de **reta secante**, assim, a reta através de P e Q é uma reta secante. A Figura 2 mostra retas secantes para vários valores de x_2. A Figura 3 mostra uma determinada reta secante, onde Q está à direita de P. No entanto Q pode estar de qualquer lado de P, conforme mostra a Figura 2.

Vamos denotar a diferença entre as abscissas de Q e de P por Δx (lemos "delta x"), assim

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Observe que Δx denota uma variação nos valores de x, quando ele muda de x_1 para x_2 e pode ser positiva ou negativa. Essa variação é chamada de *incremento de* x. Tome cuidado com o símbolo Δx, para o incremento de x; ele não deve ser interpretado como o "produto de Δ por x".

Retornando à reta secante PQ da Figura 3, sua inclinação é dada por

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$$

desde que a reta PQ não seja vertical. Como $x_2 = x_1 + \Delta x$, a inclinação de PQ pode ser escrita como

$$m_{PQ} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Vamos agora considerar o ponto P como fixo e o ponto Q como móvel, ao longo da curva em direção a P, isto é, Q tende a P. Isto equivale a dizer que Δx tende a zero. Quando isso ocorre, a reta secante gira em torno do ponto fixo P. Se a reta secante tiver uma posição limite desejaremos essa posição limite como sendo a da reta tangente ao gráfico f em P. Assim, queremos que a inclinação da reta tangente ao gráfico em P seja o limite de m_{PQ} quando Δx tende a zero, se esse limite existir. Se $\lim\limits_{\Delta x \to 0} m_{PQ}$ for $+\infty$ ou $-\infty$, então, à medida que Δx tende a zero, a reta PQ aproxima-se da reta por P, que é paralela ao eixo y. Nesse caso, queremos que a reta tangente ao gráfico em P seja a reta $x = x_1$. Toda essa discussão leva-nos à seguinte definição:

3.1.1 DEFINIÇÃO Suponhamos que a função f seja contínua em x_1. A **reta tangente** ao gráfico de f no ponto $P(x_1, f(x_1))$ é

(i) a reta por P tendo inclinação $m(x_1)$, dada por

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \tag{1}$$

se o limite existir;

(ii) a reta $x = x_1$ se

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \text{ for } +\infty \text{ ou } -\infty$$

e

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \text{ for } +\infty \text{ ou } -\infty$$

Se nem (i) nem (ii) da Definição 3.1.1 forem verdadeiras, então não existirá reta tangente ao gráfico de f, no ponto $P(x_1, f(x_1))$.

EXEMPLO 1 Dada a parábola $y = x^2$, ache a inclinação da reta secante, nos quesitos de (a) até (c) pelos dois pontos: (a) (2, 4), (3, 9); (b) (2, 4), (2,1, 4,41); (c) (2, 4), (2,01, 4,0401). (d) Ache a inclinação da reta tangente à parábola no ponto (2, 4). (e) Faça um esboço do gráfico e mostre um segmento da reta tangente em (2, 4).

Solução Sejam m_a, m_b e m_c as inclinações das retas secantes em (a), (b) e (c), respectivamente.

(a) $m_a = \dfrac{9-4}{3-2} = 5$

(b) $m_b = \dfrac{4,41 - 4}{2,1 - 2} = \dfrac{0,41}{0,1} = 4,1$

(c) $m_c = \dfrac{4,0401 - 4}{2,01 - 2} = \dfrac{0,0401}{0,01} = 4,01$

(d) Seja $f(x) = x^2$. De (1) temos

$$m(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 4}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 4}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\,\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x)$$
$$= 4$$

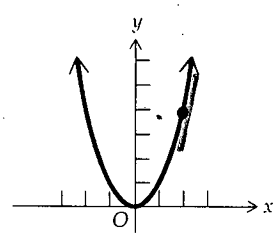


FIGURA 4

(e) A Figura 4 mostra um esboço do gráfico e um segmento da reta tangente em (2, 4).

EXEMPLO 2 Ache a inclinação da reta tangente ao gráfico da função definida por $y = x^3 - 3x + 4$ no ponto (x_1, y_1).

Solução

$$f(x_1) = x_1^{\ 3} - 3x_1 + 4$$
$$f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^3 - 3(x_1 + \Delta x) + 4$$

De (1),

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1 + \Delta x)^3 - 3(x_1 + \Delta x) + 4 - (x_1^{\ 3} - 3x_1 + 4)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^{\ 3} + 3x_1^{\ 2}\,\Delta x + 3x_1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3x_1 - 3\,\Delta x + 4 - x_1^{\ 3} + 3x_1 - 4}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x_1^{\ 2}\,\Delta x + 3x_1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3\,\Delta x}{\Delta x}$$

Como $\Delta x \neq 0$, podemos dividir o numerador e o denominador por Δx e obter

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} [3x_1^{\ 2} + 3x_1\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 3]$$
$$m(x_1) = 3x_1^{\ 2} - 3 \tag{2}$$

Tabela 1

x	y	m
0	4	-3
1	2	0
2	6	9
-1	6	0
-2	2	9

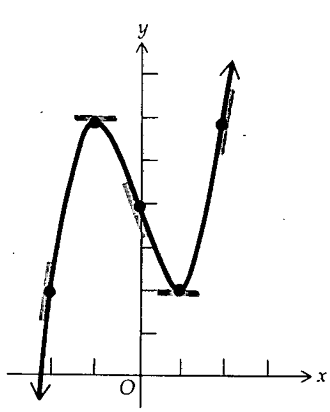


FIGURA 5

Para fazer um esboço do gráfico da função do Exemplo 2, colocamos pontos no gráfico e um segmento da reta tangente em alguns deles. Os valores de x são tomados arbitrariamente e o valor funcional correspondente é calculado pela equação dada, o valor de m é calculado de (2). Os resultados são apresentados na Tabela 1 e um esboço do gráfico aparece na Figura 5. É importante determinar os pontos onde o gráfico possui tangente horizontal. Como uma reta horizontal possui inclinação zero, esses pontos são encontrados ao resolvermos em x_1 à equação $m(x_1) = 0$. Fazendo os cálculos para esse exemplo temos $3x_1^2 - 3 = 0$, resultando $x_1 = \pm 1$. Assim sendo, nos pontos com abscissas -1 e 1 a reta tangente é paralela ao eixo x.

EXEMPLO 3 Ache uma equação da reta tangente à curva do Exemplo 2 no ponto (2, 6).

Solução Como a inclinação da reta tangente em qualquer ponto (x_1, y_1) é

$$m(x_1) = 3x_1^{\ 2} - 3$$

a inclinação da reta tangente no ponto (2, 6) é $m(2) = 9$. Logo, uma equação da reta pedida na forma ponto-inclinação é

$$y - 6 = 9(x - 2)$$

$$9x - y - 12 = 0$$

3.1.2 DEFINIÇÃO A **reta normal** a um gráfico em um dado ponto é a reta perpendicular à reta tangente naquele ponto.

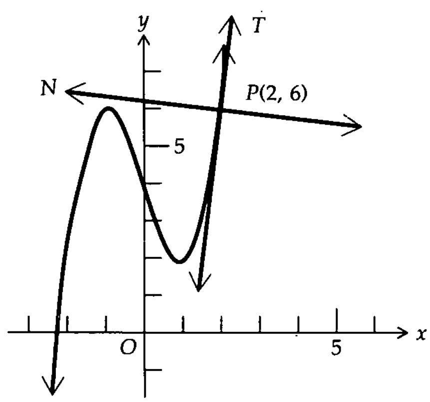


FIGURA 6

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** A reta normal ao gráfico do Exemplo 2 no ponto (2, 6) é perpendicular à reta tangente naquele ponto. Do exemplo 3, a inclinação da reta tangente em (2, 6) é 9. Portanto, a inclinação da reta normal a (2, 6) é $-\frac{1}{9}$, e uma equação dessa reta normal é

$$y - 6 = -\tfrac{1}{9}(x - 2)$$

$$9y - 54 = -x + 2$$

$$x + 9y - 56 = 0$$

A Figura 6 mostra o gráfico e as retas tangente e normal em (2, 6). ◀

O tipo de limite em (1) usado para definir a inclinação da reta tangente é um dos mais importantes em Cálculo.

3.1.3 DEFINIÇÃO A **derivada** de uma função f é a função denotada por f', tal que seu valor em qualquer número x do domínio de f seja dado por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (3)$$

se esse limite existir.

Se x_1 for um determinado número no domínio de f, então

$$\boxed{f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}} \qquad (4)$$

Se esse limite existir. Comparando as fórmulas (1) e (4), note que a inclinação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$ é precisamente a derivada de f calculada em x_1.

EXEMPLO 4 Ache a derivada de f se

$$f(x) = 3x^2 + 12$$

Solução Se x for qualquer número do domínio de f, então de (3),

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3(x + \Delta x)^2 + 12] - (3x^2 + 12)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 12 - 3x^2 - 12}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\,\Delta x) \\
&= 6x
\end{aligned}$$

Logo, a derivada de f é a função f', definida por $f'(x) = 6x$. O domínio de f' é o conjunto de todos os números reais, sendo igual ao domínio de f.

Considere agora a fórmula (4), que é

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Nessa fórmula seja

$$x_1 + \Delta x = x \tag{5}$$

Então

$$\text{“}\Delta x \to 0\text{” é equivalente a “}x \to x_1\text{”.} \tag{6}$$

De (4), (5) e (6) obtemos a seguinte fórmula para $f'(x_1)$:

$$\boxed{f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}} \tag{7}$$

se o limite existir. A fórmula (7) é uma alternativa para (4) no cálculo de $f'(x_1)$.

EXEMPLO 5 Para a função f do Exemplo 4, ache a derivada de f em 2 de três maneiras: (a) Aplicando a fórmula (4); (b) aplicando a fórmula (7); (c) substituindo 2 por x na expressão de $f'(x)$ no Exemplo 4.

Solução

(a) $f(x) = 3x^2 + 12$. Da fórmula (4),

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3(2 + \Delta x)^2 + 12] - [3(2)^2 + 12]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12 + 12\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 12 - 12 - 12}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12\,\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (12 + 3\,\Delta x) \\
&= 12
\end{aligned}
$$

(b) Da fórmula (7),

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\
&= \lim_{x \to 2} \frac{(3x^2 + 12) - 24}{x - 2} \\
&= \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 12}{x - 2} \\
&= 3 \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} \\
&= 3 \lim_{x \to 2} (x + 2) \\
&= 12
\end{aligned}
$$

(c) Como, do Exemplo 4, $f'(x) = 6x$, então $f'(2) = 12$.

O uso do símbolo f' para a derivada da função f foi introduzido pelo matemático francês Joseph Louis Lagrange (1736-1813), no século dezoito. Essa notação indica que a função f' é derivada da função f e seu valor em x é $f'(x)$.

Se (x, y) for um ponto do gráfico de f, então $y = f(x)$ e y' também será usado como notação para a derivada de $f(x)$. Com a função f definida pela equação $y = f(x)$, podemos expressar

$$\boxed{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)} \tag{8}$$

onde Δy é chamado de *incremento* de y e denota a variação no valor da função quando x varia de Δx. Usando (8) e escrevendo $\dfrac{dy}{dx}$ em lugar de $f'(x)$, a fórmula (3) torna-se

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

O símbolo $\frac{dy}{dx}$ como notação para a derivada foi introduzido pelo matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). No século dezessete Leibniz e Sir Isaac Newton (1642-1727), trabalhando independentemente, introduziram quase ao mesmo tempo o conceito de derivada. É provável que Leibniz considerasse dx e dy como pequenas variações nas variáveis x e y e a derivada de y em relação a x como a razão de dy por dx quando dy e dx tornam-se pequenos. O conceito de Limite como concebemos atualmente não era conhecido por Leibniz.

Na notação de Lagrange, o valor da derivada em $x = x_1$ é indicado por $f'(x_1)$. Com a notação de Leibniz escreveríamos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_1}$$

Você deve se lembrar que enquanto $\frac{dy}{dx}$ foi usado como notação para derivada, dy e dx não tiveram, neste livro, significado independente, embora mais adiante eles serão definidos em separado. Assim, por enquanto, $\frac{dy}{dx}$ é um símbolo para a derivada e não deve ser considerado como uma razão. Na verdade, $\frac{d}{dx}$ pode ser considerado como um operador (um símbolo para a operação de cálculo da derivada) e quando escrevemos $\frac{dy}{dx}$, isto significa $\frac{d}{dx}(y)$, ou seja, a derivada de y em relação a x.

EXEMPLO 6 Ache $\frac{dy}{dx}$ se

$$y = \sqrt{x-3}$$

Solução Temos $y = f(x)$, onde $f(x) = \sqrt{x-3}$.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x-3} - \sqrt{x-3}}{\Delta x}\end{aligned}$$

Para avaliar esse limite, racionalizamos o numerador.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x-3} - \sqrt{x-3})(\sqrt{x+\Delta x-3} + \sqrt{x-3})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x-3} + \sqrt{x-3})}\\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x-3) - (x-3)}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x-3} + \sqrt{x-3})}\\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x-3} + \sqrt{x-3})}\end{aligned}$$

O numerador e o denominador são divididos por Δx (desde que $\Delta x \neq 0$) para obter

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x - 3} + \sqrt{x - 3}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$

Duas outras notações para a derivada de uma função f são

$$\frac{d}{dx}[f(x)] \quad \text{e} \quad D_x[f(x)]$$

Cada uma dessas notações permite-nos indicar a função original na expressão para a derivada. Por exemplo, podemos escrever o resultado do Exemplo 6

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x-3}) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} \quad \text{ou} \quad D_x(\sqrt{x-3}) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$

EXEMPLO 7 Calcule

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)$$

Solução Queremos encontrar a derivada de $f(x)$ onde $f(x) = \dfrac{2+x}{3-x}$. Assim,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2+x}{3-x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{2 + x + \Delta x}{3 - x - \Delta x} - \dfrac{2+x}{3-x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3-x)(2+x+\Delta x) - (2+x)(3-x-\Delta x)}{\Delta x(3-x-\Delta x)(3-x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(6 + x - x^2 + 3\,\Delta x - x\,\Delta x) - (6 + x - x^2 - 2\,\Delta x - x\,\Delta x)}{\Delta x(3-x-\Delta x)(3-x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\,\Delta x}{\Delta x(3-x-\Delta x)(3-x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5}{(3-x-\Delta x)(3-x)}$$

$$= \frac{5}{(3-x)^2}$$

Naturalmente, se a função e as variáveis forem denotadas por outras letras que não f, x e y, as notações para derivada incorporarão essas letras. Por exemplo, se a função g estiver definida pela equação $s = g(t)$, então a derivada de g poderá ser indicada em cada uma das seguintes formas:

$$g'(t) \qquad \frac{ds}{dt} \qquad \frac{d}{dt}[g(t)] \qquad D_t[g(t)]$$

EXERCÍCIOS 3.1

Nos Exercícios de 1 a 6, ache a inclinação da reta tangente ao gráfico no ponto (x_1, y_1). Faça uma tabela de valores de x, y e m no intervalo fechado [a, b] e inclua na tabela todos os pontos onde o gráfico tem uma tangente horizontal. Faça um esboço do gráfico e mostre um segmento da reta tangente em cada ponto colocado no gráfico.

1. $y = 9 - x^2$; $[a, b] = [-3, 3]$
2. $y = x^2 + 4$; $[a, b] = [-2, 2]$
3. $y = -2x^2 + 4x$; $[a, b] = [-1, 3]$
4. $y = x^2 - 6x + 9$; $[a, b] = [1, 5]$
5. $y = x^3 + 1$; $[a, b] = [-2, 2]$
6. $y = 1 - x^3$; $[a, b] = [-2, 2]$

Nos Exercícios de 7 a 12, ache a inclinação da reta tangente ao gráfico no ponto (x_1, y_1). Faça uma tabela dos valores de x, y e m nos vários pontos do gráfico e inclua na tabela todos os pontos onde o gráfico tem uma tangente horizontal. Faça um esboço do gráfico.

7. $f(x) = 3x^2 - 12x + 8$
8. $f(x) = 7 - 6x - x^2$
9. $f(x) = \sqrt{4 - x}$
10. $f(x) = \sqrt{x + 1}$
11. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$
12. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 10$

Nos Exercícios de 13 a 20, ache uma equação da reta tangente à curva dada, no ponto indicado. Faça um esboço da curva com a reta tangente e a reta normal.

13. $y = x^2 - 4x - 5$; $(-2, 7)$
14. $y = x^2 - x + 2$; $(2, 4)$
15. $y = \frac{1}{8}x^3$; $(4, 8)$
16. $y = x^2 + 2x + 1$; $(1, 4)$
17. $y = \dfrac{6}{x}$; $(3, 2)$
18. $y = 2x - x^3$; $(-2, 4)$
19. $y = x^4 - 4x$; $(0, 0)$
20. $y = -\dfrac{8}{\sqrt{x}}$; $(4, -4)$

21. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 + 3$ que é paralela à reta $8x - y + 3 = 0$.
22. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = 3x^2 - 4$ que é paralela à reta $3x + y = 4$.
23. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = 2 - \frac{1}{3}x^2$ que é perpendicular à reta $x - y = 0$.
24. Ache uma equação de cada reta tangente à curva $y = x^3 - 3x$ que é perpendicular à reta $2x + 18y - 9 = 0$.

Nos Exercícios de 25 a 30, ache $f'(x)$ aplicando a fórmula (3).

25. $f(x) = 7x + 3$
26. $f(x) = 8 - 5x$
27. $f(x) = -4$
28. $f(x) = 3x^2 + 4$
29. $f(x) = 4 - 2x^2$
30. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

Nos Exercícios de 31 a 38, ache a derivada indicada.

31. $\dfrac{d}{dx}(8 - x^3)$
32. $\dfrac{d}{dx}(x^3)$
33. $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{x})$
34. $D_x\left(\dfrac{1}{x + 1}\right)$
35. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2x + 3}{3x - 2}\right)$
36. $D_x(\sqrt{3x + 5})$
37. $D_x\left(\dfrac{1}{x^2} - x\right)$
38. $D_x\left(\dfrac{3}{1 + x^2}\right)$

39. Dada: $f(x) = x^2$. (a) Use uma calculadora para tabular valores de $\dfrac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$ quando Δx é 1, 0,5, 0,1, 0,01, 0,001 e Δx é -1, $-0{,}5$, $-0{,}1$, $-0{,}01$, $-0{,}001$. A que $\dfrac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$ parece tender quando Δx aproxima-se de 0? (b) Ache $f'(3)$ aplicando a fórmula (4). (c) Use uma calculadora para tabular valores de $\dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ quando x é 4, 3,5, 3,1, 3,01, 3,001 e x é 2, 2,5, 2,9, 2,99, 2,999. A que $\dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ parece estar tendendo quando x aproxima-se de 3? (d) Ache $f'(3)$ aplicando a fórmula (7).
40. Dada: $f(x) = x^3$. (a) Use uma calculadora para tabular valores de $\dfrac{f(2 + x) - f(2)}{\Delta x}$ quando Δx é 1, 0,5, 0,1, 0,01, 0,001 e Δx é -1, $-0{,}5$, $-0{,}1$, $-0{,}01$, $-0{,}001$. A que $\dfrac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$ parece tender quando Δx aproxima-se de zero? (b) Encontre $f'(2)$ aplicando a fórmula (4). (c) Use uma calculadora para tabular valores de $\dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ quando x é 3, 2,5, 2,1, 2,01, 2,001 e x é 1, 1,5, 1,9, 1,99, 1,999. A que $\dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ parece tender quando x aproxima-se de 2? (d) Ache $f'(2)$ aplicando a fórmula (7).
41. Dada: $f(x) = \sqrt{x - 3}$. (a) Use uma calculadora para tabular valores de $\dfrac{f(7 + \Delta x) - f(7)}{\Delta x}$ quando Δx é 1, 0,5, 0,1, 0,01, 0,001 e Δx é -1, $-0{,}5$, $-0{,}1$, $-0{,}01$, $-0{,}001$. A que $\dfrac{f(7 + \Delta x) - f(7)}{\Delta x}$ parece tender quando Δx aproxima-se de zero? (b) Encontre $f'(7)$ aplicando a fórmula (4). (c) Use uma calculadora para tabular valores de $\dfrac{f(x) - f(7)}{x - 7}$ quando x é 8, 7,5, 7,1, 7,01, 7,001 e x é 6, 6,5, 6,9, 6,99, 6,999. A que $\dfrac{f(x) - f(7)}{x - 7}$ parece tender quando x aproxima-se de 7? (d) Encontre $f'(7)$ aplicando a fórmula (7).
42. Dada: $f(x) = \dfrac{10}{x^2}$. (a) Use uma calculadora para tabular valores de $\dfrac{f(5 + \Delta x) - f(5)}{\Delta x}$ quando Δx é 1, 0,5, 0,1, 0,01, 0,001 e Δx é -1, $-0{,}5$, $-0{,}1$, $-0{,}01$, $-0{,}001$. A que $\dfrac{f(5 + \Delta x) - f(5)}{\Delta x}$ parece tender quando Δx aproxima-se de zero? (b) Ache $f'(5)$ aplicando a fórmula (4). (c) Use uma calculadora para tabular valores de $\dfrac{f(x) - f(5)}{x - 5}$ quando x é

6, 5,5, 5,1, 5,01, 5,001 e quando x é 4, 4,5, 4,9, 4,99, 4,999. A que $\dfrac{f(x) - f(5)}{x - 5}$ parece tender quando x aproxima-se de 5?

(d) Encontre $f(5)$ aplicando a fórmula (7).

Nos Exercícios de 43 a 46, ache $f'(a)$ aplicando a fórmula (4).

43. $f(x) = 4 - x^2$; $a = 5$

44. $f(x) = \dfrac{4}{5x}$; $a = 2$

45. $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$; $a = 4$

46. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 1$; $a = 4$

Nos Exercícios de 47 a 50, ache $f'(a)$ aplicando a fórmula (7).

47. $f(x) = 2 - x^3$; $a = -2$

48. $f(x) = x^2 - x + 4$; $a = 4$

49. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x + 3}}$; $a = 3$

50. $f(x) = \sqrt{1 + 9x}$; $a = 7$

Nos Exercícios de 51 a 56, ache $\dfrac{dy}{dx}$.

51. $y = \dfrac{4}{x^2} + 3x$

52. $y = \dfrac{4}{2x - 5}$

53. $y = \sqrt{2 - 7x}$

54. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$

55. $y = \sqrt[3]{x}$

56. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - x$

57. Se g é contínua em a e $f(x) = (x - a)g(x)$, ache $f'(a)$. (*Sugestão*: use a fórmula (7)).

58. Se g é contínua em a e $f(x) = (x^2 - a^2)g(x)$, ache $f'(a)$. (*Sugestão*: use a fórmula (7)).

59. Prove que não há reta que passe pelo ponto (1, 5) e seja tangente à curva $y = 4x^2$.

60. Prove que não há reta que passe pelo ponto (1, 2) e seja tangente à curva $y = 4 - x^2$.

61. Se

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

ache $f''(x)$ se $f(x) = ax^2 + bx$

62. Use a fórmula do Exercício 61 para encontrar $f''(x)$ se $f(x) = a/x$.

63. Se $f'(a)$ existe, prove que

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a - \Delta x)}{2\,\Delta x}$$

(*Sugestão*:
$f(a + \Delta x) - f(a - \Delta x) = f(a + \Delta x) - f(a) + f(a) - f(a - \Delta x)$.)

64. Seja f uma função cujo domínio seja o conjunto de todos os números reais e $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$ para todo a e b. Além disso, suponha que $f(0) = 1$ e $f(0)$ exista. Prove que $f(x)$ existe para todo x e que $f'(x) = f'(0) \cdot f'(x)$.

3.2 DERIVABILIDADE E CONTINUIDADE

O processo de cálculo da derivada é chamada de **derivação**. Assim, a derivação é a operação de derivar uma função f' de uma função f.

Se uma função possui uma derivada em x_1, a função será **derivável** em x_1. Isto é, a função f será derivável em x_1 se $f'(x_1)$ existir. Uma função será **derivável em um intervalo aberto** se ela for derivável em todo número no intervalo aberto.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** No Exemplo 4 da Secção 3.1, $f(x) = 3x^2 + 12$ e $f'(x) = 6x$. Como o domínio de f é o conjunto de todos os números reais, e $6x$ existe se x for um número real qualquer, f é uma função derivável. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Seja g a função definida por $g(x) = \sqrt{x - 3}$. O domínio de g é $[3, +\infty)$. Do resultado do Exemplo 6 da Secção 3.1,

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - 3}}$$

Como $g'(3)$ não existe, g não é derivável, em 3. No entanto, g é derivável em qualquer outro número em seu domínio. Portanto, g será derivável no intervalo aberto $[3, +\infty)$. ◀

Iniciaremos uma discussão sobre derivabilidade e continuidade com o exemplo a seguir.

EXEMPLO 1 Seja

$$f(x) = x^{1/3}$$

(a) Ache $f'(x)$. (b) Mostre que $f'(0)$ não existe, mesmo que f seja contínua nesse número. (c) Faça um esboço do gráfico de f.

Solução

(a) Da Definição 3.1.1

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^{1/3} - x^{1/3}}{\Delta x} \tag{1}$$

Racionalizemos o numerador para obter um fator comum Δx no numerador e no denominador; disto resulta

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x + \Delta x)^{1/3} - x^{1/3}][(x + \Delta x)^{2/3} + (x + \Delta x)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}]}{\Delta x[(x + \Delta x)^{2/3} + (x + \Delta x)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}]} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x[(x + \Delta x)^{2/3} + (x + \Delta x)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}]} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(x + \Delta x)^{2/3} + (x + \Delta x)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}} \\ &= \frac{1}{x^{2/3} + x^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}} \\ &= \frac{1}{3x^{2/3}} \end{aligned}$$

(b) Observe que $\frac{1}{3x^{2/3}}$ não é definido em $x = 0$. Se (1) for usado para calcular $f'(0)$, temos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(0 + \Delta x)^{1/3} - 0^{1/3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\Delta x)^{2/3}}$$

e esse limite não existe. Então, f não é derivável em zero. No entanto, a função f é contínua em 0, pois

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} f(x) &= \lim_{x \to 0} x^{1/3} \\ &= 0 \\ &= f(0) \end{aligned}$$

(c) Um esboço do gráfico de f está na Figura 1.

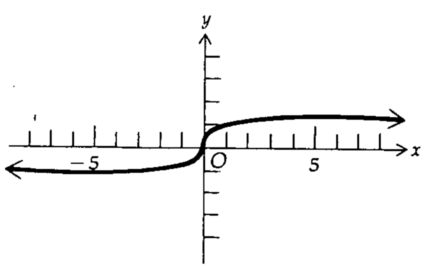


FIGURA 1

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Para a função f do Exemplo 1, como

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\Delta x)^{2/3}} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

da Definição 3.1.1 (ii) segue que a reta $x = 0$ é a reta tangente ao gráfico de f na origem. ◀

Do Exemplo 1 e da Ilustração 3, a função definida por $f(x) = x^{1/3}$ tem as seguintes propriedades:

1. f é contínua em zero.
2. f não é derivável em zero.
3. O gráfico de f tem uma reta tangente vertical no ponto onde x é zero.

Na ilustração a seguir temos outra função que é contínua mas não derivável em zero. O gráfico dessa função não tem uma reta tangente no ponto onde x é zero.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Seja f a função valor absoluto definida por

$$f(x) = |x|$$

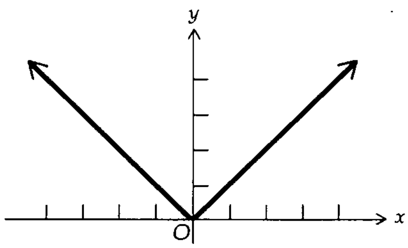


FIGURA 2

Um esboço do gráfico dessa função está na Figura 2. Da fórmula (4) da Secção 3.1,

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

se o limite existir. Como $f(0 + \Delta x) = |\Delta x|$ e $f(0) = 0$,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

Como $|\Delta x| = \Delta x$ se $\Delta x > 0$ e $|\Delta x| = -\Delta x$ se $\Delta x < 0$, consideramos limites laterais em 0:

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} 1 = 1 \qquad \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} (-1) = -1$$

Como $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} \neq \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$, segue que o limite bilateral $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ não existe. Logo, $f'(0)$ não existe e assim f não é derivável em 0.

Como a Definição 3.1.1 não é satisfeita quando $x = 0$, não existe reta tangente na origem para o gráfico da função valor absoluto. ◀

Como as funções da Ilustração 4 e do Exemplo 1 são contínuas em um número, porém não deriváveis nele, podemos concluir que o fato de ser uma função contínua num número não implica que ela seja derivável naquele número. Mas o fato de a função ser derivável *implica* a continuidade, o que é assegurado pelo teorema a seguir.

3.2.1 TEOREMA Se uma função f for derivável em x_1, então f será contínua em x_1.

Prova Para provar que f é contínua em x_1 precisamos mostrar que as três condições da Definição 2.6.1 são satisfeitas. Isto é, precisamos mostrar que (i) $f(x_1)$ existe; (ii) $\lim\limits_{x \to x_1} f(x)$ existe e (iii) $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$.

Por hipótese, f é derivável em x_1. Logo $f'(x_1)$ existe. Como pela fórmula (7) da Secção 3.1

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

$f(x_1)$ precisa existir, pois caso contrário o limite acima não terá sentido. Logo, a condição (i) é verdadeira em x_1. Consideremos agora

$$\lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)]$$

Podemos escrever

$$\lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)] = \lim_{x \to x_1} \left[(x - x_1) \cdot \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \right] \tag{2}$$

Como

$$\lim_{x \to x_1} (x - x_1) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1)$$

aplicando o teorema de limite de um produto (Teorema 2.2.6) ao segundo membro de (2), obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)] &= \lim_{x \to x_1} (x - x_1) \cdot \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \\ &= 0 \cdot f'(x_1) \\ &= 0\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_1} f(x) &= \lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1) + f(x_1)] \\ &= \lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)] + \lim_{x \to x_1} f(x_1) \\ &= 0 + f(x_1)\end{aligned}$$

que resulta

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$$

Dessa igualdade segue que as condições (ii) e (iii) para a continuidade de f em x_1 são satisfeitas. Logo, o teorema está provado. ■

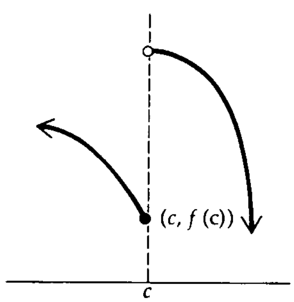


FIGURA 3

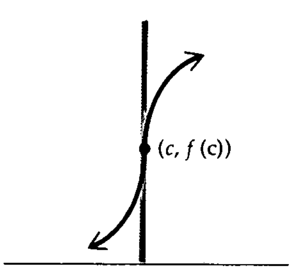


FIGURA 4

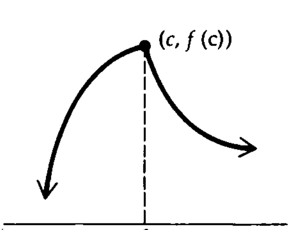


FIGURA 5

Uma função f pode deixar de ser derivável em um número c por uma das seguintes razões:

1. A função f é descontínua em c. Isto decorre do Teorema 3.2.1. Veja na Figura 3 um esboço do gráfico de tal função.
2. A função f é contínua em c e o gráfico de f tem uma reta tangente vertical no ponto onde $x = c$. Veja na Figura 4 um esboço do gráfico de uma função com essa característica. Tal situação também ocorre no Exemplo 1.
3. A função f é contínua em c e o gráfico de f não tem uma reta tangente no ponto $x = c$. Veja na Figura 5 um esboço do gráfico de uma função

satisfazendo essa condição. Observe que existe um "bico" no gráfico em $x = c$. Na Ilustração 1 há outro exemplo de tal função.

Antes de dar outros exemplos de funções que são contínuas em um número, porém não deriváveis nele, vamos introduzir o conceito de **derivada lateral**.

3.2.2 DEFINIÇÃO

Se a função f for definida em x_1, então a **derivada à direita** de f em x_1, denotada por $f'_+(x_1)$, será definida por

$$f'_+(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'_+(x_1) = \lim_{x \to x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

se o limite existir.

3.2.3 DEFINIÇÃO

Se a função f for definida em x_1, então a **derivada à esquerda** de f em x_1, denotada por $f'_-(x_1)$, será definida por

$$f'_-(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'_-(x_1) = \lim_{x \to x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

se o limite existir.

Das Definições 3.2.2 e 3.2.3 e do Teorema 2.3.3, segue que uma função f definida num intervalo aberto contendo x_1 será derivável em x_1 se e somente se $f'_+(x_1)$ e $f'_-(x_1)$ ambas existirem e forem iguais. Naturalmente, então, $f'(x_1)$, $f'_+(x_1)$ e $f'_-(x_1)$ são todas iguais.

EXEMPLO 2 Seja f definida por

$$f(x) = |1 - x^2|$$

(a) Faça um esboço do gráfico de f. (b) Prove que f é contínua em 1. (c) Determine se f é derivável em 1.

Solução Pela definição de valor absoluto, se $x < -1$ ou $x > 1$, então $f(x) = -(1 - x^2)$ e se $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $f(x) = 1 - x^2$. Logo, f pode ser definida como

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^2 - 1 & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

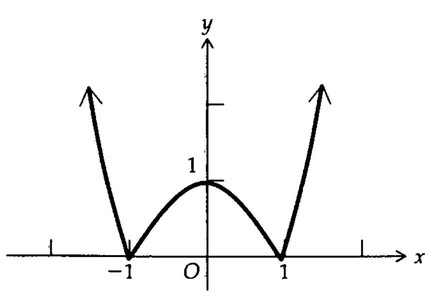


FIGURA 6

(a) Um esboço do gráfico de f está na Figura 6.

(b) Para provar que f é contínua em 1, verificamos as três condições para continuidade.

(i) $f(1) = 0$

(ii) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (1 - x^2) = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2 - 1) = 0$

Assim $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$.

(iii) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$

Como as condições (i)-(iii) são verificadas em 1, f é contínua em 1.

(c)
$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(1 - x^2) - 0}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(1 - x)(1 + x)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} [-(1 + x)] = -2$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x^2 - 1) - 0}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} (x + 1) = 2$$

Como $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, segue que $f'(1)$ não existe e assim f não é derivável em 1.

A função do Exemplo 2 também não é derivável em $x = -1$, conforme pode ser mostrado por um método similar ao que foi usado em $x = 1$ (Veja o Exercício 26).

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** Na Ilustração 2 da Secção 2.6 tínhamos a função C definida por

$$C(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0{,}7x + 3 & \text{se } 10 < x \end{cases}$$

onde $C(x)$ é o custo total de x de um produto. A Figura 7 mostra um esboço do gráfico de C. Na Secção 2.6 mostramos que C é contínua em 10.

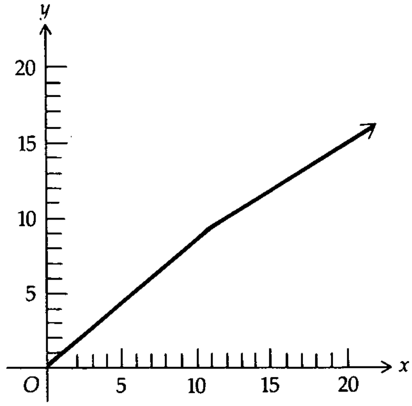


FIGURA 7

$$C'_-(10) = \lim_{x\to 10^-} \frac{C(x) - C(10)}{x - 10} = \lim_{x\to 10^-} \frac{x - 10}{x - 10} = \lim_{x\to 10^-} 1 = 1$$

$$C'_+(10) = \lim_{x\to 10^+} \frac{C(x) - C(10)}{x - 10} = \lim_{x\to 10^+} \frac{(0{,}7x + 3) - 10}{x - 10} = \lim_{x\to 10^+} \frac{0{,}7(x - 10)}{x - 10} = \lim_{x\to 10^+} 0{,}7 = 0{,}7$$

Como $C'_-(10) \neq C'_+(10)$, C não é derivável em 10. ◀

EXEMPLO 3 Dada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } 0 < x < b \\ 1 - \frac{1}{4}x & \text{se } b \leqslant x \end{cases}$$

(a) Determine um valor de b de tal forma que f seja contínua em b. (b) f é derivável no valor de b encontrado na parte (a)?

Solução

(a) A função f será contínua em b se $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ e $\lim\limits_{x \to b^+} f(x) = f(b)$.

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{b} \qquad \lim_{x \to b^+} f(x) = \lim_{x \to b^+} (1 - \tfrac{1}{4}x) = 1 - \tfrac{1}{4}b$$

$f(b) = 1 - \frac{1}{4}b$; logo f será contínua em b se

$$\frac{1}{b} = 1 - \frac{1}{4}b$$

$$4 = 4b - b^2$$

$$b^2 - 4b + 4 = 0$$

$$(b - 2)^2 = 0$$

$$b = 2$$

Assim

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } 0 < x < 2 \\ 1 - \frac{1}{4}x & \text{se } 2 \leqslant x \end{cases}$$

e f é contínua em 2.

(b) Para determinar se f é derivável em 2, calculemos $f'_-(2)$ e $f'_+(2)$.

$$f'_-(2) = \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{2 - x}{2x(x - 2)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-1}{2x} = -\tfrac{1}{4}$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(1 - \frac{1}{4}x) - \frac{1}{2}}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{2 - x}{4(x - 2)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-1}{4} = -\tfrac{1}{4}$$

Como $f'_-(2) = f'_+(2)$, segue que $f'(2)$ existe e, portanto, f é derivável em 2.

EXERCÍCIOS 3.2

Nos Exercícios de 1 a 20, faça o seguinte: (a) Trace um esboço do gráfico da função; (b) determine se f é contínua em x_1; (c) calcule $f'_-(x_1)$ e $f'_+(x_1)$, se existirem; (d) determine se f é derivável em x_1.

1. $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \leqslant -4 \\ -x-6 & \text{se } -4 < x \end{cases} \quad x_1 = -4$
2. $f(x) = \begin{cases} 3-2x & \text{se } x < 2 \\ 3x-7 & \text{se } 2 \leqslant x \end{cases} \quad x_1 = 2$
3. $f(x) = |x-3|;\ x_1 = 3$
4. $f(x) = 1 + |x+2|;\ x_1 = -2$
5. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ x-1 & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases} \quad x_1 = 0$
6. $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leqslant 0 \\ x^2 & \text{se } 0 < x \end{cases} \quad x_1 = 0$
7. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ -x^2 & \text{se } 0 < x \end{cases} \quad x_1 = 0$
8. $f(x) = \begin{cases} x^2-4 & \text{se } x < 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{se } 2 \leqslant x \end{cases} \quad x_1 = 2$
9. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{se } x < 1 \\ (1-x)^2 & \text{se } 1 \leqslant x \end{cases} \quad x_1 = 1$
10. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < -1 \\ -1-2x & \text{se } -1 \leqslant x \end{cases} \quad x_1 = -1$
11. $f(x) = \begin{cases} 2x^2-3 & \text{se } x \leqslant 2 \\ 8x-11 & \text{se } 2 < x \end{cases} \quad x_1 = 2$
12. $f(x) = \begin{cases} x^2-9 & \text{se } x < 3 \\ 6x-18 & \text{se } 3 \leqslant x \end{cases} \quad x_1 = 3$
13. $f(x) = \sqrt[3]{x+1};\ x_1 = -1$
14. $f(x) = (x-2)^{-2};\ x_1 = 2$
15. $f(x) = \begin{cases} 5-6x & \text{se } x \leqslant 3 \\ -4-x^2 & \text{se } 3 < x \end{cases} \quad x_1 = 3$
16. $f(x) = \begin{cases} -x^{2/3} & \text{se } x \leqslant 0 \\ x^{2/3} & \text{se } 0 < x \end{cases} \quad x_1 = 0$
17. $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases} \quad x_1 = 0$
18. $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \leqslant 1 \\ x+1 & \text{se } 1 < x \end{cases} \quad x_1 = 1$
19. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x \leqslant 2 \\ x^3 & \text{se } 2 < x \end{cases} \quad x_1 = 2$
20. $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{se } x < -1 \\ 1-x^2 & \text{se } -1 \leqslant x \end{cases} \quad x_1 = -1$
21. Dada $f(x) = \sqrt{x-4}$. (a) Prove que f é contínua à direita de 4. (b) Prove que $f'_+(4)$ não existe. (c) Faça um esboço do gráfico de f.
22. Dada $f(x) = \sqrt{4-x^2}$. (a) Prove que f é contínua no intervalo fechado $[-2, 2]$. (b) Prove que nem $f'_+(-2)$ nem $f'_-(2)$ existem. (c) Faça um esboço do gráfico de f.
23. Dada $f(x) = \sqrt{x^2-9}$. (a) Prove que f é contínua em $(-\infty, -3]$ e $[3, +\infty)$. (b) Prove que nem $f'_-(-3)$ nem $f'_+(3)$ existem. (c) Faça um esboço do gráfico de f.
24. Dada $f(x) = \sqrt{8-x}$. (a) Prove que f é contínua à esquerda de 8. (b) Prove que $f'_-(8)$ não existe. (c) Faça um esboço do gráfico de f.
25. Dada $f(x) = \operatorname{sgn} x$. (a) Prove que $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$ não existem. (b) Prove que $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = 0$. (c) Faça um esboço do gráfico de f.
26. Prove que a função do Exemplo 2 é contínua em -1, mas não é derivável naquele número.
27. Dada $f(x) = x^{3/2}$. (a) Prove que f é contínua à direita de 0. (b) Prove que $f'_+(0)$ existe e ache o seu valor. (c) Faça um esboço do gráfico de f.
28. Dada $f(x) = (1-x^2)^{3/2}$. (a) Prove que f é contínua no intervalo fechado $[-1, 1]$. (b) Prove que f é derivável no intervalo aberto $(-1, 1)$ e que ambas $f'_+(-1)$ e $f'_-(1)$ existem. (c) Faça um esboço do gráfico de f.
29. Dada

$$f(x) = \begin{cases} x^2-7 & \text{se } 0 < x \leqslant b \\ \dfrac{6}{x} & \text{se } b < x \end{cases}$$

(a) Determine um valor de b para o qual f é contínua em b. (b) f é derivável em b encontrado na parte (a)?

30. Ache os valores de a e b tais que f seja derivável em 1 se

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ ax+b & \text{se } 1 \leqslant x \end{cases}$$

31. Ache os valores de a e b tais que f seja derivável em 2 se

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{se } x < 2 \\ 2x^2-1 & \text{se } 2 \leqslant x \end{cases}$$

32. Dada $f(x) = [\![x]\!]$, ache $f'(x_1)$ se x_1 não for inteiro. Prove, aplicando o Teorema 3.2.1, que $f'(x_1)$ não existe se x_1 for inteiro. Se x_1 for inteiro, o que poderá ser dito sobre $f'_-(x_1)$ e $f'_+(x_1)$?
33. Dada $f(x) = (x-1)[\![x]\!]$. Faça um esboço do gráfico de f para x em $[0, 2]$. Ache, se existirem: (a) $f'_-(1)$; (b) $f'_+(1)$; (c) $f'(1)$.
34. Dada $f(x) = (5-x)[\![x]\!]$. Faça um esboço do gráfico de f para x em $[4, 6]$. Ache, se existirem: (a) $f'_-(5)$; (b) $f'_+(5)$; (c) $f'(5)$.
35. Dada $f(x) = (x-a)[\![x]\!]$ onde a é um inteiro, mostre que $f'_-(a) + 1 = f'_+(a)$.
36. Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} & \text{se } x \neq a \\ g'(a) & \text{se } x = a \end{cases}$$

Prove que se $g'(a)$ existir, f será contínua em a.

37. Na Ilustração 1 temos a função valor absoluto definida por $f(x) = |x|$ e essa função não é derivável em 0. Prove que $f'(x) = |x|/x$ para todo $x \neq 0$. (*Sugestão*: seja $|x| = \sqrt{x^2}$.)

38. Se $f(x) = |x|$ e $g(x) = -|x|$, (a) ache uma fórmula para $(f + g)(x)$. (b) Prove que $f + g$ é derivável em 0, embora nem f nem g sejam deriváveis nesse número.

39. Uma excursão escolar que pode acomodar até 250 estudantes irá custar $ 15 por estudante, se o número de estudantes que fizer a viagem não ultrapassar 150; contudo, o custo por estudante será reduzido de $ 0,05 para cada estudante que exceder 150, até que o custo atinja $ 10 por pessoa. (a) Se x estudantes fizerem a viagem, expresse o custo bruto como função de x. (b) Como x é o número de estudantes, x é um inteiro não negativo. Para que tenhamos as exigências de continuidade para aplicar o cálculo, x deve ser um número real não negativo. Com essa hipótese, mostre que a função da parte (a) é contínua até 150, mas não é derivável nesse número.

40. Um fabricante pode obter um lucro de $ 20 em cada item se até 800 itens forem produzidos por semana. O lucro decresce $ 0,02 por item acima de 800. (a) Se x itens forem produzidos por semana, expresse o lucro do fabricante como uma função de x. (b) Como x é o número de itens, é um inteiro não-negativo. Para que tenhamos as exigências de continuidade do cálculo, x deve ser um número real não negativo. Com essa hipótese, mostre que a função da parte (a) é contínua até 800, mas não derivável nesse número.

41. Dada

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x^n & \text{se } 0 < x \end{cases}$$

onde n é um inteiro positivo. (a) Para que valores de n f é derivável para todos os valores de x? (b) Para que valores de n f é contínua para todos os valores de x?

3.3 TEOREMAS SOBRE DERIVAÇÃO DE FUNÇÕES ALGÉBRICAS

Como o processo de cálculo da derivada de uma função, a partir da Definição 3.1.3, em geral é lento, enunciaremos e provaremos alguns teoremas que nos possibilitam encontrar derivadas com mais facilidade. Esses teoremas são demonstrados se aplicarmos a Definição 3.1.3. Depois da prova de cada teorema enunciamos a fórmula de derivação correspondente.

3.3.1 TEOREMA Se c for uma constante e se $f(x) = c$ para todo x, então

$$f'(x) = 0$$

Prova

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$ ■

$$\boxed{D_x(c) = 0}$$

A derivada de uma constante é zero.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Se $f(x) = 5$, então

$$f'(x) = 0$$ ◀

3.3.2 TEOREMA Se n for um inteiro positivo e se $f(x) = x^n$, então

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Prova

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

Aplicando o teorema binomial a $(x + \Delta x)^n$ teremos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n\right] - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n}{\Delta x}$$

Dividindo o numerador e o denominador por Δx, obtemos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\,\Delta x + \ldots + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}\right]$$

Todos os termos, exceto o primeiro, têm Δx como fator; assim sendo todos os termos, exceto o primeiro, tendem a zero quando Δx tende a zero. Assim

$$f'(x) = nx^{n-1}$$ ■

$$\boxed{D_x(x^n) = nx^{n-1}}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Se $f(x) = x^8$, então $f'(x) = 8x^7$. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Seja $f(x) = x$. (a) Se $x \neq 0$, pelo Teorema 3.3.2

$$f'(x) = 1 \cdot x^0$$
$$= 1 \cdot 1$$
$$= 1$$

(b) Pela fórmula (7) da Secção 3.1

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} 1$$

$$= 1$$

Portanto, para todo x, $D_x(x) = 1$. ◀

3.3.3 TEOREMA Se f for uma função, c uma constante e g a função definida por

$$g(x) = c \cdot f(x)$$

então, se $f'(x)$ existir,

$$g'(x) = c \cdot f'(x)$$

Prova

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} c \cdot \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] \\
&= c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= cf'(x)
\end{aligned}
$$

■

$$\boxed{D_x\,[c \cdot f(x)] = c \cdot D_x\,f(x)}$$

A derivada de uma constante vezes uma função é a constante vezes a derivada da função, se essa derivada existir.

Combinando os Teoremas 3.3.2 e 3.3.3 obtemos o seguinte resultado: se $f(x) = cx^n$, onde n é um inteiro positivo e c é uma constante, então

$$f'(x) = cnx^{n-1}$$

$$\boxed{D_x(cx^n) = cnx^{n-1}}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Se $f(x) = 5x^7$, então

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 5 \cdot 7x^6 \\
&= 35x^6
\end{aligned}
$$

◀

3.3.4 TEOREMA Se f e g forem funções e se h for a função definida por

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

então, se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem,

$$h'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Prova

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}
$$

■

$$\boxed{D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)}$$

A derivada da soma de duas funções é a soma de suas derivadas se elas existirem.

O resultado do teorema precedente pode ser aplicado a um número qualquer, finito, de funções, por indução matemática, e isso será enunciado como um outro teorema.

3.3.5 TEOREMA A derivada da soma de um número finito de funções é igual à soma de suas derivadas, se elas existirem.

Dos teoremas precedentes, a derivada de qualquer função polinomial pode ser facilmente encontrada.

EXEMPLO 1 Encontre $f'(x)$ se

$$f(x) = 7x^4 - 2x^3 + 8x + 5$$

Solução

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x(7x^4 - 2x^3 + 8x + 5) \\ &= D_x(7x^4) + D_x(-2x^3) + D_x(8x) + D_x(5) \\ &= 28x^3 - 6x^2 + 8 \end{aligned}$$

3.3.6 TEOREMA Se f e g forem funções e h for a função definida por

$$h(x) = f(x)g(x)$$

então, se existirem $f'(x)$ e $g'(x)$,

$$h'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Prova

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Se $f(x + \Delta x) \cdot g(x)$ for somado e subtraído ao numerador, então

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) \cdot g(x) + f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x + \Delta x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x + \Delta x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \to 0} \left[g(x) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Como f é derivável em x, pelo Teorema 3.2.1 f é contínua em x; logo, $\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$. Também, $\lim_{\Delta x \to 0} g(x) = g(x)$ e

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = g'(x) \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

dando assim

$$h'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$ ■

$$\boxed{D_x\,[f(x)g(x)] = f(x)\,D_x g(x) + g(x)\cdot D_x f(x)}$$

A derivada do produto de duas funções é a primeira função vezes a derivada da segunda função, mais a segunda função vezes a derivada da primeira função, se essas derivadas existirem.

EXEMPLO 2 Encontre $h'(x)$ se

$$h(x) = (2x^3 - 4x^2)(3x^5 + x^2)$$

Solução

$$\begin{aligned} h'(x) &= (2x^3 - 4x^2)(15x^4 + 2x) + (3x^5 + x^2)(6x^2 - 8x) \\ &= (30x^7 - 60x^6 + 4x^4 - 8x^3) + (18x^7 - 24x^6 + 6x^4 - 8x^3) \\ &= 48x^7 - 84x^6 + 10x^4 - 16x^3 \end{aligned}$$

No Exemplo 2, note que se a multiplicação for efetuada antes da derivação, o resultado será o mesmo. Fazendo isto, temos

$$h(x) = 6x^8 - 12x^7 + 2x^5 - 4x^4$$

$$h'(x) = 48x^7 - 84x^6 + 10x^4 - 16x^3$$

3.3.7 TEOREMA Se f e g forem funções e se h for a função definida por

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{onde } g(x) \neq 0$$

então se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem,

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Prova

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x + \Delta x)}{\Delta x \cdot g(x) \cdot g(x + \Delta x)} \end{aligned}$$

Se somarmos e subtrairmos $f(x) \cdot g(x)$ ao denominador, então

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot g(x)}{\Delta x \cdot g(x) \cdot g(x + \Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[g(x) \cdot \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] - \left[f(x) \cdot \dfrac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]}{g(x) \cdot g(x + \Delta x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x)}$$

Como g é derivável, em x, então g será contínua em x; assim temos que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x) = g(x)$. Além disso, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) = g(x)$ e $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x)$. Com esses resultados e as definições de $f'(x)$ e $g'(x)$ obtemos

$$h'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x) \cdot g(x)}$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

■

$$\boxed{D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{[g(x)]^2}}$$

A derivada do quociente de duas funções é a fração tendo como denominador o quadrado do denominador original e como numerador o denominador vezes a derivada do numerador menos o numerador vezes a derivada do denominador, se essas derivadas existirem.

EXEMPLO 3 Ache

$$D_x\left(\frac{2x^3 + 4}{x^2 - 4x + 1}\right)$$

Solução

$$D_x\left(\frac{2x^3 + 4}{x^2 - 4x + 1}\right) = \frac{(x^2 - 4x + 1)(6x^2) - (2x^3 + 4)(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 1)^2}$$

$$= \frac{6x^4 - 24x^3 + 6x^2 - 4x^4 + 8x^3 - 8x + 16}{(x^2 - 4x + 1)^2}$$

$$= \frac{2x^4 - 16x^3 + 6x^2 - 8x + 16}{(x^2 - 4x + 1)^2}$$

3.3.8 TEOREMA Se $f(x) = x^{-n}$, onde $-n$ é um inteiro negativo e $x \neq 0$, então

$$f'(x) = -nx^{-n-1}$$

Prova Se $-n$ for um inteiro negativo, então n será um inteiro positivo. Escrevemos então

$$f(x) = \frac{1}{x^n}$$

Do Teorema 3.3.7

$$f'(x) = \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2}$$
$$= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}$$
$$= -nx^{n-1-2n}$$
$$= -nx^{-n-1}$$ ■

EXEMPLO 4 Ache

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^5}\right)$$

Solução

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^5}\right) = \frac{d}{dx}(3x^{-5})$$
$$= 3(-5x^{-6})$$
$$= -\frac{15}{x^6}$$

Se r for um inteiro qualquer positivo ou negativo, segue dos Teoremas 3.3.2 e 3.3.8 que

$$\boxed{D_x(x^r) = rx^{r-1}}$$

e dos Teoremas 3.3.2, 3.3.3 e 3.3.8 obtemos

$$\boxed{D_x(cx^r) = crx^{r-1}}$$

EXERCÍCIOS 3.3

Nos Exercícios de 1 a 24, derive a função dada, aplicando os teoremas desta secção.

1. $f(x) = 7x - 5$
2. $g(x) = 8 - 3x$
3. $g(x) = 1 - 2x - x^2$
4. $f(x) = 4x^2 + x + 1$
5. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 2$
6. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 1$
7. $f(x) = \frac{1}{8}x^8 - x^4$
8. $g(x) = x^7 - 2x^5 + 5x^3 - 7x$
9. $F(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2$
10. $H(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2$
11. $v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$
12. $G(y) = y^{10} + 7y^5 - y^3 + 1$
13. $F(x) = x^2 + 3x + \dfrac{1}{x^2}$
14. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3}{x^3}$
15. $g(x) = 4x^4 - \dfrac{1}{4x^4}$
16. $f(x) = x^4 - 5 + x^{-2} + 4x^{-4}$
17. $g(x) = \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{5}{x^4}$
18. $H(x) = \dfrac{5}{6x^5}$
19. $f(s) = \sqrt{3}(s^3 - s^2)$
20. $g(x) = (2x^2 + 5)(4x - 1)$
21. $f(x) = (2x^4 - 1)(5x^3 + 6x)$
22. $f(x) = (4x^2 + 3)^2$
23. $G(y) = (7 - 3y^3)^2$
24. $F(t) = (t^3 - 2t + 1)(2t^2 + 3t)$

Nos Exercícios de 25 a 36, calcule a derivada indicada, aplicando os teoremas desta secção.

25. $D_x[(x^2 - 3x + 2)(2x^3 + 1)]$
26. $D_x\left(\dfrac{2x}{x + 3}\right)$
27. $D_x\left(\dfrac{x}{x - 1}\right)$
28. $D_y\left(\dfrac{2y + 1}{3y + 4}\right)$
29. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}\right)$
30. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{4 - 3x - x^2}{x - 2}\right)$
31. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{5t}{1 + 2t^2}\right)$
32. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^4 - 2x^2 + 5x + 1}{x^4}\right)$
33. $\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{y^3 - 8}{y^3 + 8}\right)$
34. $\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{s^2 - a^2}{s^2 + a^2}\right)$

35. $D_x\left[\dfrac{2x+1}{x+5}(3x-1)\right]$

36. $D_x\left[\dfrac{x^3+1}{x^2+3}(x^2-2x^{-1}+1)\right]$

37. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = x^3 - 4$ no ponto $(2, 4)$.

38. Ache uma equação da reta normal à curva $y = 4x^2 - 8x$ no ponto $(1, -4)$.

39. Ache uma equação da reta normal à curva $y = 10/(14 - x^2)$ no ponto $(4, -5)$.

40. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = 8/(x^2 + 4)$ no ponto $(2, 1)$.

41. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = 3x^2 - 4x$ e paralela à reta $2x - y + 3 = 0$.

42. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = x^4 - 6x$ que seja perpendicular à reta $x - 2y + 6 = 0$.

43. Ache uma equação de cada uma das retas normais à curva $y = x^3 - 4x$ que sejam paralelas à reta $x + 8y - 8 = 0$.

44. Ache uma equação de cada uma das retas tangentes à curva $3y = x^3 - 3x^2 + 6x + 4$ que sejam paralelas à reta $2x - y + 3 = 0$.

45. Ache uma equação de cada uma das retas que passam pelo ponto $(4, 13)$, que sejam tangentes à curva $y = 2x^2 - 1$.

46. Dada $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x + 5$. Mostre que $f'(x) \geqslant 0$ para todos os valores de x.

47. Se f, g e h são funções e $\phi(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$, prove que se $f'(x)$, $g'(x)$ e $h'(x)$ existirem,

$$\phi'(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$$

(*Sugestão*: aplique o Teorema 3.3.6 duas vezes.)

Use os resultados do Exercício 47 para derivar as funções dos Exercícios de 48 a 51.

48. $f(x) = (x^2 + 3)(2x - 5)(3x + 2)$

49. $h(x) = (3x + 2)^2(x^2 - 1)$

50. $g(x) = (3x^3 + x^{-3})(x + 3)(x^2 - 5)$

51. $\phi(x) = (2x^2 + x + 1)^3$

3.4 MOVIMENTO RETILÍNEO E A DERIVADA COMO TAXA DE VARIAÇÃO

A derivada de uma função f no número x_1 tem uma interpretação importantíssima como a *taxa de variação instantânea* de f em x_1. Começaremos considerando uma partícula movendo-se ao longo de uma reta, que seria uma aplicação em Física. Tal movimento é chamado de **movimento retilíneo**. Um dos sentidos é escolhido arbitrariamente como positivo e o outro, oposto, como negativo. Para simplificar, vamos supor que o movimento da partícula seja ao longo de uma reta horizontal com distâncias positivas à direita e negativas à esquerda. Escolhemos um ponto sobre a reta, o qual denotamos por O. Seja f a função que determina a distância orientada da partícula a partir de O em qualquer instante.

Para sermos mais específicos, seja s cm a distância orientada da partícula a partir de O em t s (segundos). Então, f será a função definida pela equação

$$s = f(t)$$

a qual indicará a distância orientada de O até a partícula, num determinado instante.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Seja

$$s = t^2 + 2t - 3$$

Então, quando $t = 0$, $s = -3$; logo, a partícula está 3 cm à esquerda do ponto O, quando $t = 0$. Quando $t = 1$, $s = 0$; assim, a partícula estará no ponto O, decorrido 1 s do início do movimento. Quando $t = 2$, $s = 5$; assim, a partícula estará a 5 cm à direita de O, 2 s após o início do movimento. Quando $t = 3$, $s = 12$; assim, a partícula estará a 12 cm à direita do ponto O, decorridos 3 s do início do movimento.

A Figura 1 ilustra as várias posições da partícula para valores específicos de t.

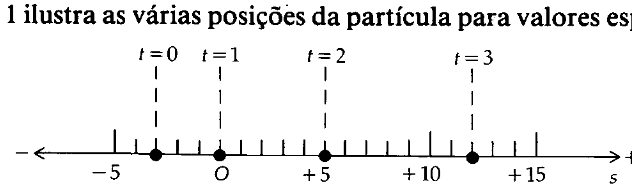


FIGURA 1

Entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$, a partícula move-se do ponto onde $s = 0$ até o ponto onde $s = 12$; assim, no intervalo de 2 s a variação na distância é de 0 a 12 cm. A velocidade média da partícula é a razão entre a variação na distância orientada do ponto fixo e a variação no tempo. Assim, o número de centímetros por segundo, ou seja, a velocidade média da partícula de $t = 1$ a $t = 3$, é $\frac{12}{2} = 6$. De $t = 0$ a $t = 2$, a variação na distância orientada de O da partícula é 8 cm; assim, o número de centímetros por segundo, ou seja, a velocidade média da partícula nesse intervalo de 2 s, é $\frac{8}{2} = 4$. ◀

Na Ilustração 1, a velocidade média da partícula, obviamente, não é constante; e a velocidade média não fornece informações específicas sobre o movimento da partícula em nenhum instante específico. Por exemplo, se um carro percorre uma distância de 100 km na mesma direção em 2 h, dizemos que a velocidade média com a qual percorre aquela distância é de 50 km/h. Entretanto, dessa informação não podemos determinar quanto está marcando o velocímetro do carro, num dado instante, no período de 2 h. A leitura do velocímetro é chamada de *velocidade instantânea*. A discussão a seguir possibilita-nos chegar a uma definição do que significa *velocidade instantânea.*

Suponha que $s = f(t)$ defina s (o número de centímetros da distância orientada da partícula a partir do ponto O) como função de t (número de segundos decorridos). Quando $t = t_1$, $s = s_1$. A variação na distância orientada a partir de O é $(s - s_1)$ cm no intervalo de tempo $(t - t_1)$ s e o número de centímetros por segundo ou seja, a velocidade média da partícula nesse intervalo de tempo é dada por

$$\frac{s - s_1}{t - t_1}$$

ou, como $s = f(t)$ e $s_1 = f(t_1)$, a velocidade média é encontrada de

$$\frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1} \tag{1}$$

Agora, quanto menor for o intervalo de t_1 até t, mais próxima estará a velocidade média do que intuitivamente entenderíamos como velocidade instantânea em t_1.

Por exemplo, se o velocímetro de um carro marca 80 km/h quando ele passa por um ponto P_1 e se um ponto P está, por exemplo, a 10 m de P_1, então a velocidade média do carro quando ele percorre esses 10 m estará, ao que tudo indica, próxima dos 80 km/h, pois a variação da velocidade do carro nesse trecho pequeno é, provavelmente, insignificante. Agora, se a distância entre P_1 e P for diminuída para 5 m, a velocidade média do carro nesse intervalo deverá estar mais próxima ainda da leitura do velocímetro do carro em P_1. Podemos continuar esse processo e a leitura do velocímetro em P_1 pode ser representada como o limite da velocidade média entre P_1 e P, quando P tende a P_1. Isto é, a *velocidade instantânea* pode ser definida como o limite do quociente (1) quando t tende a t_1, desde que o limite exista. O limite é a derivada da função f em t_1. Temos, então, a seguinte definição:

3.4.1 DEFINIÇÃO

Se f for uma função dada pela equação

$$s = f(t)$$

e uma partícula se mover ao longo de uma reta de tal forma que s seja o número de unidades da distância orientada da partícula a um ponto fixo na reta em t unidades de tempo, então a **velocidade instantânea** da partícula em t unidades de tempo será v unidades de velocidade, onde

$$v = f'(t) \Leftrightarrow v = \frac{ds}{dt}$$

se a derivada existir.

A velocidade instantânea pode ser positiva ou negativa, conforme o movimento da partícula seja no sentido positivo ou negativo da reta. Quando a velocidade instantânea for zero, a partícula estará em repouso.

A **velocidade escalar** de uma partícula em qualquer instante é definida como o valor absoluto da velocidade instantânea. Logo, a velocidade escalar é um número não-negativo. Os termos velocidade escalar e velocidade instantânea são freqüentemente confundidos. Deve ser notado que a velocidade escalar dá somente uma idéia da rapidez com que a partícula está se movendo, enquanto que a velocidade instantânea também indica o sentido do movimento.

EXEMPLO 1 Uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a equação

$$s = 2t^3 - 4t^2 + 2t - 1$$

Determine os intervalos de tempo nos quais a partícula se move para a direita e para a esquerda. Determine também o instante no qual ela inverte o seu sentido.

Solução

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} \\ &= 6t^2 - 8t + 2 \\ &= 2(3t^2 - 4t + 1) \\ &= 2(3t - 1)(t - 1) \end{aligned}$$

A velocidade instantânea é zero quando $t = \frac{1}{3}$ e $t = 1$. Logo, nesses dois instantes a partícula está em repouso. A partícula move-se para a direita quando v é positivo e move-se para a esquerda quando v é negativo. Determinamos o sinal de v para os vários intervalos de t e os resultados estão dados na Tabela 1.

Tabela 1

	$3t - 1$	$t - 1$	*Conclusão*
$t < \frac{1}{3}$	$-$	$-$	v é positivo, e a partícula move-se para a direita
$t = \frac{1}{3}$	0	$-$	v é zero e a partícula está mudando de sentido da direita para a esquerda
$\frac{1}{3} < t < 1$	$+$	$-$	v é negativo e a partícula move-se para a esquerda
$t = 1$	$+$	0	v é zero e a partícula está mudando de sentido, da esquerda para a direita
$1 < t$	$+$	$+$	v é positivo e a partícula move-se para a direita

Tabela 2

t	s	v
-1	-9	16
0	-1	2
$\frac{1}{3}$	$-\frac{19}{27}$	0
1	-1	0
2	3	10

O movimento da partícula, indicado na Figura 2, é ao longo de uma reta horizontal; contudo, o comportamento do movimento está indicado acima da reta. A Tabela 2 dá os valores de s e v para valores específicos de t.

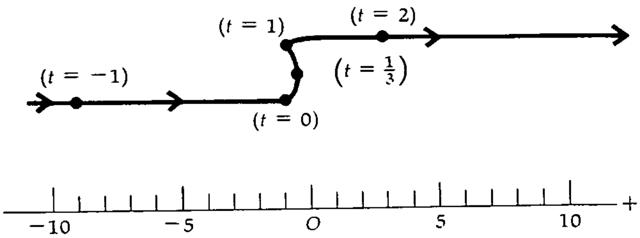


FIGURA 2

EXEMPLO 2 Uma bola é atirada verticalmente para cima a partir do chão, com uma velocidade inicial de 64 m/s. Se o sentido positivo da distância do ponto de partida for para cima, a equação do movimento será

$$s = -16t^2 + 64t$$

Seja t o número de segundos decorridos desde que a bola foi atirada e s o número de metros da distância percorrida pela bola a partir do ponto inicial em t s. (a) Ache a velocidade instantânea da bola ao fim de 1 s. A bola está subindo ou descendo após 1 s? (b) Ache a velocidade instantânea da bola depois de 3 s. A bola está subindo ou descendo após 3 s? (c) Quantos segundos a bola leva para atingir o seu ponto mais alto? (d) Qual a altura máxima atingida pela bola? (e) Ache as velocidades escalares após 1 e de 3 s. (f) Decorridos quantos segundos a bola atinge o solo? (g) Ache a velocidade instantânea da bola quando ela chega ao chão.

Solução Seja $v(t)$ o número de metros por segundo, sendo a velocidade instantânea da bola no instante t s. Então $v(t) = ds/dt$,

$$v(t) = -32t + 64$$

(a) $v(1) = -32(1) + 64$; isto é, $v(1) = 32$; assim, ao fim de 1 s a bola estará subindo com uma velocidade instantânea de 32 m/s.

(b) $v(3) = -32(3) + 64$; isto é, $v(3) = -32$; assim, após 3 s a bola estará caindo com uma velocidade instantânea de -32 m/s.

(c) A bola atinge o seu ponto mais alto quando o sentido do movimento muda, isto é, quando $v(t) = 0$. Obtemos $-32t + 64 = 0$. Assim, $t = 2$.

(d) Quando $t = 2$, $s = 64$; logo, o ponto mais alto atingido pela bola está a 64 m do ponto inicial.

(e) $|v(t)|$ é o número de metros por segundo da velocidade escalar em t s $|v(1)| = 32$ e $|v(3)| = 32$.

(f) A bola irá atingir o chão quando $s = 0$. No caso, temos $-16t^2 + 64t = 0$, donde obtemos $t = 0$ e $t = 4$. Assim sendo, a bola atinge o solo em 4 s.

(g) $v(4) = -64$; quando a bola atinge o solo, sua velocidade instantânea é -64 m/s.

Tabela 3

t	s	v
0	0	64
$\frac{1}{2}$	28	48
1	48	32
2	64	0
3	48	-32
$\frac{7}{2}$	28	-48
4	0	-64

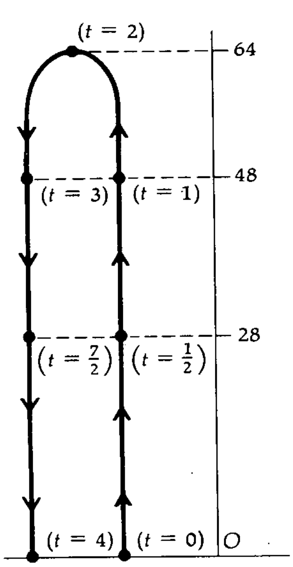


FIGURA 3

A Tabela 3 dá valores de s e de v para alguns valores específicos de t. O movimento da bola está indicado na Figura 3. Supusemos que o movimento tenha ocorrido na vertical. O comportamento do movimento está indicado à esquerda da reta.

A velocidade no movimento retilíneo corresponde ao conceito mais geral de taxa de variação instantânea. Por exemplo, se a partícula move-se ao longo de uma linha reta de acordo com a equação $s = f(t)$, a velocidade da partícula em t unidades de tempo é determinada pela derivada de s com respeito a t. Já que a velocidade pode ser interpretada como uma taxa de variação da distância por unidade de variação do tempo, a derivada de s com respeito a t é a taxa de variação de s por unidade de variação de t.

Da mesma forma, se uma quantidade y for uma função de uma quantidade x, podemos expressar a taxa de variação de y por unidade de variação de x. A discussão é análoga à discussão da inclinação de uma reta tangente ao gráfico e à de velocidade instantânea de uma partícula movendo-se em uma reta.

Se a relação funcional entre y e x for dada por

$$y = f(x)$$

e se x variar do valor x_1 até $x_1 + \Delta x$, então y variará de $f(x_1)$ até $f(x_1 + \Delta x)$. Assim, a variação de y, a qual denotamos por Δy, é $f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$ quando a variação de x for Δx. A taxa média de variação de y por unidade de variação de x, quando x variar de x_1 a $x_1 + \Delta x$, será então,

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2}$$

Se o limite desse quociente existir quando $\Delta x \to 0$, esse limite será o que intuitivamente consideramos como a taxa de variação instantânea de y por unidade de variação de x em x_1. De acordo com essas considerações, temos a definição a seguir.

3.4.2 DEFINIÇÃO Seja $y = f(x)$; a **taxa de variação instantânea de y por unidade de variação de x em x_1** é $f'(x_1)$ ou, equivalentemente, a derivada de y com respeito a x em x_1, se ela existir no ponto x_1.

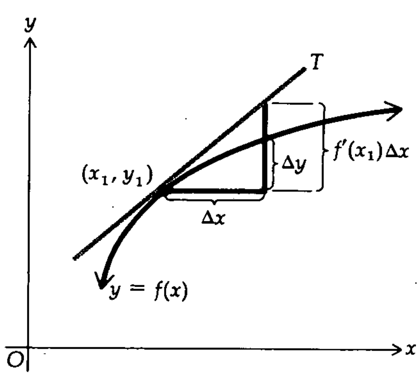


FIGURA 4

Ilustremos geometricamente; seja $f'(x_1)$ a taxa de variação instantânea de y por unidade de variação de x em x_1. Então, se $f'(x_1)$ for multiplicado por Δx (variação de x), temos a variação que ocorreria em y se o ponto (x, y) se movesse ao longo da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto (x_1, y_1). Veja a Figura 4. A taxa média de variação de y por unidade de variação de x é dada pela fração em (2), e se essa fração for multiplicada por Δx, obteremos Δy, que é a variação real de y causada por uma variação de Δx em x, quando o ponto (x, y) move-se ao longo do gráfico.

EXEMPLO 3 Seja $V(x)$ cm³ o volume de um cubo com x cm de lado, use a calculadora para calcular a taxa média de variação de $V(x)$ em relação a x, quando x varia de (a) 3,000 a 3,200; (b) 3,000 a 3,100; (c) 3,000 a 3,010; (d) 3,000 a 3,001. (e) Qual será a taxa de variação instantânea de $V(x)$ em relação a x quando x é 3?

Solução A taxa média de variação de $V(x)$ em relação a x, quando x varia de x_1 a $x_1 + \Delta x$ é

$$\frac{V(x_1 + \Delta x) - V(x_1)}{\Delta x}$$

(a) $x_1 = 3{,}000$, $\Delta x = 0{,}200$

$$\frac{V(3{,}200) - V(3{,}000)}{0{,}200} = \frac{(3{,}200)^3 - (3{,}000)^3}{0{,}200}$$
$$= 28{,}84$$

(b) $x_1 = 3{,}000$, $\Delta x = 0{,}100$

$$\frac{V(3{,}100) - V(3{,}000)}{0{,}100} = \frac{(3{,}100)^3 - (3{,}000)^3}{0{,}100}$$
$$= 27{,}91$$

(c) $x_1 = 3{,}000$, $\Delta x = 0{,}010$

$$\frac{V(3{,}010) - V(3{,}000)}{0{,}010} = \frac{(3{,}010)^3 - (3{,}000)^3}{0{,}010}$$
$$= 27{,}09$$

(d) $x_1 = 3{,}000$, $\Delta x = 0{,}001$

$$\frac{V(3{,}001) - V(3{,}000)}{0{,}001} = \frac{(3{,}001)^3 - (3{,}000)^3}{0{,}001}$$
$$= 27{,}01$$

Em (a) vemos que quando a medida do lado do cubo varia de 3,000 a 3,200 cm, a variação do volume é de 28,84 cm³ por centímetro de variação do comprimento do lado. Interpretamos (b) e (d) de forma similar.

(e) A taxa instantânea de variação de $V(x)$ em relação a x quando x é 3 é $V'(3)$.

$$V'(x) = 3x^2 \qquad V'(3) = 27$$

Logo, quando o comprimento do lado do cubo é 3 cm, a taxa de variação instantânea do volume é 27 cm³ por centímetro de variação do comprimento do lado.

EXEMPLO 4 Em um circuito elétrico, se E volts for a força eletromotriz, R ohms for a resistência e I ampères for a corrente, segue da lei de Ohm que

$$IR = E$$

Supondo que E seja uma constante positiva, mostre que R diminui a uma taxa proporcional ao inverso do quadrado de I.

Solução Resolvendo a equação dada para R, obtemos

$$R = E \cdot I^{-1}$$

Derivando R em relação a I, temos

$$\frac{dR}{dI} = -E \cdot I^{-2}$$

$$\frac{dR}{dI} = -\frac{E}{I^2}$$

Essa igualdade estabelece que a taxa de variação de R em relação a I é negativa e proporcional a $\frac{1}{I^2}$. Portanto, R diminui a uma taxa proporcional ao inverso do quadrado de I.

Em Economia, a variação de uma quantidade em relação a outra pode ser descrita pelos conceitos de *média* ou de *marginal.* O conceito de média expressa a variação de uma quantidade em relação à variação especificada dos valores de uma segunda quantidade, enquanto que o conceito de marginal refere-se à variação instantânea na primeira quantidade que resulta de uma pequena variação na segunda quantidade. Vamos começar nossos exemplos em Economia com as definições de custo médio e custo marginal. Para definir precisamente o conceito de marginal usamos a noção de limite que nos leva à derivada.

Suponhamos que $C(x)$ seja o custo total da produção de x unidades de certa mercadoria. A função C é chamada **função custo total**. Em circunstâncias normais x e $C(x)$ são positivas. Uma vez que x representa o número de unidades de certa mercadoria, x é geralmente um inteiro não-negativo. Para podermos, contudo, aplicar o cálculo, vamos supor que x seja um número real não negativo que garanta os requisitos de continuidade à função C.

Obtemos o **custo médio** da produção de cada unidade de uma mercadoria dividindo o custo total pelo número de unidades produzidas. Se $Q(x)$ for o custo médio,

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x}$$

e Q é chamada **função custo médio.**

Suponha agora que o número de unidades de uma dada produção seja x_1, e que esse número varie por um valor Δx. Então, a variação no custo total será dada por $C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)$ e a variação média no custo total em relação à variação no número de unidades produzidas será dada por

$$\frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

Os economistas usam o termo *custo marginal* para o limite do quociente quando Δx tende a zero, desde que o limite exista. Esse limite, sendo a derivada de C em x_1, estabelece que o **custo marginal**, quando $x = x_1$, é dado por $C'(x_1)$, se existir. A função C' é chamada de **função custo marginal**, e $C'(x_1)$ pode ser interpretado como a taxa de variação do custo total quando x_1 unidades são produzidas.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Suponha que $C(x)$ seja o custo total da fabricação de x brinquedos e

$$C(x) = 110 + 4x + 0{,}02x^2$$

(a) A função custo marginal será C' e

$$C'(x) = 4 + 0{,}04x$$

(b) A função custo marginal, quando $x = 50$ será $C'(50)$, e

$$\begin{aligned} C'(50) &= 4 + 0{,}04(50) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Logo, a taxa de variação do custo total, quando forem fabricados 50 brinquedos, será de \$6 por brinquedo.

(c) O custo real da fabricação do qüinquagésimo primeiro brinquedo será $C(51) - C(50)$ e

$$\begin{aligned} C(51) - C(50) & [110 + 4(51) + 0{,}02(51)^2] - [110 + 4(50) + 0{,}02(50)^2] \\ &= 366{,}02 - 360 \\ &= 6{,}02 \end{aligned}$$

Note que as respostas em (b) e (c) diferem por 0,02. Esta discrepância ocorre porque o custo marginal é a taxa de variação instantânea de $C(x)$ em relação a uma unidade de variação em x. Assim, $C'(50)$ é o número aproximado da quantia em dinheiro gasta na produção do qüinquagésimo primeiro brinquedo. ◀

Observe que o cálculo de $C'(50)$ é muito mais simples do que o cálculo de $C(51) - C(50)$. Os economistas, freqüentemente, aproximam o custo da produção de uma unidade adicional usando a função custo marginal. Especificamente, $C'(k)$ é o custo aproximado da $(k + 1)$ésima unidade depois que as k primeiras unidades foram produzidas.

Outra função importante em Economia é a **função rendimento total**, denotada por R, e

$$R(x) = px$$

onde $R(x)$ é o rendimento total recebido quando x unidades são vendidas à quantia de p por unidade.

O **rendimento marginal**, quando $x = x_1$, é dado por $R'(x_1)$, se existir. A função R' é chamada **função rendimento marginal**. $R'(x_1)$ pode ser positivo, negativo ou zero, e pode ser interpretado como a taxa de variação do rendimento total quando x_1 unidades são vendidas. $R'(k)$ é o rendimento aproximado da venda da $(k + 1)$ésima unidade depois que k unidades tiverem sido vendidas.

EXEMPLO 5 Suponha que $R(x)$ seja o rendimento total recebido pela venda de x mesas e

$$R(x) = 300x - \tfrac{1}{2}x^2$$

Ache (a) a função rendimento marginal; (b) o rendimento marginal quando $x = 40$; (c) o rendimento real da venda da quadragésima primeira mesa.

Solução (a) A função rendimento marginal é R' e

$$R'(x) = 300 - x$$

(b) O rendimento marginal quando $x = 40$ é dado por $R'(40)$ e

$$\begin{aligned} R'(40) &= 300 - 40 \\ &= 260 \end{aligned}$$

Logo, a taxa de variação do rendimento total quando 40 mesas são vendidas é de \$260 por unidade

(c) O rendimento real da venda da quadragésima primeira mesa é $R(41) - R(40)$ e

$$R(41) - R(40) = \left[300(41) - \frac{(41)^2}{2}\right] - \left[300(40) - \frac{(40)^2}{2}\right]$$

$$= [12.300 - 840{,}50] - [12.000 - 800]$$
$$= 11.459{,}50 - 11.200$$
$$= 259{,}50$$

Logo, o rendimento real da venda da quadragésima primeira mesa é \$259,50.

Observe que na parte (b) do Exemplo 5 obtivemos $R'(40) = 260$, e \$260 é uma aproximação do rendimento recebido da venda da quadragésima primeira mesa, que de (c) é \$259,50.

EXERCÍCIOS 3.4

Nos Exercícios de 1 a 8, uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a equação dada, onde s cm é a distância orientada da partícula a partir do ponto O em t s. Ache a velocidade instantânea v(t) cm/s em t s e então ache $v(t_1)$ para o valor de t_1 dado.

1. $s = 3t^2 + 1;\ t_1 = 3$
2. $s = 8 - t^2;\ t_1 = 5$
3. $s = \dfrac{1}{4t};\ t_1 = \frac{1}{2}$
4. $s = \dfrac{3}{t^2};\ t_1 = -2$
5. $s = 2t^3 - t^2 + 5;\ t_1 = -1$
6. $s = 4t^3 + 2t - 1;\ t_1 = \frac{1}{2}$
7. $s = \dfrac{2t}{4+t};\ t_1 = 0$
8. $s = \dfrac{1}{t} + \dfrac{3}{t^2};\ t_1 = 2$

Nos Exercícios de 9 a 14, o movimento de uma partícula é ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a equação dada, onde s cm é a distância orientada da partícula a partir do ponto O, em t s. A direção positiva é à direita. Determine os intervalos de tempo em que a partícula move-se para a direita e para a esquerda. Determine também quando a partícula reverte o sentido do movimento. Mostre o comportamento do movimento através de uma figura similar à Figura 2 e escolha valores de t ao acaso, mas inclua os valores de t em que a partícula muda o sentido do movimento.

9. $s = t^3 + 3t^2 - 9t + 4$
10. $s = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 8$
11. $s = \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 2t + 4$
12. $s = \dfrac{t}{1+t^2}$
13. $s = \dfrac{t}{9+t^2}$
14. $s = \dfrac{t+1}{t^2+4}$
15. Um objeto cai do repouso de acordo com a equação $s = -16t^2$, onde s cm é a distância do objeto ao ponto de partida em t s e o sentido positivo é para cima. Se uma pedra caí de um edifício com 2560 cm de altura, ache (a) a velocidade instantânea da pedra 1s depois de iniciada a queda; (b) a velocidade instantânea da pedra 2 s depois da queda; (c) quanto tempo leva para a pedra atingir o solo; (d) a velocidade instantânea da pedra quando ela atinge o solo.
16. Uma pedra cai de uma altura de 64 m. Se s m for a altura da pedra t s após ter iniciado a queda, então $s = -16t^2 + 64$. (a) Quanto tempo leva para a pedra atingir o solo? (b) Ache a velocidade instantânea da pedra quando ela atingir o solo.
17. Uma bola de bilhar é atingida e movimenta-se em linha reta. Se s cm for a distância da bola de sua posição inicial após t s, então $s = 100t^2 + 100t$. Com qual velocidade a bola atingirá a tabela da posição inicial que está a 39 cm?
18. Se uma pedra for atirada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 32 cm/s, então $s = -16t^2 + 32t$, onde s cm é a distância da pedra ao ponto inicial, em t s e o sentido positivo é para cima. Ache (a) a velocidade média da pedra no intervalo de tempo $\frac{3}{4} \leqslant t \leqslant \frac{5}{4}$; (b) a velocidade instantânea da pedra em $t = \frac{3}{4}$ s e em $t = \frac{5}{4}$ s; (c) a velocidade escalar da pedra em $t = \frac{3}{4}$ s e em $t = \frac{5}{4}$ s; (d) a velocidade média no intervalo de tempo $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3}{4}$; (e) quantos segundos irão decorrer até que a pedra atinja o ponto mais alto; (f) qual a altura máxima atingida; (g) quantos segundos irão decorrer até que a pedra chegue ao chão; (h) a velocidade instantânea da pedra quando ela atingir o solo. Mostre o comportamento do movimento através de uma figura similar à Figura 3.
19. Se uma bola for impulsionada de tal forma que ela adquira uma velocidade inicial de 24 cm/s ao descer um certo plano inclinado, então $s = 24t + 10t^2$, onde s cm é a distância da bola ao ponto inicial em t s e o sentido positivo é o de descida do plano inclinado. (a) Qual será a velocidade instantânea da bola em t_1 s? (b) Quanto tempo levará para que a velocidade aumente para 48 cm/s?
20. Um foguete é lançado verticalmente para cima e após t s ele está a s m do solo, onde $s = 560t - 16t^2$ e o sentido positivo é para cima. Ache (a) a velocidade do foguete 2 s após o lançamento e (b) quanto tempo levará para o foguete atingir sua altura máxima.
21. Se $A(x)$ cm^2 for a área de um quadrado e s cm for o comprimento de cada lado, ache a taxa de variação média de $A(x)$ em relação a x, quando x varia de (a) 4,000 a 4,600; (b) 4,000 a 4,300; (c) 4,000 a 4,100; (d) 4,000 a 4,050. (e) Qual será a taxa instantânea de variação de $A(x)$ com relação a x, quando x for 4,000?
22. O comprimento de um retângulo é 4 cm a mais do que sua largura e essa diferença de 4 cm mantém-se quando o retângulo aumenta de tamanho. Se $A(w)$ cm^2 for a área do retângulo e w cm for a largura, ache a taxa média de variação de $A(w)$ com respeito a w, quando w varia de (a) 3,000 a 3,200;

(b) 3,000 a 3,100; (c) 3,000 a 3,010; (d) 3,000 a 3,001. (e) Qual a taxa de variação instantânea de $A(w)$ com relação a w_1 quando w for 3?

23. A lei de Boyle para a expansão de um gás é $PV = C$, onde P é a pressão em quilogramas força por unidade de área, V é o número de unidades de volume do gás e C é uma constante. Mostre que V decresce a única taxa proporcional ao inverso do quadrado de P.

24. Da lei de Boyle para a expansão de um gás, dada no Exercício 23, ache a taxa de variação instantânea de V em relação a P, quando $P = 4$ e $V = 8$.

25. Uma frente fria aproxima-se de uma região. A temperatura é T graus t horas após a meia-noite e

$$T = 0{,}1(400 - 40t + t^2) \qquad 0 \leqslant t \leqslant 12$$

(a) Ache a taxa de variação média de T em relação a t entre 5h e 6h; (b) ache a taxa de variação de T em relação a t às 5h.

26. Estima-se que um empregado de uma firma que faz molduras para quadros possa pintar y molduras x horas, após começar o trabalho às 8 horas da manhã e

$$y = 3x + 8x^2 - x^3 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 4$$

(a) Ache a taxa segundo a qual o empregado estará pintando às 10h; (b) ache o número de molduras que o empregado pinta entre 10h e 11h.

27. Se a água estiver sendo drenada de uma piscina e V litros for o volume de água na piscina t min após começar o escoamento, onde $V = 250\,(1600 - 80t + t^2)$, ache (a) a taxa média segundo a qual a água deixa a piscina durante os primeiros 5 min e (b) quão rápido a água está fluindo da piscina 5 min após o início do escoamento.

28. Um balão mantém a forma de uma esfera enquanto está sendo inflado. Ache a taxa de variação da área da superfície com respeito ao raio no instante em que o raio for 2 m.

29. A importância no custo total da fabricação de x relógios de uma certa fábrica é dada por $C(x) = 1500 + 3x + x^2$. Ache (a) a função custo marginal; (b) o custo marginal quando $x = 40$; (c) o custo real da fabricação do quadragésimo primeiro relógio.

30. Se $C(x)$ for o custo total da fabricação de x pesos de papel e

$$C(x) = 200 + \frac{50}{x} + \frac{x^2}{5}$$

ache (a) a função custo marginal; (b) o custo marginal quando $x = 10$; (c) o custo real da fabricação do décimo primeiro peso de papel.

31. Se $R(x)$ for o rendimento total recebido das vendas de x aparelhos de televisão e $R(x) = 600x - \frac{1}{20}x^3$, ache (a) a função rendimento marginal; (b) o rendimento marginal quando $x = 20$; (c) o rendimento real da venda da vigésima primeira televisão.

32. O rendimento total recebido da venda de x carteiras é $R(x)$, e $R(x) = 200x - \frac{1}{3}x^2$. Ache (a) a função rendimento marginal; (b) o rendimento marginal quando $x = 30$; (c) o rendimento real da venda trigésima primeira carteira.

*Nos Exercícios de 33 a 35, use o conceito de taxa relativa, definido como segue se $y = f(x)$, a **taxa relativa da variação de y** com relação a x em x_1 é dada por $\frac{f'(x_1)}{f(x_1)}$ ou, equivalentemente, $\frac{dy/dx}{y}$ calculada em $x = x_1$.*

33. O rendimento anual bruto de uma empresa t anos a partir de 1º de janeiro de 1988 é p milhões e $p = \frac{2}{5}t^2 + 2t + 10$. Ache (a) a taxa em que o rendimento bruto estava crescendo em 1º de janeiro de 1990; (b) a taxa de crescimento relativo do rendimento bruto em 1º de janeiro de 1990 com aproximação de um-décimo da percentagem; (c) a taxa em que o rendimento bruto deveria crescer em 1º de janeiro de 1994; (d) a taxa antecipada de crescimento relativo do rendimento bruto em 1º de janeiro de 1994 até 0,1 por cento.

34. Uma empresa inicia seus negócios em 1º de abril de 1987. Os rendimentos anuais brutos da firma após t anos de operação são de p, onde $p = 50.000 + 18.000\,t + 600t^2$. (a) Ache a taxa segundo a qual os rendimentos brutos cresceram em 1º de abril de 1989; (b) ache a taxa de crescimento relativo em 1º de abril de 1989, com aproximação de 0,1 por cento; (c) ache a taxa em que o rendimento bruto deverá estar crescendo em 1º de abril de 1997; (d) a taxa prevista de crescimento relativo do rendimento bruto em 1º de abril de 1997, com aproximação de 0,1 por cento.

35. Suponha que o número de pessoas da população de uma determinada cidade t anos após 1º de janeiro de 1986 será $40t^2 + 200t + 10.000$. (a) Ache a taxa segundo a qual a população terá crescido, em 1º de janeiro de 1995. (b) Ache a taxa de crescimento relativo da população, estimada em 1º de janeiro de 1995 com aproximação de 0,1%. (c) Ache a taxa segundo a qual a população estará crescendo em 1º de janeiro de 2001. (d) Ache a taxa de crescimento relativo da população, estimada em 1º de janeiro de 2001 com aproximação de 0,1 por cento.

36. Duas partículas A e B movem-se para a direita numa reta horizontal e partem de um ponto O. Seja s cm a distância orientada do ponto O em t s. As equações de movimento são

$$s = 4t^2 + 5t \quad \text{(para a partícula } A)$$
$$s = 7t^2 + 3t \quad \text{(para a partícula } B)$$

Se $t = 0$ no começo, para que valores de t a velocidade da partícula A supera a velocidade de B?

37. O lucro de um varejista é \$100y quando são gastos diariamente \$$x$ em propaganda e $y = 2.500 + 36x - 0{,}2x^2$. Use a derivada para determinar se seria lucrativo aumentar a verba de propaganda, considerando a verba diária de propaganda (a) \$60 e (b) \$ 300. (c) Qual seria o valor máximo de x abaixo do qual seria lucrativo aumentar a verba de propaganda?

38. Mostre que para toda função linear f, a taxa média de variação de $f(x)$ quando x varia de x_1 até $x_1 + k$ é a mesma que a taxa de variação instantânea $f(x)$ em x_1.

3.5 DERIVADAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Para mostrar que a função seno tem uma derivada, aplicamos a identidade trigonométrica

$$\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\,a \cos b + \cos a\,\text{sen}\,b \tag{1}$$

bem como os Teoremas 2.8.2 e 2.8.5

Seja f a função seno, assim

$$f(x) = \text{sen}\,x$$

Da definição de derivada,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen}\,x}{\Delta x} \end{aligned}$$

A fórmula (1) para $\text{sen}(x + \Delta x)$ é usada para obter

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}\,x \cos(\Delta x) + \cos x\,\text{sen}(\Delta x) - \text{sen}\,x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}\,x[\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x\,\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \\ &= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x}\left(\lim_{\Delta x \to 0} \text{sen}\,x\right) + \left(\lim_{\Delta x \to 0} \cos x\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \end{aligned} \tag{2}$$

Do Teorema 2.8.5,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x} = 0 \tag{3}$$

e do Teorema 2.8.2,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} = 1 \tag{4}$$

Substituindo (3) e (4) em (2), obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= -0 \cdot \text{sen}\,x + \cos x \cdot 1 \\ &= \cos x \end{aligned}$$

Provamos, assim, o seguinte teorema:

3.5.1 TEOREMA $\boxed{D_x(\text{sen}\,x) = \cos x}$

EXEMPLO 1 Ache $f'(x)$ se

$$f(x) = x^2\,\text{sen}\,x$$

Solução Encontramos a derivada do produto de duas funções aplicando o Teorema 3.3.6.

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 D_x(\text{sen}\,x) + D_x(x^2)\,\text{sen}\,x \\ &= x^2 \cos x + 2x\,\text{sen}\,x \end{aligned}$$

Para encontrar a derivada da função co-seno, procedemos da mesma forma que com a função seno. Aqui aplicamos a identidade

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \tag{5}$$

Se g for a função co-seno, então

$$g(x) = \cos x$$

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

A fórmula (5) para $\cos(x + \Delta x)$ é usada para obter

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \cos(\Delta x) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x[\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x}\left(\lim_{\Delta x \to 0} \cos x\right) - \left(\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen} x\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \tag{6}$$

Substituindo (3) e (4) em (6), obtemos

$$g'(x) = -0 \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot 1$$
$$= -\operatorname{sen} x$$

O teorema a seguir foi, então, provado.

3.5.2 TEOREMA $D_x(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

EXEMPLO 2 Ache $\dfrac{dy}{dx}$ se

$$y = \frac{\operatorname{sen} x}{1 - 2\cos x}$$

Solução Aplicamos o Teorema 3.3.7 (derivada de um quociente).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - 2\cos x)\, D_x(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \cdot D_x(1 - 2\cos x)}{(1 - 2\cos x)^2}$$

$$= \frac{(1 - 2\cos x)(\cos x) - \operatorname{sen} x(2 \operatorname{sen} x)}{(1 - 2\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x - 2(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)}{(1 - 2\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x - 2}{(1 - 2\cos x)^2}$$

As derivadas das funções tangente, co-tangente, secante e co-secante são obtidas de identidades trigonométricas envolvendo o seno e o co-seno, bem como suas derivadas e teoremas sobre derivação. Para a derivada da tangente aplicamos as identidades

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

3.5.3 TEOREMA $\boxed{D_x(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x}$

Prova

$$\begin{aligned} D_x(\operatorname{tg} x) &= D_x\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) \\ &= \frac{\cos x \cdot D_x(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \cdot D_x(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \sec^2 x \end{aligned}$$

■

3.5.4 TEOREMA $\boxed{D_x(\operatorname{cotg} x) = -\operatorname{cosec}^2 x}$

A demonstração desse teorema será deixada como exercício (veja o Exercício 1). Ela é análoga à do Teorema 3.5.3. As seguintes identidades serão usadas:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

3.5.5 TEOREMA $\boxed{D_x(\sec x) = \sec x \operatorname{tg} x}$

Prova

$$\begin{aligned} D_x(\sec x) &= D_x\left(\frac{1}{\cos x}\right) \\ &= \frac{\cos x \cdot D_x(1) - 1 \cdot D_x(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cdot 0 - 1 \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \\ &= \sec x \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

■

EXEMPLO 3 Calcule

$$\frac{d}{dx}(\text{tg } x \sec x)$$

Solução

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\text{tg } x \sec x) &= \text{tg } x \cdot \frac{d}{dx}(\sec x) + \frac{d}{dx}(\text{tg } x) \cdot \sec x \\ &= \text{tg } x(\sec x \text{ tg } x) + \sec^2 x(\sec x) \\ &= \sec x \text{ tg}^2 x + \sec^3 x\end{aligned}$$

3.5.6 TEOREMA $D_x(\text{cosec } x) = -\text{cosec } x \text{ cotg } x$

A demonstração desse teorema também será deixada como exercício (veja o Exercício 2).

Num curso de Trigonometria, os gráficos das funções são esboçados por meio de considerações intuitivas. Podemos agora obter esses gráficos de uma maneira mais formal, usando as derivadas das funções trigonométricas. Primeiro discutiremos os gráficos do seno e do co-seno. Para cada uma dessas funções o domínio será o conjunto de todos os números reais e a imagem será $[-1,1]$. Seja

$$f(x) = \text{sen } x \quad f'(x) = \cos x$$

Para determinar onde o gráfico tem uma tangente horizontal, resolvemos $f'(x) = 0$ e obtemos $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, onde k é qualquer inteiro. Para esses valores de x, sen x é $+1$ ou -1 e esses são o maior e o menor valor que sen x assume. O gráfico intercepta o eixo x nos pontos onde sen $x = 0$, isto é, nos pontos $x = k\pi$, onde k é qualquer inteiro. Além disso, quando k for um inteiro par, $f'(k\pi) = 1$ e quando k for um inteiro ímpar, $f'(k\pi) = -1$. Assim, nos pontos de intersecção do gráfico com o eixo x, a inclinação da reta tangente é $+1$ ou -1. Dessas informações traçamos o esboço do gráfico da função seno, mostrado na Figura 1.

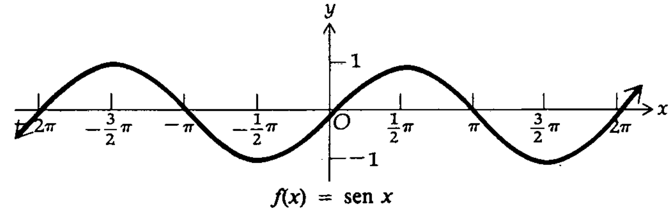


FIGURA 1

Para o gráfico da função co-seno, usamos a identidade

$$\cos x = \text{sen}(x + \tfrac{1}{2}\pi)$$

Assim, o gráfico do co-seno é obtido do gráfico do seno, transladando o eixo y $\frac{\pi}{2}$ unidades para a direita. Veja a Figura 2.

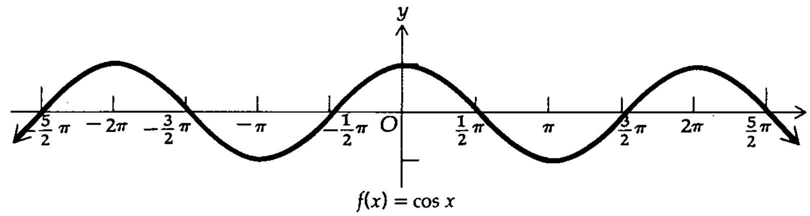


FIGURA 2

EXEMPLO 4 Ache uma equação da reta tangente ao gráfico da função co-seno no ponto $(\frac{3}{2}\pi, 0)$.

Solução Se $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\text{sen } x$. Então, $f'(\frac{3}{2}\pi) = -\text{sen } \frac{3}{2}\pi$. Como $\text{sen } \frac{3}{2}\pi = -1$, $f'(\frac{3}{2}\pi) = 1$. Da forma ponto-inclinação da equação da reta tangente tendo inclinação 1 e passando pelo ponto $(\frac{3}{2}\pi, 0)$, temos

$$y - 0 = 1(x - \tfrac{3}{2}\pi)$$
$$y = x - \tfrac{3}{2}\pi$$

Consideremos agora o gráfico da função tangente. Como

$$\text{tg}(-x) = -\text{tg } x$$

o gráfico é simétrico com respeito à origem. Além disso,

$$\text{tg}(x + \pi) = \text{tg } x$$

e assim, a função tangente é periódica, com período fundamental π. A função tangente é contínua em todos os números de seu domínio, o qual é o conjunto de todo os números reais, exceto aqueles da forma $\frac{1}{2}\pi + k\pi$, onde k é qualquer inteiro. A imagem é o conjunto de todos os números reais. Se k for um inteiro qualquer, $\text{tg } k\pi = 0$. Logo, o gráfico intercepta o eixo x nos pontos $(k\pi, 0)$. Seja

$$f(x) = \text{tg } x \qquad f'(x) = \sec^2 x$$

Como $f'(k\pi) = \sec^2 k\pi$ e $\sec^2 k\pi = 1$ para todo k inteiro, segue que onde o gráfico intercepta o eixo x, a inclinação da reta tangente é 1. Resolvendo $f'(x) = 0$ temos $\sec^2 x = 0$. Como $\sec^2 x \geqslant 1$ para todo x, concluímos que não existem retas tangentes horizontais.

Consideremos o intervalo $[0, \frac{\pi}{2})$ no qual a tangente está definida,

$$\lim_{x \to \pi/2^-} \text{tg } x = \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

Como $\lim_{x \to \pi/2^-} \text{sen } x = 1$ e $\lim_{x \to \pi/2^-} \cos x = 0$, onde o $\cos x$ está tendendo a zero através de valores positivos,

$$\lim_{x \to \pi/2^-} \text{tg } x = +\infty$$

Logo, a reta $x = \pi/2$ é uma assíntota vertical do gráfico. Na Tabela 1 estão alguns valores de x no intervalo $[0, \frac{\pi}{2})$ e os valores correspondentes de $\text{tg } x$. Colocando num gráfico os pontos com coordenadas $(x, \text{tg } x)$, obtemos uma parte do gráfico, para x em $[0, \frac{1}{3}\pi]$.

Tabela 1

x	$\text{tg } x$
0	0
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58$
$\frac{1}{4}\pi$	1
$\frac{1}{3}\pi$	$\sqrt{3} \approx 1{,}73$

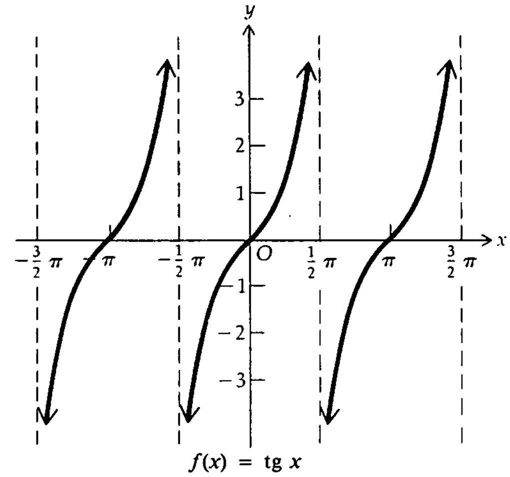


FIGURA 3

Considerando a simetria da função tangente com relação à origem, obtemos a parte do gráfico para x em $(-\frac{1}{2}\pi, 0]$. O período sendo π, completamos o gráfico que é mostrado na Figura 3.

Podemos obter o gráfico da função co-tangente a partir daquele da função tangente, usando a identidade

$$\text{cotg } x = -\text{tg }(\tfrac{\pi}{2} + x)$$

Da identidade acima, vemos que o gráfico da co-tangente é obtido do gráfico da tangente, transladando o eixo y em $\frac{\pi}{2}$ unidades e fazendo em seguida uma reflexão ao eixo x. Um esboço do gráfico da função co-tangente está na Figura 4.

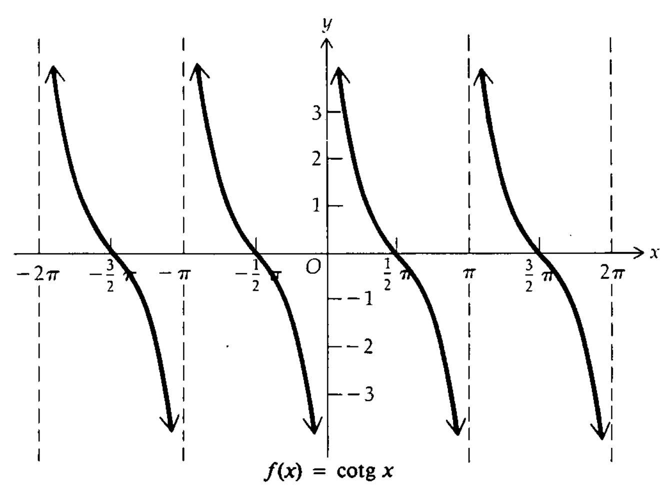


FIGURA 4

Como

$$\sec(x + 2\pi) = \sec x$$

a função secante é períodica, com período fundamental 2π. O domínio da função secante é o conjunto dos números reais, exceto aqueles da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, onde k é qualquer inteiro. A imagem é $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. A função é contínua em todos os números em seu domínio. Não há intersecção do gráfico com o eixo x, pois $\sec x$ não se anula nunca.

Usaremos a derivada para determinar se o gráfico tem alguma tangente horizontal. Seja

$$f(x) = \sec x \qquad f'(x) = \sec x \operatorname{tg} x$$

Resolvendo $f'(x) = 0$, resulta que $\sec x \operatorname{tg} x = 0$. Como $\sec x \neq 0$, $f'(x) = 0$ quando $\operatorname{tg} x = 0$, isto é, quando $x = k\pi$, onde k é um inteiro qualquer.

Primeiro vamos considerar o gráfico para x em $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$. Existem retas tangentes horizontais em $x = 0$ e $x = \pi$.

$$\lim_{x\to-\pi/2^+} \sec x = \lim_{x\to-\pi/2^+} \frac{1}{\cos x} = +\infty \qquad \lim_{x\to\pi/2^-} \sec x = \lim_{x\to\pi/2^-} \frac{1}{\cos x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\pi/2^+} \sec x = \lim_{x\to\pi/2^+} \frac{1}{\cos x} = -\infty \qquad \lim_{x\to3\pi/2^-} \sec x = \lim_{x\to3\pi/2^-} \frac{1}{\cos x} = -\infty$$

Logo, as retas $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$ são assíntotas verticais do gráfico.

Com as informações acima e marcando no gráfico alguns pontos, obtemos um esboço do gráfico da função secante para x em $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Como o período é 2π, um esboço do gráfico está na Figura 5.

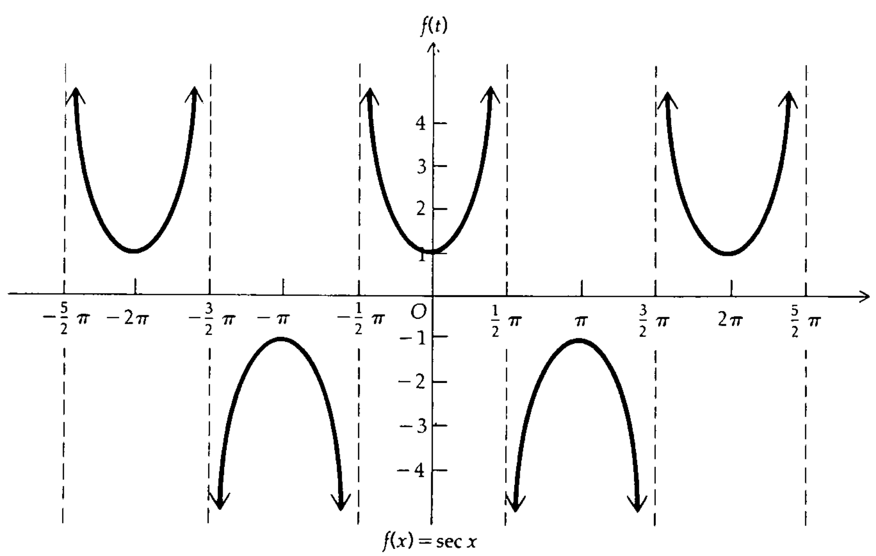
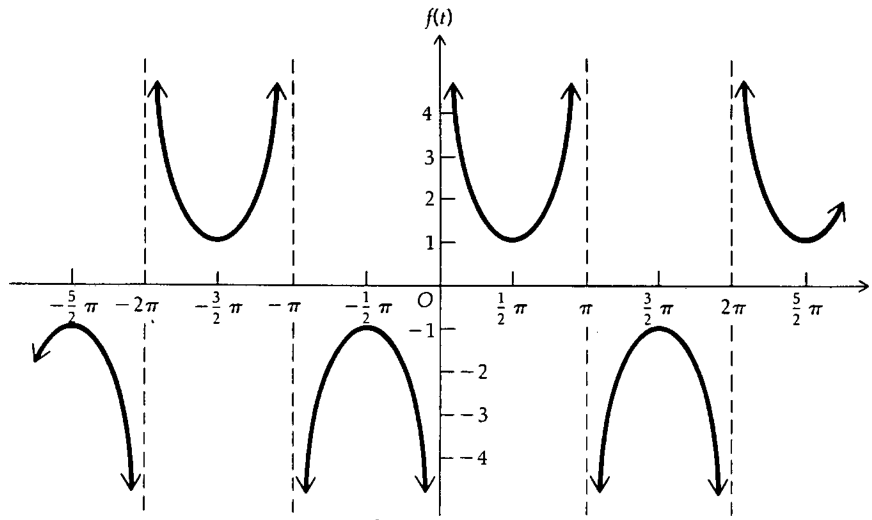


FIGURA 5

Da identidade

$$\operatorname{cosec} x = \sec (x - \tfrac{\pi}{2})$$

Obtemos o gráfico da função co-secante a partir daquele da secante, transladando o eixo y em $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda. Um esboço do gráfico da função co-secante está na Figura 6.



$f(x) = \text{cosec } x$

FIGURA 6

EXERCÍCIOS 3.5

1. Prove: $D_x(\text{cotg } x) = -\text{cosec}^2 x$.
2. Prove: $D_x(\text{cosec } x) = -\text{cosec } x \text{ cotg } x$.

Nos Exercícios de 3 a 16, ache a derivada da função dada.

3. $f(x) = 3 \text{ sen } x$
4. $g(x) = \text{sen } x + \cos x$
5. $g(x) \text{ tg } x + \text{cotg } x$
6. $f(x) = 4 \sec x - 2 \text{ cosec } x$
7. $f(x) = 2t \cos t$
8. $f(x) = 4x^2 \cos x$
9. $g(x) = x \text{ sen } x + \cos x$
10. $g(y) = 3 \text{ sen } y - y \cos y$
11. $h(x) = 4 \text{ sen } x \cos x$
12. $f(x) = x^2 \text{ sen } x + 2x \cos x$
13. $f(x) = x^2 \cos x - 2x \text{ sen } x - 2 \cos x$
14. $h(y) = y^3 - y^2 \cos y + 2y \text{ sen } y + 2 \cos y$
15. $f(x) = 3 \sec x \text{ tg } x$
16. $f(t) = \text{sen } t \text{ tg } t$

Nos Exercícios de 17 a 30, calcule a derivada indicada.

17. $D_y(\text{cotg } y \text{ cosec } y)$
18. $D_x(\cos x \text{ cotg } x)$
19. $D_z\left(\dfrac{2 \cos z}{z + 1}\right)$
20. $D_t\left(\dfrac{\text{sen } t}{t}\right)$
21. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\text{sen } x}{1 - \cos x}\right)$
22. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x + 4}{\cos x}\right)$
23. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\text{tg } t}{\cos t - 4}\right)$
24. $\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{\text{cotg } y}{1 - \text{sen } y}\right)$
25. $\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1 + \text{sen } y}{1 - \text{sen } y}\right)$
26. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\text{sen } x - 1}{\cos x + 1}\right)$
27. $D_x[(x - \text{sen } x)(x + \cos x)]$
28. $D_z[(z^2 + \cos z)(2z - \text{sen } z)]$
29. $D_t\left(\dfrac{2 \text{ cosec } t - 1}{\text{cosec } t + 2}\right)$
30. $D_y\left(\dfrac{\text{tg } y + 1}{\text{tg } y - 1}\right)$

Nos Exercícios de 31 a 42, ache $f'(a)$ para o valor de $f'(a)$.

31. $f(x) = x \cos x$; $a = 0$
32. $f(x) = x \text{ sen } x$; $a = \frac{3}{2}\pi$
33. $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$; $a = \frac{1}{2}\pi$
34. $f(x) = \dfrac{\sec x}{x^2}$; $a = \pi$
35. $f(x) = x^2 \text{ tg } x$; $a = \pi$
36. $f(x) = x^2 \cos x - \text{sen } x$; $a = 0$
37. $f(x) = \text{sen } x(\cos x - 1)$; $a = \pi$
38. $f(x) = (\cos x + 1)(x \text{ sen } x - 1)$; $a = \frac{1}{2}\pi$
39. $f(x) = x \cos x + x \text{ sen } x$; $a = \frac{1}{4}\pi$
40. $f(x) = \text{tg } x + \sec x$; $a = \frac{1}{6}\pi$
41. $f(x) = 2 \text{ cotg } x - \text{cosec } x$; $a = \frac{2}{3}\pi$
42. $f(x) = \dfrac{1}{\text{cotg } x - 1}$; $a = \frac{3}{4}\pi$

43. (a) Use uma calculadora para tabular até quatro casas decimais, valores de $\dfrac{\text{sen}(\frac{1}{3}\pi + h) - \text{sen } \frac{1}{3}\pi}{h}$ quando h é 1; 0,5; 0,1; 0,01; 0,001 e h é -1; $-0{,}5$; $-0{,}1$; $-0{,}01$; $-0{,}001$. A que o quociente parece tender quando h se aproxima de 0? (b) Ache $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\text{sen}(\frac{1}{3}\pi + h) - \text{sen } \frac{1}{3}\pi}{h}$, interpretando-o como uma derivada.

44. (a) Use uma calculadora para tabular até quatro casas decimais valores de $\dfrac{\cos(\frac{5}{6}\pi + h) - \cos \frac{5}{6}\pi}{h}$ quando h é 1; 0,5; 0,1; 0,01; 0,001 e h é -1; $-0{,}5$; $-0{,}1$; $-0{,}01$; $-0{,}001$. A que o quociente parece estar tendendo quando se aproxima de 0? (b) Ache $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(\frac{5}{6}\pi + h) - \cos \frac{5}{6}\pi}{h}$, interpretando-o como uma derivada.

45. (a) Use uma calculadora para tabular até quatro casas decimais valores de $\dfrac{\text{tg}(\frac{1}{4}\pi + h) - \text{tg}\,\frac{1}{4}\pi}{h}$ quando h é 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001, e h é $-0,1$; $-0,01$; $-0,001$; $-0,0001$; $-0,00001$. A que o quociente parece tender quando h aproxima-se de zero? (b) Ache $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\tan(\frac{1}{4}\pi + h) - \tan\frac{1}{4}\pi}{h}$, interpretando-o como uma derivada.

46. (a) Use uma calculadora para tabular até quatro casas decimais os valores de $\dfrac{\sec(\frac{1}{6}\pi + h) - \sec\frac{1}{6}\pi}{h}$ quando h é 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001 e h é $-0,1$; $-0,01$; $-0,001$; $-0,0001$; $-0,00001$. A que o quociente parece tender quando h aproxima-se de 0? (b) Ache $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sec(\frac{1}{6}\pi + h) - \sec\frac{1}{6}\pi}{h}$, interpretando-o como uma derivada.

47. (a) Use uma calculadora para tabular até quatro casas decimais os valores de $\dfrac{\cos x - \cos\frac{1}{6}\pi}{x - \frac{1}{6}\pi}$ quando x é $\frac{3}{20}\pi$, $\frac{19}{120}\pi$, $\frac{33}{200}\pi$, $\frac{199}{1200}\pi$, $\frac{333}{2000}\pi$ e x é $\frac{11}{60}\pi$, $\frac{7}{40}\pi$, $\frac{101}{600}\pi$, $\frac{67}{400}\pi$, $\frac{1001}{6000}\pi$. A que o quociente parece tender quando x se aproxima de $\frac{\pi}{6}$? (b) Ache $\lim\limits_{x \to \pi/6} \dfrac{\cos x - \cos\frac{1}{6}\pi}{x - \frac{1}{6}\pi}$, interpretando-o como uma derivada.

48. (a) Use uma calculadora para tabular, até quatro casas decimais, os valores de $\dfrac{\text{sen}\, x - \text{sen}\,\frac{1}{3}\pi}{x - \frac{1}{3}\pi}$ quando x é $\frac{3}{10}\pi$, $\frac{19}{60}\pi$, $\frac{33}{100}\pi$, $\frac{199}{600}\pi$, $\frac{333}{1000}\pi$ e x é $\frac{11}{30}\pi$, $\frac{7}{20}\pi$, $\frac{101}{300}\pi$, $\frac{67}{200}\pi$, $\frac{1001}{3000}\pi$. A que o quociente parece tender quando x se aproxima de $\frac{\pi}{3}$? (b) Ache $\lim\limits_{x \to \pi/3} \dfrac{\text{sen}\, x - \text{sen}\,\frac{1}{3}\pi}{x - \frac{1}{3}\pi}$ interpretando-o como uma derivada.

49. (a) Use uma calculadora para tabular até quatro casas decimais os valores de $\dfrac{\text{cosec}\, x - \text{cosec}\,\frac{2}{3}\pi}{x - \frac{2}{3}\pi}$ quando, x é $\frac{3}{5}\pi$, $\frac{19}{30}\pi$, $\frac{33}{50}\pi$, $\frac{199}{300}\pi$, $\frac{333}{500}\pi$ e x é $\frac{11}{15}\pi$, $\frac{7}{10}\pi$, $\frac{101}{150}\pi$, $\frac{67}{100}\pi$, $\frac{1001}{1500}\pi$. A que parece tender o quociente quando x se aproxima de $\frac{2}{3}\pi$? (b) Ache $\lim\limits_{x \to 2\pi/3} \dfrac{\text{cosec}\, x - \text{cosec}\,\frac{2}{3}\pi}{x - \frac{2}{3}\pi}$ interpretando-o como uma derivada.

50. (a) Use uma calculadora para tabular, até quatro casas decimais, os valores de $\dfrac{\text{cotg}\, x - \text{cotg}\,\frac{3}{4}\pi}{x - \frac{3}{4}\pi}$ quando x é $\frac{29}{40}\pi$, $\frac{59}{80}\pi$, $\frac{299}{400}\pi$, $\frac{599}{800}\pi$, $\frac{2999}{4000}\pi$ e x é $\frac{31}{40}\pi$, $\frac{61}{80}\pi$, $\frac{301}{400}\pi$, $\frac{601}{800}\pi$, $\frac{3001}{4000}\pi$. A que o quociente parece tender quando x se aproxima de $\frac{3}{4}\pi$? (b) Ache $\lim\limits_{x \to 3\pi/4} \dfrac{\text{cotg}\, x - \text{cotg}\,\frac{3}{4}\pi}{x - \frac{3}{4}\pi}$, interpretando-o como uma derivada.

51. Ache uma equação da reta tangente ao gráfico da função seno no ponto (a) $x = 0$; (b) $x = \frac{\pi}{3}$; (c) $x = \pi$.

52. Ache uma equação da reta tangente ao gráfico da função coseno no ponto (a) $x = \frac{\pi}{2}$; (b) $x = -\frac{\pi}{2}$; (c) $x = \frac{\pi}{6}$.

53. Ache uma equação da reta tangente ao gráfico da função tangente no ponto (a) $x = 0$; (b) $x = \frac{\pi}{4}$; (c) $x = -\frac{\pi}{4}$.

54. Ache uma equação da reta tangente ao gráfico da função secante no ponto (a) $x = \frac{\pi}{4}$; (b) $x = -\frac{\pi}{4}$; (c) $x = \frac{3}{4}\pi$.

Nos Exercícios de 55 a 58, uma partícula move-se ao longo de uma linha reta de acordo com a equação dada, onde s cm é a distância orientada da partícula, da origem, em t s.
(a) Qual a velocidade instantânea da partícula em t s?
(b) Ache a velocidade instantânea da partícula em t_1 s para cada um dos valores de t_1.

55. $s = 4\,\text{sen}\, t$; t_1 é 0, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$ e π

56. $s = 6\cos t$; t_1 é 0, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$ e π

57. $s = -3\cos t$; t_1 é 0, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$ e π

58. $s = -\frac{1}{2}\,\text{sen}\, t$; t_1 é 0, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$ e π

59. Se um corpo com W kgf de peso é arrastado por um piso horizontal por uma força de F kgf de magnitude e numa direção que faz com o chão um ângulo de θ rad, F será dada por

$$F = \frac{kW}{k\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta}$$

onde k é uma constante chamada de coeficiente de atrito. Se $k = 0,5$, ache a taxa de variação instantânea de F em relação a θ quando (a) $\theta = \frac{\pi}{4}$; (b) $\theta = \frac{\pi}{2}$.

60. Um projétil é atirado por uma arma com um ângulo de elevação cuja medida em radianos é $\frac{1}{2}\alpha$ e com uma velocidade inicial de v_0 m/s. Se R m for o alcance do projétil, então

$$R = \frac{v_0^2}{g}\,\text{sen}\,\alpha \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$$

onde g m/s² é a aceleração devido à gravidade. (a) Se $v_0 = 480$, ache a taxa de variação de R com respeito a α quando $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (isto é, o ângulo de elevação mede $\frac{\pi}{4}$ rad). Tome $g = 10$. (b) Ache os valores de α para os quais $D_\alpha R > 0$.

3.6 A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO COMPOSTA E A REGRA DA CADEIA

Para encontrar a derivada de uma função composta usamos um dos importantes teoremas do Cálculo chamado de *regra da cadeia*. Antes de enunciar esse teorema, vamos dar três ilustrações mostrando como teoremas anteriores podem ser usados para determinar as derivadas de algumas funções compostas. Em cada ilustração, a expressão final da derivada será escrita sob uma forma nova para você, de modo que possamos associá-la com a regra da cadeia.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Se

$$F(x) = (4x^2 + 1)^3$$

podemos obter $F'(x)$ aplicando duas vezes o Teorema 3.3.6 (a derivada de um produto). O cálculo é o seguinte:

$$\begin{aligned} F(x) &= (4x^2 + 1)^2(4x^2 + 1) \\ F'(x) &= (4x^2 + 1)^2 \cdot D_x(4x^2 + 1) + (4x^2 + 1) \cdot D_x[(4x^2 + 1)(4x^2 + 1)] \\ &= (4x^2 + 1)^2(8x) + (4x^2 + 1)[(4x^2 + 1)(8x) + (4x^2 + 1)(8x)] \\ &= (4x^2 + 1)^2(8x) + (4x^2 + 1)[2(4x^2 + 1)(8x)] \\ &= (4x^2 + 1)^2(8x) + 2[(4x^2 + 1)^2(8x)] \end{aligned}$$

Assim,

$$F'(x) = [3(4x^2 + 1)^2](8x) \tag{1}$$

Observe que F é a função composta $f \circ g$, onde $f(x) = x^3$ e $g(x) = 4x^2 + 1$; isto é,

$$\begin{aligned} F(x) &= f(g(x)) \\ &= f(4x^2 + 1) \\ &= (4x^2 + 1)^3 \end{aligned}$$

Como $f'(x) = 3x^2$ e $g'(x) = 8x$, temos de (1)

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x) \tag{2}$$

◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Se

$$G(x) = \operatorname{sen} 2x$$

então, para encontrar $G'(x)$, podemos usar as identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

e o Teorema 3.3.6. Temos

$$\begin{aligned} G(x) &= 2 \operatorname{sen} x \cos x \\ G'(x) &= (2 \operatorname{sen} x)\, D_x(\cos x) + (2 \cos x)\, D_x(\operatorname{sen} x) \\ &= (2 \operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x) + (2 \cos x)(\cos x) \\ &= 2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \end{aligned}$$

Logo,

$$G'(x) = (\cos 2x)(2) \tag{3}$$

Se tomamos $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = 2x$, então G é a função composta $f \circ g$, isto é,

$$\begin{aligned} G(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2x) \\ &= \operatorname{sen} 2x \end{aligned}$$

Como $f'(x) = \cos x$ e $g'(x) = 2$, podemos escrever (3) na forma

$$G'(x) = f'(g(x))g'(x) \tag{4}$$

◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Se

$$H(x) = (\cos x)^{-1}$$

podemos calcular $H'(x)$ usando primeiro a identidade $(\cos x)^{-1} = \sec x$

$$\begin{aligned} H(x) &= \sec x \\ H'(x) &= \sec x \operatorname{tg} x \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\text{sen } x}{\cos x} \\ &= (-1)\frac{1}{\cos^2 x}(-\text{sen } x) \end{aligned}$$

Logo,

$$H'(x) = [-1(\cos x)^{-2}](-\text{sen } x) \tag{5}$$

◀

Com $f(x) = x^{-1}$ e $g(x) = \cos x$, H é a função composta $f \circ g$; isto é,

$$\begin{aligned} H(x) &= f(g(x)) \\ &= f(\cos x) \\ &= (\cos x)^{-1} \end{aligned}$$

como $f'(x) = -1 \cdot x^{-2}$ e $g'(x) = -\text{sen } x$, podemos escrever (5) na forma

$$H'(x) = f'(g(x))g'(x) \tag{6}$$

Observe que os segundos membros de (2), (4) e (6) são todos $f'(g(x))\, g'(x)$, que é o segundo membro da *regra* da cadeia, enunciada no teorema a seguir.

3.6.1 TEOREMA
A Regra da Cadeia

Se a função g for derivável em x e a função f for derivável em $g(x)$, então a função composta $f \circ g$ será derivável em x, e

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x) \tag{7}$$

Antes de apresentarmos uma demonstração da regra da cadeia, vamos dar duas outras ilustrações mostrando sua aplicação.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Sejam

$$f(x) = x^{10} \qquad g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4$$

Então, a função composta $f \circ g$ definida por

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= (2x^3 - 5x^2 + 4)^{10} \end{aligned}$$

Para aplicar (7), precisamos calcular $f'(g(x))$ e $g'(x)$. Como $f(x) = x^{10}$, $f'(x) = 10x^9$; assim

$$f'(g(x)) = 10[g(x)]^9$$

$$f'(g(x)) = 10(2x^3 - 5x^2 + 4)^9 \tag{8}$$

Além disso, como $g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4$,

$$g'(x) = 6x^2 - 10x \tag{9}$$

Logo, de (7), (8) e (9), temos

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x)\\ &= 10(2x^3 - 5x^2 + 4)^9(6x^2 - 10x)\end{aligned}$$ ◄

► **ILUSTRAÇÃO 5** Sejam

$$f(x) = \text{sen } x \qquad g(x) = x^2 + 3$$

Então, a função composta $f \circ g$ será definida por

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= \text{sen}(x^2 + 3)\end{aligned}$$

Calculamos $f'(g(x))$ e $g'(x)$. Como $f(x) = \text{sen } x$, $f'(x) = \cos x$. Logo,

$$f'(g(x)) = \cos[g(x)]$$

$$f'(g(x)) = \cos(x^2 + 3) \tag{10}$$

Como $g(x) = x^2 + 3$,

$$g'(x) = 2x \tag{11}$$

Assim, de (7), (10) e (11), obtemos

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x)\\ &= [\cos(x^2 + 3)](2x)\\ &= 2x\cos(x^2 + 3)\end{aligned}$$ ◄

► **ILUSTRAÇÃO 6** Suponha

$$h(x) = \left(\frac{2}{x-1}\right)^5$$

Para determinar $h'(x)$, seja

$$f(x) = x^5 \qquad g(x) = \frac{2}{x-1}$$

Então,

$$f'(x) = 5x^4 \qquad g'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

Como $h(x) = f(g(x))$, temos da regra da cadeia

$$\begin{aligned}h'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x)\\ &= 5\left(\frac{2}{x-1}\right)^4 \cdot \frac{-2}{(x-1)^2}\\ &= \frac{-160}{(x-1)^6}\end{aligned}$$ ◄

Ao calcular as derivadas pela regra da cadeia não escrevemos as funções f e g como fizemos nas Ilustrações 4, 5 e 6, mas nos lembramos de suas definições. Por exemplo, o cálculo na Ilustração 6 poderia ser escrito como

$$h(x) = \left(\frac{2}{x-1}\right)^5$$

$$h'(x) = 5\left(\frac{2}{x-1}\right)^4 \cdot D_x\left(\frac{2}{x-1}\right)$$

$$= 5\left(\frac{2}{x-1}\right)^4 \cdot \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-160}{(x-1)^6}$$

EXEMPLO 1 Encontre $f'(x)$ pela regra da cadeia, se

$$f(x) = \frac{1}{4x^3 + 5x^2 - 7x + 8}$$

Solução Escrevendo $f(x) = (4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^{-1}$ e aplicando a regra da cadeia, iremos obter

$$f'(x) = -1(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^{-2} \cdot D_x(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)$$

$$= -1(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^{-2}(12x^2 + 10x - 7)$$

$$= \frac{-12x^2 - 10x + 7}{(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^2}$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^4\right]$$

Solução Da regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^4\right] = 4\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^3 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)$$

$$= 4\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^3 \frac{(3x-1)(2) - (2x+1)(3)}{(3x-1)^2}$$

$$= \frac{4(2x+1)^3(-5)}{(3x-1)^5}$$

$$= -\frac{20(2x+1)^3}{(3x-1)^5}$$

Se a notação de Leibniz for usada para a derivada, a regra da cadeia poderá ser enunciada da seguinte forma:

Se y for uma função de u, definida por $y = f(u)$ e $\frac{dy}{du}$ existir, e se u for uma função de x, definida por $u = g(x)$ e $\frac{du}{dx}$ existir, então y será uma função de

x e $\dfrac{dy}{dx}$ existirá e será dada por

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}} \qquad (12)$$

Observe em (12) uma forma conveniente para memorizar a regra da cadeia. O enunciado formal sugere uma "divisão" simbólica de du no numerador e denominador do segundo membro. Entretanto, lembrando a Secção 3.1 quando foi introduzida a notação de Leibniz $\dfrac{dy}{dx}$, foi enfatizado que nem dy nem dx têm significados independentes. Logo, devemos considerar (12) como uma fórmula envolvendo a notação formal de derivação.

Outra maneira de escrever a regra da cadeia é fazer a substituição $u = g(x)$. Então

$$(f \circ g)(x) = f(u) \qquad (f \circ g)'(x) = D_x f(u) \qquad f'(g(x)) = f'(u) \qquad g'(x) = D_x u$$

com essas substituições (7) torna-se

$$\boxed{D_x[f(u)] = f'(u) D_x u}$$

Usaremos essa forma da regra da cadeia para enunciar fórmulas importantes de derivação. Se u for uma função derivável de x, temos dos Teoremas 3.5.1 — 3.5.6 as seguintes fórmulas envolvendo as derivadas das funções trigonométricas: se u for uma função derivável de x

$D_x(\text{sen } u) = \cos u \, D_x u$	$D_x(\cos u) = -\text{sen } u \, D_x u$
$D_x(\text{tg } u) = \sec^2 u \, D_x u$	$D_x(\text{cotg } u) = -\text{cosec}^2 u \, D_x u$
$D_x(\sec u) = \sec u \, tg\, u \, D_x u$	$D_x(\text{cosec } u) = -\text{cosec } u \text{ cotg } u \, D_x u$

EXEMPLO 3 Encontre $F'(t)$ se

$$F(t) = \text{tg}(3t^2 + 2t)$$

Solução Aplicamos a regra da cadeia,

$$\begin{aligned} F'(t) &= \sec^2(3t^2 + 2t) \cdot D_t(3t^2 + 2t) \\ &= \sec^2(3t^2 + 2t) \cdot (6t + 2) \\ &= 2(3t + 1) \sec^2(3t^2 + 2t) \end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Encontre $\dfrac{dy}{dx}$ se

$$y = \text{sen}(\cos x)$$

Solução Aplicamos a regra da cadeia.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \cos(\cos x)[D_x(\cos x)] \\ &= \cos(\cos x)[-\text{sen}\, x] \\ &= -\text{sen}\, x\, [\cos(\cos x)] \end{aligned}$$

EXEMPLO 5 Encontre $f'(x)$ se

$$f(x) = (3x^2 + 2)^2(x^2 - 5x)^3$$

Solução Consideremos f como o produto de duas funções g e h, onde

$$g(x) = (3x^2 + 2)^2 \qquad h(x) = (x^2 - 5x)^3$$

Do Teorema 3.3.6 para a derivada do produto de duas funções,

$$f'(x) = g(x)h'(x) + h(x)g'(x)$$

Encontramos $h'(x)$ e $g'(x)$ pela regra da cadeia.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^2 + 2)^2[3(x^2 - 5x)^2(2x - 5)] + (x^2 - 5x)^3[2(3x^2 + 2)(6x)] \\ &= 3(3x^2 + 2)(x^2 - 5x)^2[(3x^2 + 2)(2x - 5) + 4x(x^2 - 5x)] \\ &= 3(3x^2 + 2)(x^2 - 5x)^2[6x^3 - 15x^2 + 4x - 10 + 4x^3 - 20x^2] \\ &= 3(3x^2 + 2)(x^2 - 5x)^2(10x^3 - 35x^2 + 4x - 10) \end{aligned}$$

EXEMPLO 6 Calcule

$$D_x(\sec^4 2x^2)$$

Solução Usamos a regra da cadeia duas vezes.

$$\begin{aligned} D_x(\sec^4 2x^2) &= 4 \sec^3 2x^2[D_x(\sec 2x^2)] \\ &= 4 \sec^3 2x^2[(\sec 2x^2 \operatorname{tg} 2x^2)\, D_x(2x^2)] \\ &= (4 \sec^4 2x^2 \operatorname{tg} 2x^2)(4x) \\ &= 16x \sec^4 2x^2 \operatorname{tg} 2x^2 \end{aligned}$$

Vamos retornar agora à questão da demonstração da regra da cadeia. Uma parte importante da prova consiste em introduzir a nova função F que tem propriedades úteis. Esse recurso de "construção" de uma função é comum em Matemática.

Prova da Regra da Cadeia Seja x_1 qualquer número do domínio de g, tal que g seja derivável em x_1 e f seja derivável em $g(x_1)$. Vamos formar a função F definida por

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t) - f(g(x_1))}{t - g(x_1)} & \text{se } t \neq g(x_1) \\ f'(g(x_1)) & \text{se } t = g(x_1) \end{cases} \tag{13}$$

Então,

$$\lim_{t \to g(x_1)} F(t) = \lim_{t \to g(x_1)} \frac{f(t) - f(g(x_1))}{t - g(x_1)}$$

De (7) na Secção 3.1, a função no segundo membro da fórmula acima é $f'(g(x_1))$. Logo,

$$\lim_{t \to g(x_1)} F(t) = f'(g(x_1)) \tag{14}$$

Mas de (13),

$$f'(g(x_1)) = F(g(x_1))$$

Substituindo essa igualdade em (14), obtemos

$$\lim_{t \to g(x_1)} F(t) = F(g(x_1))$$

Portanto, F é contínua em $g(x_1)$. Além disso, de (13),

$$F(t) = \frac{f(t) - f(g(x_1))}{t - g(x_1)} \qquad \text{se } t \neq g(x_1)$$

Multiplicando ambos os lados dessa equação por $t - g(x_1)$, obtemos

$$f(t) - f(g(x_1)) = F(t)[t - g(x_1)] \qquad \text{se } t \neq g(x_1) \tag{15}$$

Observe que (15) é verdadeira, mesmo que $t = g(x_1)$, pois o primeiro membro é

$$f(g(x_1)) - f(g(x_1)) = 0$$

e o segundo membro é

$$F(g(x_1))[g(x_1) - g(x_1)] = 0$$

Logo, a restrição em (15) de que $t \neq g(x_1)$ não é necessária e escrevemos

$$f(t) - f(g(x_1)) = F(t)[t - g(x_1)] \tag{16}$$

Seja, agora, h a função composta $f \circ g$, tal que

$$h(x) = f(g(x)) \tag{17}$$

Então, de (7) da Secção 3.1, se o limite existir,

$$h'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{h(x) - h(x_1)}{x - x_1}$$

Substituindo (17) no segundo membro dessa igualdade, obtemos

$$h'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(g(x)) - f(g(x_1))}{x - x_1} \tag{18}$$

se o limite existir. Seja, agora, $t = g(x)$ em (16); segue, então, que para todo x no domínio de g, tal que $g(x)$ esteja no domínio de f,

$$f(g(x)) - f(g(x_1)) = F(g(x))[g(x) - g(x_1)]$$

Substituindo em (18), temos

$$h'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{F(g(x))[g(x) - g(x_1)]}{x - x_1}$$

Assim, se o limite existir

$$h'(x_1) = \lim_{x \to x_1} F(g(x)) \cdot \lim_{x \to x_1} \frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} \tag{19}$$

Como F é contínua em $g(x_1)$,

$$\lim_{x \to x_1} F(g(x)) = F(g(x_1)) \tag{20}$$

Mas de (13),

$$F(g(x_1)) = f'(g(x_1))$$

Substituindo em (20), obtemos

$$\lim_{x \to x_1} F(g(x)) = f'(g(x_1)) \tag{21}$$

Além disso, como g é derivável em x_1,

$$\lim_{x \to x_1} \frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} = g'(x_1)$$

Substituindo de (21) e dessa equação em (19) e trocando $h'(x_1)$ por $(f \circ g)'(x_1)$, temos

$$(f \circ g)'(x_1) = f'(g(x_1)) \cdot g'(x_1)$$

que é (7) com x substituído por x_1. Dessa forma, provamos a regra da cadeia. ■

EXERCÍCIOS 3.6

Nos Exercícios de 1 a 12, ache a derivada da função dada.

1. $f(x) = (2x + 1)^3$
2. $f(x) = (10 - 5x)^4$
3. $F(x) = (x^2 + 4x - 5)^4$
4. $g(r) = (2r^4 + 8r^2 + 1)^5$
5. $f(t) = (2t^4 - 7t^3 + 2t - 1)^2$
6. $H(z) = (z^3 - 3z^2 + 1)^{-3}$
7. $f(x) = (x^2 + 4)^{-2}$
8. $g(x) = \text{sen } x^2$
9. $f(x) = 4 \cos 3x - 3 \text{ sen } 4x$
10. $G(x) = \sec^2 x$
11. $h(t) = \frac{1}{3} \sec^3 2t - \sec 2t$
12. $f(x) = \cos(3x^2 + 1)$

Nos Exercícios de 13 a 24, calcule a derivada indicada.

13. $\dfrac{d}{dx}(\sec^2 x \text{ tg}^2 x)$
14. $\dfrac{d}{dt}(2 \text{ sen}^3 t \cos^2 t)$
15. $\dfrac{d}{dt}(\text{cotg}^4 t - \text{cosec}^4 t)$
16. $\dfrac{d}{dx}[(4x^2 + 7)^2(2x^3 + 1)^4]$
17. $D_u[(3u^2 + 5)^3(3u - 1)^2]$
18. $D_x[(x^2 - 4x^{-2})^2(x^2 + 1)^{-1}]$
19. $D_x[(2x - 5)^{-1}(4x + 3)^{-2}]$
20. $D_x[(2x - 9)^2(x^3 + 4x - 5)^3]$
21. $D_r[(r^2 + 1)^3(2r^2 + 5r - 3)^2]$
22. $D_y[(y + 3)^3(5y + 1)^2(3y^2 - 4)]$
23. $\dfrac{d}{dy}\left[\left(\dfrac{y - 7}{y + 2}\right)^2\right]$
24. $\dfrac{d}{dt}\left[\left(\dfrac{2t^2 + 1}{3t^3 + 1}\right)^2\right]$

Nos Exercícios de 25 a 36, ache a derivada da função dada.

25. $f(x) = \left(\dfrac{2x - 1}{3x^2 + x - 2}\right)^3$
26. $F(x) = \dfrac{(x^2 + 3)^3}{(5x - 8)^2}$
27. $f(z) = \dfrac{(z^2 - 5)^3}{(z^2 + 4)^2}$
28. $G(x) = \dfrac{(4x - 1)^3(x^2 + 2)^4}{(3x^2 + 5)^2}$
29. $g(t) = \text{sen}^2(3t^2 - 1)$
30. $f(x) = \text{tg}^2 x^2$
31. $f(x) = (\text{tg}^2 x - x^2)^3$
32. $G(x) = (2 \text{ sen } x - 3 \cos x)^3$
33. $f(y) = \dfrac{3 \text{ sen } 2y}{\cos^2 2y + 1}$
34. $g(x) = \dfrac{\text{cotg}^2 2x}{1 + x^2}$
35. $F(x) = 4 \cos(\text{sen } 3x)$
36. $f(x) = \text{sen}^2(\cos 2x)$
37. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = (x^2 - 1)^2$ em cada um dos seguintes pontos $(-2, 9)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1,0)$ e $(2, 9)$. Faça um esboço do gráfico e desenhe segmentos das retas tangentes nos pontos dados.
38. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = 4 \text{ tg } 2x$ no ponto $x = \frac{\pi}{8}$.

Nos Exercícios de 39 a 42, uma partícula move-se ao longo de uma reta de acordo com a equação dada, onde s cm é a distância orientada da partícula até a origem, em t s. (a) Qual será a velocidade da partícula em t s? (b) Ache a velocidade instantânea da partícula em t s para cada valor dado de t_1.

39. $s = \dfrac{(t^2 - 1)^2}{(t^2 + 1)^2}$, $t \geqslant 0$; t_1 é 1, 2
40. $s = \left(\dfrac{3t}{2t + 1}\right)^4$; $t \geqslant 0$; t_1 é $\frac{1}{2}$, 1
41. $s = 5 \text{ sen } \pi t + 3 \cos \pi t$; t_1 é $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$
42. $s = 2 \cos \pi(t + 1)$; t_1 é $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$
43. A força eletromotriz de um circuito elétrico com um gerador simplificado é $E(t)$ volts em t s, onde $E(t) = 50 \text{ sen } 120\,\pi\, t$. Ache a taxa de variação instantânea de $E(t)$ em relação a t em (a) 0,02 s e (b) 0,2 s.
44. Uma onda produzida por um som simples tem a equação $P(t) = 0{,}003 \text{ sen } 180\,\pi t$, onde $P(t)$ dinas/cm² é a diferença entre a pressão atmosférica e a pressão do ar no tímpano, em t s. Ache a taxa de variação instantânea de $P(t)$ em relação a t em (a) $\frac{1}{9}$ s; (b) $\frac{1}{8}$ s; (c) $\frac{1}{7}$ s.
45. Quando um pêndulo com 10 cm de comprimento balança, de modo que θ seja a medida em radianos do triângulo formado pelo pêndulo e uma reta vertical, então, se $h(\theta)$ cm for a altura da extremidade do pêndulo acima de sua posição mais baixa, $h(\theta) = 20 \text{ sen}^2 \frac{1}{2}\,\theta$. Ache a taxa de variação instantânea de $h(\theta)$ em relação a θ quando (a) $\theta = \frac{1}{3}\pi$; (b) $\theta = \frac{1}{2}\pi$.
46. Se K unidades quadradas for a área de um triângulo retângulo, 10 unidades será o comprimento da hipotenusa e α será a medida em radianos de um ângulo agudo, então $K = 25 \text{ sen } 2\alpha$. Ache a taxa de variação instantânea de K em relação a α quando (a) $\alpha = \frac{1}{6}\pi$; (b) $\alpha = \frac{1}{4}\pi$; (c) $\alpha = \pi$.

47. Em uma floresta, um predador alimenta-se de sua presa, e a população de predadores em qualquer época é uma função do número de presas naquele momento. Suponha que quando há x presas na floresta, a população de predadores é y e $y = \frac{1}{6}x^2 + 90$. Além disso, se t semanas tiverem se passado até o final da temporada de caça, $x = 7t + 85$. A que taxa a população de predadores estará crescendo 8 semanas depois que a temporada de caça terminou? Não expresse y em termos de t, mas use a regra da cadeia.

48. A equação de demanda para um brinquedo é $p^2x = 5000$, onde x brinquedos são demandados por mês, quando p for o preço de cada unidade. Espera-se que em t meses, onde $t \in [0,6]$, o preço do brinquedo seja p, onde $20p = t^2 + 7t + 100$. Qual será a taxa estimada da variação da demanda em relação ao tempo em 5 meses? Não expresse x em termos de t, mas use a regra da cadeia.

49. Dada $f(x) = x^3$ e $g(x) = f(x^2)$. Encontre (a) $f'(x^2)$; (b) $g'(x)$.

50. Dadas $f(u) = u^2 + 5u + 5$ e $g(x) = (x + 1)/(x - 1)$, ache a derivada de $f \circ g$ de duas maneiras: (a) encontrando primeiro $(f \circ g)(x)$ e então calculando $(f \circ g)'(x)$; (b) usando a regra da cadeia.

51. Deduza a fórmula da derivada da função co-seno usando a fórmula da derivada da função seno, a regra da cadeia e as identidades

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) \text{ e } \operatorname{sen} x = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)$$

52. Use a regra da cadeia para provar que (a) a derivada de uma função par é uma função ímpar e (b) a derivada de uma função ímpar é uma função par, desde que essas derivadas existam.

53. Use o resultado do Exercício 52 (a) para provar que se g for uma função par e $g'(x)$ existir, então se $h(x) = (f \circ g)(x)$ e se f for derivável em toda parte, $h'(0) = 0$.

54. Suponha que f e g sejam funções, tais que (i) $g'(x_1)$ e $f'(g(x_1))$ existam e (ii) para todo $x \neq x_1$ em algum intervalo aberto contendo x_1, $(g(x) - g(x_1) \neq 0$. Então,

$$\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_1)}{x - x_1} = \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \cdot \frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1}$$

(a) Prove que quando $x \to x_1$, $g(x) \to g(x_1)$ e então que

$$(f \circ g)'(x_1) = f'(g(x_1))g'(x_1)$$

simplificando a prova da regra da cadeia sob a exigência adicional (ii). (b) Mostre que a prova da regra da cadeia dada na parte (a) aplica-se se $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$, mas que não se aplica se $f(x) = x^2$ e $g(x) = \operatorname{sgn} x$.

Nos Exercícios de 55 a 58, mostre que a prova simplificada da regra da cadeia com a exigência adicional (ii) não é válida para as funções f e g dadas. Em cada exercício, faça um esboço do gráfico de g.

55. $f(x) = x^4$; $g(x) = [\![x]\!]$

56. $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = |x - 2| + |x + 2|$

57. $f(x) = x^2$; $g(x) = |x| + |x - 1|$

58. $f(x) = \operatorname{tg} x$; $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \end{cases}$

59. Suponha que f e g sejam funções, tais que $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ e $(f \circ g)(x) = x$. Prove que se $g'(x)$ existir, então $g'(x) = g(x)$.

3.7 A DERIVADA DA FUNÇÃO POTÊNCIA PARA EXPOENTES RACIONAIS

A função f definida por

$$f(x) = x^r \tag{1}$$

é chamada de **função potência**. Na Secção 3.3, obtivemos a seguinte fórmula para a derivada dessa função para r inteiro positivo ou negativo:

$$f'(x) = rx^{r-1} \tag{2}$$

Provaremos agora que essa fórmula continua válida, para r racional, com certas restrições se $x = 0$.

Primeiro vamos considerar $x \neq 0$ e $r = 1/q$, onde q é um inteiro positivo. A fórmula (1) pode, então, ser escrita

$$f(x) = x^{1/q} \tag{3}$$

Da Definição 3.1.3,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^{1/q} - x^{1/q}}{\Delta x} \tag{4}$$

Para calcular o limite em (4), precisamos racionalizar o numerador. Usamos então a fórmula a seguir, obtida na Secção 2.9, qual seja:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \tag{5}$$

Racionalizamos o numerador da fração em (4) aplicando (5), para $a = (x + \Delta x)^{1/q}$, $b = x^{1/q}$ e $n = q$. Assim, vamos multiplicar o numerador e o denominador por

$$[(x + \Delta x)^{1/q}]^{(q-1)} + [(x + \Delta x)^{1/q}]^{(q-2)}x^{1/q} + \ldots + (x^{1/q})^{(q-1)}$$

Então, de (4), $f'(x)$ é igual a

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x + \Delta x)^{1/q} - x^{1/q}][(x + \Delta x)^{(q-1)/q} + (x + \Delta x)^{(q-2)/q}x^{1/q} + \ldots + x^{(q-1)/q}]}{\Delta x[(x + \Delta x)^{(q-1)/q} + (x + \Delta x)^{(q-2)/q}x^{1/q} + \ldots + x^{(q-1)/q}]} \tag{6}$$

Agora, aplicando (5) ao numerador, obtemos $(x + \Delta x)^{q/q} - x^{q/q}$, que é Δx. Assim de (6),

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x[(x + \Delta x)^{(q-1)/q} + (x + \Delta x)^{(q-2)/q}x^{1/q} + \ldots + x^{(q-1)/q}]}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(x + \Delta x)^{(q-1)/q} + (x + \Delta x)^{(q-2)/q}x^{1/q} + \ldots + x^{(q-1)/q}}$$

$$= \frac{1}{x^{(q-1)/q} + x^{(q-1)/q} + \ldots + x^{(q-1)/q}}$$

Como há exatamente q termos no denominador da fração acima,

$$f'(x) = \frac{1}{qx^{1-(1/q)}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{q}x^{1/q-1} \tag{7}$$

que é a fórmula (2) com $r = 1/q$. Completamos a parte crucial da demonstração. Mostramos que a função definida por (3) é derivável e que sua derivada é dada por (7).

Agora, em (1) com $x \neq 0$, seja $r = p/q$, onde p é qualquer inteiro não nulo e q é qualquer inteiro positivo; isto é, r é qualquer número racional, exceto zero. Então, (1) pode ser escrito como

$$f(x) = x^{p/q} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x^{1/q})^p$$

Como p é um inteiro positivo ou negativo, segue da regra da cadeia e dos Teoremas 3.3.2 e 3.3.8 que

$$f'(x) = p(x^{1/q})^{p-1} \cdot D_x(x^{1/q})$$

Aplicando a fórmula (7) a $D_x(x^{1/q})$, obtemos

$$f'(x) = p(x^{1/q})^{p-1} \cdot \frac{1}{q}x^{1/q-1}$$

$$f'(x) = \frac{p}{q}x^{p/q-1/q+1/q-1}$$

$$f'(x) = \frac{p}{q}x^{p/q-1}$$

Essa fórmula é igual a (2), com $r = p/q$.

Se $r = 0$ e $x \neq 0$, (1) torna-se: $f(x) = x^0$; isto é, $f(x) = 1$. Assim $f'(x) = 0$, o que pode ser escrito como $f'(x) = 0 \cdot x^{0-1}$. Logo, (2) é válida para $r = 0$ com $x \neq 0$. Mostramos, portanto, que a fórmula (2) é válida quando r for qualquer número racional, com $x \neq 0$.

Sabemos que 0 estará no domínio da função potência f se e somente se r for um número positivo, pois para $r \leqslant 0$, $f(0)$ não é definida. Logo, queremos determinar para que valores positivos de r, $f'(0)$ será dada pela fórmula (2). Precisamos excluir os valores de r para os quais $0 < r \leqslant 1$, pois para esses valores de r, x^{r-1} não é um número real, quando $x = 0$. Vamos supor, então, que $r > 1$. Pela definição de derivada,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{x^r - 0^r}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} x^{r-1} \end{aligned}$$

Quando $r > 1$, $\lim\limits_{x\to 0} x^{r-1}$ existe e é igual a 0, desde que r seja um número tal que x^{r-1} esteja definida em algum intervalo aberto contendo 0. Por exemplo, se $r = \frac{3}{2}$, $x^{r-1} = x^{1/2}$, que não está definida em nenhum intervalo aberto contendo 0 (uma vez que $x^{1/2}$ não existe quando $x < 0$). Entretanto, se $r = \frac{5}{3}$, $x^{r-1} = x^{2/3}$, que está definida em todo intervalo aberto contendo 0. Logo, a fórmula (2) dá a derivada da função potência quando $x = 0$, desde que r seja um número para o qual x^{r-1} esteja definida em algum intervalo aberto contendo 0. Assim sendo, acabamos de provar o teorema enunciado a seguir.

3.7.1 TEOREMA Se f for a função potência definida por $f(x) = x^r$, onde r é qualquer número racional, então f será derivável e

$$f'(x) = rx^{r-1}$$

Para que essa fórmula tenha validade para $f'(0)$, r deve ser tal que x^{r-1} esteja definida em algum intervalo aberto contendo 0.

EXEMPLO 1 Encontre $f'(x)$ se

$$f(x) = 4\sqrt[3]{x^2}$$

Solução $f(x) = 4x^{2/3}$. Do Teorema 3.7.1,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \cdot \tfrac{2}{3}(x^{2/3-1}) \\ &= \tfrac{8}{3}x^{-1/3} \\ &= \frac{8}{3x^{1/3}} \\ &= \frac{8}{3\sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

O teorema enunciado a seguir é uma conseqüência imediata do Teorema 3.7.1 e da regra da cadeia.

3.7.2 TEOREMA Se f e g forem funções tais que $f(x) = [g(x)]^r$, onde r é qualquer número racional e se $g'(x)$ existir, então f será derivável e

$$f'(x) = r\,[g(x)]^{r-1}\,g'(x)$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$D_x(\sqrt{2x^3 - 4x + 5})$$

Solução Escrevemos $\sqrt{2x^3 - 4x + 5}$ como $(2x^3 - 4x + 5)^{1/2}$ e aplicamos o Teorema 3.7.2.

$$\begin{aligned} D_x[(2x^3 - 4x + 5)^{1/2}] &= \tfrac{1}{2}(2x^3 - 4x + 5)^{-1/2} \cdot D_x(2x^3 - 4x + 5) \\ &= \tfrac{1}{2}(2x^3 - 4x + 4)^{-1/2}(6x^2 - 4) \\ &= \frac{3x^2 - 2}{\sqrt{2x^3 - 4x + 5}} \end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Encontre $g'(x)$ se

$$g(x) = \frac{x^3}{\sqrt[3]{3x^2 - 1}}$$

Solução A fração dada pode ser escrita como um produto:

$$g(x) = x^3(3x^2 - 1)^{-1/3}$$

Dos Teoremas 3.3.6 e 3.7.2,

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2(3x^2 - 1)^{-1/3} - \tfrac{1}{3}(3x^2 - 1)^{-4/3}(6x)(x^3) \\ &= x^2(3x^2 - 1)^{-4/3}[3(3x^2 - 1) - 2x^2] \\ &= \frac{x^2(7x^2 - 3)}{(3x^2 - 1)^{4/3}} \end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Encontre $f'(r)$ se

$$f(r) = \sqrt{4\,\text{sen}^2\, r + 9\cos^2 r}$$

Solução $f(r) = (4\,\text{sen}^2\, r + 9\cos^2 r)^{1/2}$. Aplicamos o Teorema 3.7.2.

$$\begin{aligned} f'(r) &= \tfrac{1}{2}(4\,\text{sen}^2\, r + 9\cos^2 r)^{-1/2} \cdot D_r(4\,\text{sen}^2\, r + 9\cos^2 r \\ &= \frac{8\,\text{sen}\, r \cdot D_r(\text{sen}\, r) + 18\cos r \cdot D_r(\cos r)}{2\sqrt{4\,\text{sen}^2\, r + 9\cos^2}} \\ &= \frac{8\,\text{sen}\, r\cos r + 18\cos r(-\text{sen}\, r)}{2\sqrt{4\,\text{sen}^2\, r + 9\cos^2 r}} \\ &= \frac{-10\,\text{sen}\, r\cos r}{2\sqrt{4\,\text{sen}^2\, r + 9\cos^2 r}} \\ &= -\frac{5\,\text{sen}\, r\cos r}{\sqrt{4\,\text{sen}^2\, r + 9\cos^2 r}} \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 3.7

Nos Exercícios de 1 a 24, ache a derivada da função dada.

1. $f(x) = 4x^{1/2} + 5x^{-1/2}$
2. $f(x) = 3x^{2/3} - 6x^{1/3} + x^{-1/3}$
3. $g(x) = \sqrt{1 + 4x^2}$
4. $f(s) = \sqrt{2 - 3s^2}$
5. $f(x) = (5 - 3x)^{2/3}$
6. $g(x) = \sqrt[3]{4x^2 - 1}$
7. $g(y) = \dfrac{1}{\sqrt{25 - y^2}}$
8. $f(x) = (5 - 2x^2)^{-1/3}$
9. $h(t) = 2 \cos \sqrt{t}$
10. $f(x) = 4 \sec \sqrt{x}$
11. $g(r) = \text{cotg}\sqrt{3r}$
12. $g(x) = \sqrt{3 \,\text{sen}\, x}$
13. $f(x) = (\text{sen}\, 3x)^{-1/2}$
14. $f(y) = \sqrt{1 + \text{cosec}^2\, y}$
15. $f(x) = \text{tg}\, \sqrt{x^2 + 1}$
16. $f(y) = 3 \cos \sqrt[3]{2y^2}$
17. $g(x) = \sqrt{\dfrac{2x - 5}{3x + 1}}$
18. $h(t) = \dfrac{\sqrt{t} - 1}{\sqrt{t} + 1}$
19. $F(x) = \sqrt[3]{2x^3 - 5x^2 + x}$
20. $G(t) = \sqrt{\dfrac{5t + 6}{5t - 4}}$
21. $g(t) = \sqrt{2t} + \sqrt{\dfrac{2}{t}}$
22. $g(x) = \sqrt[3]{(3x^2 + 5x - 1)^2}$
23. $f(x) = (5 - x^2)^{1/2}(x^3 + 1)^{1/4}$
24. $g(y) = (y^2 + 3)^{1/3}(y^3 - 1)^{1/2}$

Nos Exercícios de 25 a 36, calcule a derivada indicada.

25. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}\right)$
26. $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{x^2 - 5}\,\sqrt[3]{x^2 + 3})$
27. $\dfrac{d}{dt}\left(\sqrt{\dfrac{\text{sen}\, t + 1}{1 - \text{sen}\, t}}\right)$
28. $\dfrac{d}{dz}(\text{sen}\, \sqrt[3]{z} \cos \sqrt[3]{z})$
29. $\dfrac{d}{dy}(\text{tg}\, \sqrt{y} \sec \sqrt{y})$
30. $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{\dfrac{\cos x - 1}{\text{sen}\, x}}\right)$
31. $D_x\left(\dfrac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt[3]{x + 1}}\right)$
32. $D_x\left(\dfrac{4x + 6}{\sqrt{x^2 + 3x + 4}}\right)$
33. $D_x(\sqrt{9 + \sqrt{9 - x}})$
34. $D_y\left(\sqrt[4]{\dfrac{y^3 + 1}{y^3 - 1}}\right)$
35. $D_z\left(\dfrac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 2z}}\right)$
36. $D_x\left(\sqrt{x}\ \text{tg}\ \sqrt{\dfrac{1}{x}}\right)$

Nos Exercícios 37 e 38, encontre uma equação da reta tangente à curva em cada um dos pontos dados. Faça um esboço do gráfico e inclua segmentos de retas tangentes nos pontos dados.

37. $y = (2x - 2)^{2/3}$; $(-3, 4)$, $(0, \sqrt[3]{4})$, $(1, 0)$, $(2, \sqrt[3]{4})$, $(5, 4)$
38. $y = (6 - 2x)^{1/3}$; $(-1, 2)$, $(1, \sqrt[3]{4})$, $(3, 0)$, $(5, -\sqrt[3]{4})$, $(7, -2)$
39. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = \sqrt{x^2 + 9}$, no ponto $(4, 5)$.
40. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = (7x - 6)^{-1/3}$ que seja perpendicular à reta $12x - 7y + 2 = 0$.
41. Ache uma equação da reta normal à curva $y = x\sqrt{16 + x^2}$ na origem.
42. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = \sqrt{\text{sen}\, x + \cos x}$ no ponto onde $x = \pi/4$.
43. Um objeto move-se ao longo de uma reta, de acordo com a equação de movimento $s = \sqrt{4t^2 + 3}$, com $t \geqslant 0$. Ache o valor de t para o qual a medida da velocidade instantânea é (a) 0; (b) 1; (c) 2.
44. Um objeto move-se ao longo de uma reta, de acordo com a equação do movimento $s = \sqrt{5 + t^2}$, com $t \geqslant 0$. Ache o valor de t para o qual a medida da velocidade instantânea é (a) 0; (b) 1.
45. Suponha que um líquido seja produzido por um certo processo químico e que a função custo total C seja dada por $C(x) = 6 + 4\sqrt{x}$, onde $C(x)$ é a quantia correspondente ao custo total da produção de x litros. Encontre (a) o custo marginal quando 16 L são produzidos e (b) o número de litros produzidos quando o custo marginal é \$ 0,40 por litro.
46. A quantia em dinheiro no custo total da produção de x unidades de certa mercadoria é dada por $C(x) = 40 + 3x + 9\sqrt{2x}$. Ache (a) o custo marginal quando 50 unidades são produzidas e (b) o número de unidades produzidas quando o custo marginal é \$ 4,50.
47. Uma imobiliária que administra um condomínio aluga cada apartamento por \$ p por mês quando x apartamentos são alugados $p = 30\sqrt{300 - 2x}$. Se \$ $R(x)$ for o rendimento recebido do aluguel de x apartamentos, então $R(x) = px$. Quantos apartamentos deverão ser alugados antes que a taxa de variação de R em relação a x (rendimento marginal) seja zero? (*Nota:* como x é o número de apartamentos alugados, x é um inteiro não negativo. Para aplicar o cálculo, vamos supor que x seja um número real não-negativo arredondado para o número inteiro mais próximo.)
48. A produção diária de uma dada fábrica é de $f(x)$ unidades quando o capital investido for de x milhares de uma unidade monetária \$ e $f(x) = 200\sqrt{2x + 1}$. Se a capitalização corrente for de \$ 760.000, use a derivada para estimar a variação na produção diária, se o capital investido for aumentado em \$ 1000.
49. Um avião está voando paralelamente ao chão, a uma altitude de de 2 km e com uma velocidade escalar de $4\frac{1}{2}$ km/min. Se em dado instante o avião passar exatamente sobre a Estátua da Liberdade, qual será a taxa de variação da distância sobre a linha de visão entre o avião e a estátua, 20 s mais tarde?
50. Dada $f(u) = 1/u^2$ e $g(x) = \sqrt{x}/\sqrt{2x^3 - 6x + 1}$, ache a derivada de $f \circ g$ de duas maneiras: (a) encontrando primeiro $(f \circ g)(x)$ e depois $(f \circ g)'(x)$; (b) usando a regra da cadeia.

Nos Exercícios de 51 a 54, ache a derivada da função dada. (Sugestão: $|a| = \sqrt{a^2}$.)

51. $f(x) = |x^2 - 4|$
52. $g(x) = x|x|$
53. $g(x) = |x|^3$
54. $h(x) = \sqrt[3]{|x| + x}$
55. Suponha que $g(x) = |f(x)|$. Prove que se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então $|g'(x)| = |f'(x)|$.
56. Suponha que $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ e $h(x) = f(g(x))$, onde f é derivável em 3. Prove que $h'(0) = 0$.

3.8 DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Se $f = \{(x, y) | y = 3x^2 + 5x + 1\}$, então a equação

$$y = 3x^2 + 5x + 1$$

define a função f explicitamente. Mas, nem todas as funções estão definidas dessa forma. Por exemplo, se tivermos a equação

$$x^6 - 2x = 3y^6 + y^5 - y^2 \tag{1}$$

não poderemos resolver y em termos de x; além disso, podem existir uma ou mais funções f, para as quais se $y = f(x)$, a equação (1) estará satisfeita, isto é, tais que a equação

$$x^6 - 2x = 3[f(x)]^6 + [f(x)]^5 - [f(x)]^2$$

seja válida para todos os valores de x no domínio de f. Nesse caso, a função f está definida *implicitamente* pela equação dada.

Com a hipótese de que (1) define y como uma função derivável de x, a derivada de y em relação a x pode ser encontrada por *derivação implícita.*

A equação (1) é um tipo especial de equação envolvendo x e y, pois pode ser escrita de tal forma que todos os termos envolvendo x estejam de um lado da equação, enquanto que no outro lado ficarão todos os termos envolvendo y. Ela serve como um primeiro exemplo do processo de derivação implícita.

O lado esquerdo de (1) é uma função de x e o lado direito é uma função de y. Seja F a função definida pelo lado esquerdo e seja G a função definida pelo lado direito. Assim,

$$F(x) = x^6 - 2x \qquad G(y) = 3y^6 + y^5 - y^2$$

onde y é uma função de x, digamos $y = f(x)$. Dessa forma, (1) pode ser escrita como

$$F(x) = G(f(x))$$

Essa equação está satisfeita por todos os valores de x no domínio de f para os quais $G(f(x))$ existe.

Então, para todos os valores de x para os quais f é derivável,

$$D_x(x^6 - 2x) = D_x(3y^6 + y^5 - y^2) \tag{2}$$

A derivada do primeiro membro de (2) é facilmente encontrada e

$$D_x(x^6 - 2x) = 6x^5 - 2 \tag{3}$$

Encontramos a derivada do segundo membro de (2) pela regra da cadeia.

$$D_x(3y^6 + y^5 - y^2) = 18y^5 \cdot \frac{dy}{dx} + 5y^4 \cdot \frac{dy}{dx} - 2y \cdot \frac{dy}{dx} \tag{4}$$

Substituindo os valores de (3) e (4) em (2), obtemos

$$6x^5 - 2 = (18y^5 + 5y^4 - 2y)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^5 - 2}{18y^5 + 5y^4 - 2y}$$

Observe que ao usarmos a derivação implícita, obtivemos uma expressão para $\frac{dy}{dx}$ que envolve ambas as variáveis, x e y.

Na ilustração a seguir, o método da derivação implícita será usado para encontrar $\frac{dy}{dx}$ em uma equação mais geral.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Considere a equação

$$3x^4y^2 - 7xy^3 = 4 - 8y \tag{5}$$

e suponha que exista pelo menos uma função derivável f, tal que se $y = f(x)$, a equação (5) estará satisfeita. Derivando-se ambos os membros de (5) (tendo em mente que y é uma função derivável de x) e aplicando os teoremas para a derivada de um produto, a de uma potência e a regra da cadeia, obtemos

$$12x^3y^2 + 3x^4\left(2y\frac{dy}{dx}\right) - 7y^3 - 7x\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right) = 0 - 8\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}(6x^4y - 21xy^2 + 8) = 7y^3 - 12x^3y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7y^3 - 12x^3y^2}{6x^4y - 21xy^2 + 8}$$ ◄

Lembre-se de que estamos supondo que ambas (1) e (5) definam y como pelo menos uma função derivável de x. Pode acontecer que uma equação em x e y não implique a existência de nenhuma função com valores reais, como é o caso da equação

$$x^2 + y^2 + 4 = 0$$

que não está satisfeita por nenhum valor real de x e y. Além disso, é possível que uma equação em x e y possa estar satisfeita por várias funções, algumas das quais são deriváveis, enquanto que outras não o são. Uma discussão geral do assunto foge ao contexto deste livro, mas pode ser encontrada em textos de Cálculo Avançado. Nas discussões subseqüentes, quando afirmarmos que uma equação em x e y define y como uma função implícita de x, suporemos que uma ou mais dessas funções seja derivável. O Exemplo 4, a seguir, ilustra o fato de que a derivação implícita resulta a derivada de duas funções deriváveis, definidas pela equação dada.

EXEMPLO 1 Dada $(x + y)^2 - (x - y)^2 = x^4 + y^4$, ache $\frac{dy}{dx}$.

Solução Derivando implicitamente em relação a x, teremos

$$2(x + y)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) - 2(x - y)\left(1 - \frac{dy}{dx}\right) = 4x^3 + 4y^3\frac{dy}{dx}$$

$$2x + 2y + (2x + 2y)\frac{dy}{dx} - 2x + 2y + (2x - 2y)\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 4y^3\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}(4x - 4y^3) = 4x^3 - 4y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - y}{x - y^3}$$

EXEMPLO 2 Ache uma equação da reta tangente à curva $x^3 + y^3 = 9$, no ponto (1, 2).

Solução Vamos derivar implicitamente em relação a x.

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$$

Logo, no ponto (1, 2), $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}$. Uma equação da reta tangente é, então,

$$y - 2 = -\tfrac{1}{4}(x - 1)$$

$$x + 4y - 9 = 0$$

EXEMPLO 3 Dada $x \cos y + y \cos x = 1$, ache $\frac{dy}{dx}$.

Solução Derivando implicitamente em relação a x, obteremos

$$1 \cdot \cos y + x(-\operatorname{sen} y)\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx}(\cos x) + y(-\operatorname{sen} x) = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(\cos x - x \operatorname{sen} y) = y \operatorname{sen} x - \cos y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \operatorname{sen} x - \cos y}{\cos x - x \operatorname{sen} y}$$

EXEMPLO 4 Dada a equação $x^2 + y^2 = 9$, ache (a) $\frac{dy}{dx}$ por derivação implícita; (b) as duas funções definidas pela equação; (c) a derivada de cada função obtida na parte (b) por derivação explícita. (d) Comprove que o resultado obtido na parte (a) está de acordo com os resultados obtidos na parte (c).

Solução

(a) Vamos derivar implicitamente.

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

(b) Resolvendo a equação dada em y,

$$y = \sqrt{9 - x^2} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{9 - x^2}$$

Sejam f_1 e f_2 as duas funções para as quais

$$f_1(x) = \sqrt{9 - x^2} \quad \text{e} \quad f_2(x) = -\sqrt{9 - x^2}$$

(c) Como $f_1(x) = (9 - x^2)^{1/2}$ e $f_2(x) = -(9 - x^2)^{1/2}$, pela regra da cadeia obtemos

$$f_1'(x) = \tfrac{1}{2}(9 - x^2)^{-1/2}(-2x) \qquad f_2'(x) = -\tfrac{1}{2}(9 - x^2)^{-1/2}(-2x)$$
$$= -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} \qquad\qquad = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

(d) Para $y = f_1(x)$ onde, $f_1(x) = \sqrt{9 - x^2}$, segue da parte (c) que

$$f_1'(x) = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$
$$= -\frac{x}{y}$$

o que está de acordo com a parte (a).

Para $y = f_2(x)$, onde $f_2(x) = -\sqrt{9 - x^2}$, temos da parte (c)

$$f_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$
$$= -\frac{x}{-\sqrt{9 - x^2}}$$
$$= -\frac{x}{y}$$

o que também está de acordo com o resultado obtido na parte (a).

EXERCÍCIOS 3.8

Nos Exercícios de 1 a 28, ache $\frac{dy}{dx}$ por derivação implícita.

1. $x^2 + y^2 = 16$
2. $4x^2 - 9y^2 = 1$
3. $x^3 + y^3 = 8xy$
4. $x^2 + y^2 = 7xy$
5. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$
6. $\frac{3}{x} - \frac{3}{y} = 2x$
7. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$
8. $2x^3y + 3xy^3 = 5$
9. $x^2y^2 = x^2 + y^2$
10. $(2x + 3)^4 = 3y^4$
11. $x^2 = \frac{x + 2y}{x - 2y}$
12. $\frac{x}{\sqrt{y}} - 4y = x$
13. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{xy} = 4y^2$
14. $\sqrt{y} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[4]{y} = x$
15. $\sqrt{xy} + 2x = \sqrt{y}$
16. $y + \sqrt{xy} = 3x^3$
17. $\frac{y}{\sqrt{x - y}} = 2 + x^2$
18. $x^2y^3 = x^4 - y^4$
19. $y = \cos(x - y)$
20. $x = \operatorname{sen}(x + y)$
21. $\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 y = 4$
22. $\operatorname{cotg} xy + xy = 0$
23. $x \operatorname{sen} y + y \cos x = 1$
24. $\cos(x + y) = y \operatorname{sen} x$
25. $\sec^2 y + \operatorname{cotg}(x - y) = \operatorname{tg}^2 x$
26. $\operatorname{cosec}(x - y) + \sec(x + y) = x$
27. $(x + y)^2 - (x - y)^2 = x^3 + y^3$
28. $y\sqrt{2 + 3x} + x\sqrt{1 + y} = x$

Nos Exercícios de 29 a 32, considere y como a variável independente e ache $\frac{dx}{dy}$.

29. $x^4 + y^4 = 12x^2y$
30. $y = 2x^3 - 5x$
31. $x^3y + 2y^4 - x^4 = 0$
32. $y\sqrt{x} - x\sqrt{y} = 9$

33. Ache uma equação da reta tangente à curva $16x^4 + y^4 = 32$ no ponto (1, 2).
34. Ache uma equação da reta normal à curva $9x^3 - y^3 = 1$ no ponto (1, 2).
35. Ache uma equação da reta normal à curva $x^2 + xy + y^2 - 3y = 10$ no ponto (2, 3).
36. Ache uma equação da reta tangente à curva $\sqrt[3]{xy} = 14x + y$ no ponto (2, −32).
37. Ache a taxa de variação de y em relação a x no ponto (3, 2), se $7y^2 - xy^3 = 4$.
38. Para a circunferência $x^2 + y^2 = r^2$, mostre que a reta tangente em todo ponto (x_1, y_1) da curva é perpendicular à reta que passa por (x_1, y_1) e pelo centro da circunferência.

39. Em que ponto da curva $x + \sqrt{xy} + y = 1$ a reta tangente é paralela ao eixo x?
40. Há duas retas que passam pelo ponto $(-1, 3)$ que são tangentes à curva $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 3 = 0$. Ache as equações de cada uma delas.

Nos Exercícios de 41 a 46, é dada uma equação. Faça o seguinte em cada um destes problemas: (a) Ache duas funções definidas pela equação e estabeleça os seus domínios. (b) Faça um esboço do gráfico de cada uma das funções obtidas na parte (a). (c) Faça um esboço do gráfico da equação. (d) Ache a derivada de cada uma das funções obtidas na parte (a) e estabeleça os seus domínios. (e) Ache $\frac{dy}{dx}$ *por derivação implícita da equação dada e comprove que o resultado assim obtido está de acordo com a parte (d). (f) Ache uma equação da reta tangente em cada valor dado de* x_1.

41. $y^2 = 4x - 8$; $x_1 = 3$
42. $x^2 + y^2 = 25$; $x_1 = 4$
43. $x^2 - y^2 = 9$; $x_1 = -5$
44. $y^2 - x^2 = 16$; $x_1 = -3$
45. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$; $x_1 = 1$
46. $x^2 + 4y^2 + 6x - 40y + 93 = 0$; $x_1 = -2$
47. Às 8 da manhã, um navio que viaja para o norte com uma velocidade de 24 nós (milhas náuticas por hora) está em um ponto P. Às 10 h, um segundo navio que viaja para o leste com uma velocidade de 32 nós está em P. Qual a taxa de variação da distância entre os dois navios às (a) 9 h e (b) 11 h?
48. Se $x^n y^m = (x + y)^{n+m}$, prove que $x \cdot \frac{dy}{dx} = y$.
49. Ache equações das retas tangentes à curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ nos pontos onde $x = -\frac{1}{8}$.
50. Prove que a soma dos interceptos x e y de qualquer reta tangente à curva $x^{1/2} + y^{1/2} = k^{1/2}$ é constante e igual a k.
51. Seja f a função potência definida por $f(x) = x^r$, onde r é um número racional qualquer. Supondo que f seja derivável, use a derivação implícita para mostrar que $f'(x) = rx^{r-1}$. (*Sugestão:* seja $r = \frac{p}{q}$, onde p e q são inteiros e $q > 0$. Então, substitua $f(x)$ por y e escreva a equação como $y^q = x^p$. Use a derivação implícita para achar $\frac{dy}{dx}$.)

3.9 TAXAS RELACIONADAS

Um problema envolvendo taxas de variação de variáveis relacionadas é chamado de problema de **taxas relacionadas**. Começaremos nossa discussão com um exemplo que descreve uma situação real.

EXEMPLO 1 Uma escada com 25 unidades de comprimento está apoiada numa parede vertical. Se o pé da escada for puxado horizontalmente, afastando-se da parede a 3 unidades de comprimento por segundo, qual a velocidade com que a escada está deslizando, quando seu pé está a 15 unidades de comprimento da parede?

Solução Seja t o tempo decorrido desde que a escada começou a deslizar pela parede, y a distância do chão ao topo da escada em t s e x a distância do pé da escada até a parede em t s. Veja a Figura 1.

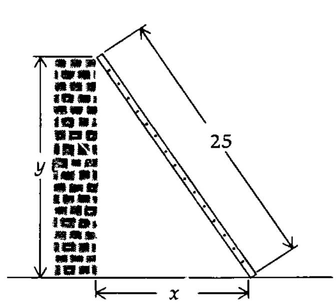


FIGURA 1

Como o pé da escada está sendo puxado horizontalmente, afastando-se da parede a 3 unidades de comprimento por segundo, $\frac{dx}{dt} = 3$. Queremos encontrar $\frac{dy}{dt}$ quando $x = 15$. Pelo teorema de Pitágoras,

$$y^2 = 625 - x^2 \tag{1}$$

Como x e y são funções de t, derivamos ambos os lados de (1) em relação a t e obtemos

$$2y\frac{dy}{dt} = -2x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

Quando $x = 15$, segue de (1) que $y = 20$. Como $\frac{dx}{dt} = 3$, obtemos de (2)

$$\left.\frac{dy}{dt}\right]_{y=20} = -\tfrac{15}{20} \cdot 3$$
$$= -\tfrac{9}{4}$$

Logo, o topo da escada está deslizando pela parede a uma taxa de $2\frac{1}{4}$ unidades de comprimento por segundo, quando o pé está a 15 unidades de comprimento da parede. O sinal *menos* significa que y é decrescente, quando t cresce.

Em problemas com taxas relacionadas, as variáveis têm uma relação específica para os valores de t, onde t é a medida do tempo. Essa relação é usualmente expressa na forma de uma equação, como a equação (1) no Exemplo 1. Os valores das variáveis e as taxas de variação das variáveis em relação a t são freqüentemente dados num determinado instante. No Exemplo 1, no instante em que $x = 15$, então $y = 20$ e $\frac{dx}{dt} = 3$ e queremos encontrar $\frac{dy}{dt}$.

Antes de apresentar mais explicações, damos outro exemplo para demonstrar o cálculo envolvido.

EXEMPLO 2 Dada

$$x \cos y = 5$$

onde x e y são funções de uma terceira variável t. Se $\frac{dx}{dt} = -4$, ache $\frac{dy}{dt}$ quando $y = \frac{1}{3}\pi$.

Solução Derivando ambos os lados da equação, obtemos

$$(\cos y)\frac{dx}{dt} - (x \operatorname{sen} y)\frac{dy}{dt} = 0$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{\cos y}{x \operatorname{sen} y} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Da equação dada, quando $y = \frac{1}{3}\pi$, $x = 10$. De (3), com $y\ \frac{1}{3}\pi$, $x = 10$, e $\frac{dx}{dt} = -4$,

$$\left.\frac{dy}{dt}\right]_{y=\pi/3} = \frac{\frac{1}{2}}{10(\frac{1}{2}\sqrt{3})}(-4)$$
$$= -\tfrac{2}{15}\sqrt{3}$$

Os passos a seguir representam um procedimento possível para resolver problemas envolvendo taxas relacionadas.

1. Faça uma figura, se isso for possível.
2. Defina as variáveis. Em geral defina primeiro t, pois as outras variáveis usualmente dependem de t.
3. Escreva todos os fatos numéricos conhecidos sobre as variáveis e suas derivadas em relação a t.
4. Obtenha uma equação envolvendo as variáveis que dependem de t.
5. Derive em relação a t ambos os membros da equação encontrada na etapa 4.
6. Substitua os valores de quantidades conhecidas na equação da etapa 5 e resolva em termos da quantidade desejada.

EXEMPLO 3 Um tanque tem a forma de um cone invertido com 16 m de altura e uma base com 4 m de raio. A água "flui" no tanque a uma taxa de 2 m³/min. Com que velocidade o nível da água estará se elevando quando sua profundidade for de 5 m?

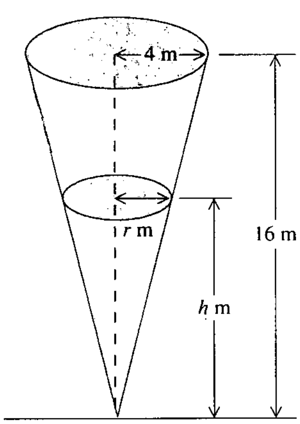


FIGURA 2

Solução Seja t o tempo medido em minutos decorridos desde que a água começou a fluir dentro do tanque; h a altura em metros do nível de água em t min; r a medida em metros do raio da superfície da água em t min; e V a medida, em metros cúbicos, do volume de água no tanque em t min.

Em qualquer instante, o volume de água no tanque pode ser expresso em termos do volume do cone. Veja a Figura 2.

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h \tag{4}$$

V, r e h são todas funções de t. Como a água está fluindo no tanque a uma taxa de 2 m³/min, $\dfrac{dV}{dt} = 2$. Queremos encontrar $\dfrac{dh}{dt}$ quando $h = 5$. Para expressar r em termos de h, temos, dos triângulos semelhantes,

$$\frac{r}{h} = \frac{4}{16} \quad \Leftrightarrow \quad r = \tfrac{1}{4}h$$

Substituindo esse valor de r em (4), obtemos

$$V = \tfrac{1}{3}\pi(\tfrac{1}{4}h)^2(h) \quad \Leftrightarrow \quad V = \tfrac{1}{48}\pi h^3$$

Por derivação de ambos os lados dessa equação em relação a t,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{16}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

Substituindo $\dfrac{dV}{dt}$ por 2 e resolvendo em $\dfrac{dh}{dt}$, obtemos

$$\frac{dh}{dt} = \frac{32}{\pi h^2}$$

Logo,

$$\left.\frac{dh}{dt}\right]_{h=5} = \frac{32}{25\pi}$$

Assim sendo, o nível de água está subindo a uma taxa de $\dfrac{32}{25\pi}$ m/min quando a profundidade da água é de 5 m.

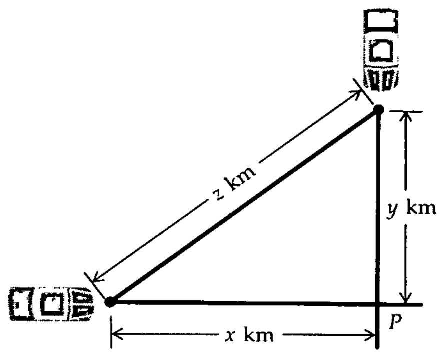


FIGURA 3

EXEMPLO 4 Dois carros estão se encaminhando em direção a um cruzamento, um seguindo a direção leste a uma velocidade de 90 km/h e o outro seguindo a direção sul, a 60 km/h. Qual a taxa segundo a qual eles se aproximam um do outro no instante em que o primeiro carro está a 0,2 km do cruzamento e o segundo a 0,15 km?

Solução Consulte a Figura 3, onde o ponto P é o cruzamento das duas estradas. Seja t h o tempo decorrido desde que os carros começaram a se aproximar de P, x km a distância do primeiro carro em t h, y km a do segundo carro em t h e z km a distância entre os dois carros em t h. Como o primeiro carro aproxima-se de P a uma taxa de 90 km/h e x está decrescendo enquanto t está crescendo, $\dfrac{dx}{dt} = -90$. Da mesma forma, $\dfrac{dy}{dt} = -60$. Queremos determinar $\dfrac{dz}{dt}$ quando $x = 0{,}2$ e $y = 0{,}15$. Do teorema de Pitágoras,

$$z^2 = x^2 + y^2 \tag{5}$$

Derivando ambos os membros dessa equação em relação a t, obtemos

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x\dfrac{dx}{dt} + y\dfrac{dy}{dt}}{z} \tag{6}$$

Quando $x = 0{,}2$ e $y = 0{,}15$, segue de (5) que $z = 0{,}25$. Em (6), seja $\dfrac{dx}{dt} = -90$, $\dfrac{dy}{dt} = -60$, $x = 0{,}2$, $y = 0{,}15$ e $z = 0{,}25$, então obtemos

$$\left.\frac{dz}{dt}\right]_{z=0{,}25} = \frac{(0{,}2)(-90) + (0{,}15)(-60)}{0{,}25}$$

$$= -108$$

Logo, no instante em questão os carros estão se aproximando um do outro a uma taxa de 108 km/h.

EXEMPLO 5 Suponha que, em certo mercado, x milhares de caixas de laranja sejam fornecidos diariamente sendo p o preço por caixa e a equação de oferta

$$px - 20p - 3x + 105 = 0$$

Se o fornecimento diário estiver decrescendo a uma taxa de 250 caixas por dia, com que taxa os preços estarão variando quando o fornecimento diário for de 5.000 caixas?

Solução Seja t o tempo decorrido medido em dias, desde que o suprimento diário de laranjas começou a decrescer. Então, p e x são ambas funções de t. Como o fornecimento diário está decrescendo a uma taxa de 250 caixas por dia, $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{250}{1000}$, isto é, $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{4}$. Queremos encontrar $\dfrac{dp}{dt}$ quando $x = 5$.

Da equação de oferta dada, derivamos implicitamente em relação a t e obtemos

$$p\frac{dx}{dt} + x\frac{dp}{dt} - 20\frac{dp}{dt} - 3\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{3-p}{x-20} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Quando $x = 5$, segue da equação de oferta que $p = 6$. Como $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{4}$, temos da equação precedente

$$\left.\frac{dp}{dt}\right]_{p=6} = \frac{3-6}{5-20}\left(-\frac{1}{4}\right)$$
$$= -\frac{1}{20}$$

Assim, o preço de uma caixa de laranja estará decrescendo a uma taxa de \$ 0,05 por dia, quando o fornecimento diário for de 5.000 caixas.

EXEMPLO 6 Um avião voa a 152,4 m/s paralelamente ao solo, a uma altitude de 1.220 m no sentido oeste, tomando como referência um holofote fixado no solo que o focaliza e que se encontra à esquerda da projeção vertical do avião em relação ao solo.

Sabendo-se que a luz do holofote deverá permanecer iluminando o avião, qual deverá ser a velocidade angular (de giro) do holofote, no instante em que a distância horizontal entre ele e a projeção vertical do avião for de 610 m?

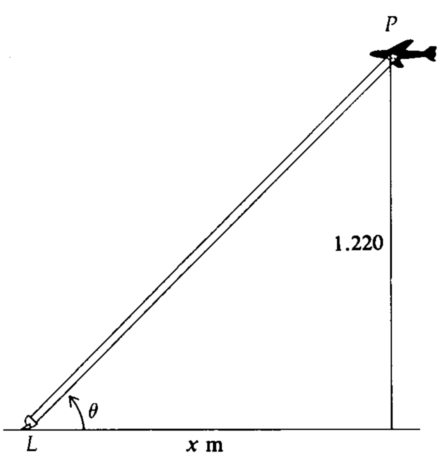


FIGURA 4

Solução Observe a Figura 4. O holofote está no ponto L e num determinado instante o avião está no ponto P. Seja x a distância (em metros) medida horizontalmente entre o holofote e a projeção vertical do avião em relação ao solo, e θ o ângulo de elevação (em radianos) do feixe luminoso emitido pelo holofote em relação ao solo, neste mesmo instante.

Temos $\dfrac{dx}{dt} = -152{,}4$ e queremos encontrar $\dfrac{d\theta}{dt}$ quando $x = 610$.

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1.220}{x}$$

Derivando membro a membro em relação a t, obtemos

$$\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1.220}{x^2}\,\frac{dx}{dt}$$

Substituindo $\dfrac{dx}{dt} = -152{,}4$ na relação acima e dividindo por $\sec^2\theta$, iremos obter

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{185.928}{x^2\sec^2\theta} \tag{7}$$

Quando $x = 610$, $\operatorname{tg}\theta = 2$. Como $\sec^2\theta = 1 + \operatorname{tg}^2\theta$, $\sec^2\theta = 5$. Substituindo esses valores em (7) temos, quando $x = 610$,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{185.928}{610^2 \cdot 5}$$
$$= \tfrac{1}{10}$$

Concluímos, então, que no instante dado a medida do ângulo está aumentando a uma taxa de $\frac{1}{10}$rad/s e essa é a velocidade com que o holofote está girando.

EXERCÍCIOS 3.9

Nos Exercícios de 1 a 8, x e y são funções de uma terceira variável t.

1. Se $2x + 3y = 8$ e $\frac{dy}{dt} = 2$, ache $\frac{dx}{dt}$.
2. Se $\frac{x}{y} = 10$ e $\frac{dx}{dt} = -5$, ache $\frac{dy}{dt}$.
3. Se $xy = 20$ e $\frac{dy}{dt} = 10$, ache $\frac{dx}{dt}$ quando $x = 2$.
4. Se $2 \operatorname{sen} x + 4 \cos y = 3$ e $\frac{dy}{dt} = 3$, ache $\frac{dx}{dt}$ em $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi)$.
5. Se $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \frac{5}{4}$ e $\frac{dx}{dt} = -1$, ache $\frac{dy}{dt}$ em $(\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi)$.
6. Se $x^2 + y^2 = 25$ e $\frac{dx}{dt} = 5$, ache $\frac{dy}{dt}$ quando $y = 4$.
7. Se $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ e $\frac{dy}{dt} = 3$, ache $\frac{dx}{dt}$ quando $x = 1$.
8. Se $y(\operatorname{tg} x + 1) = 4$ e $\frac{dy}{dt} = -4$, ache $\frac{dx}{dt}$ quando $x = \pi$.

9. Uma pipa está voando a uma altura de 40 m. Uma criança está empinando-a de tal forma que ela se mova horizontalmente, a uma velocidade de 3 m/s. Se a linha estiver esticada, com que velocidade a linha estará sendo "dada", quando o comprimento da linha desenrolada for de 50 m?
10. Um balão esférico está sendo inflado de tal forma que seu volume aumente a uma taxa de 5 m^3/min. Qual a taxa de crescimento do diâmetro quando ele mede 12 m?
11. Uma bola de neve está se formando de tal modo que seu volume cresça a uma taxa de 8 cm^3/min. Ache a taxa segundo a qual o raio está crescendo quando a bola de neve tiver 4 cm de diâmetro.
12. Suponha que quando o diâmetro da bola de neve do Exercício 11 for de 6 cm, ela pare de crescer e comece a derreter a uma taxa $\frac{1}{4}$$cm^3$/min. Ache a taxa segundo a qual o raio estará variando, quando o raio for de 2 cm.
13. Uma certa quantidade de areia é despejada a uma taxa de 10 m^3/min, formando um monte cônico. Se a altura do monte for sempre o dobro do raio da base, com que taxa a altura estará crescendo quando o monte tiver 8 m de altura?
14. Uma lâmpada está pendurada a 4,5 m de um piso horizontal. Se um homem com 1,80 m de altura caminha afastando-se da luz, com uma velocidade de 1,5 m/s, qual a velocidade de crescimento da sombra?
15. No Exercício 14, com que velocidade a ponta da sombra do homem está se movendo?
16. Um homem com 1,80 m de altura caminha em direção a um edifício, com uma velocidade de 1,5 m/s. Se existe um ponto de luz no chão a 15 m do edifício, com que velocidade a sombra do homem no edifício estará diminuindo, quando ele estiver a 9 m do edifício?
17. Suponha que um tumor no corpo de uma pessoa tenha a forma esférica. Se, quando o raio do tumor for 0,5 cm, o raio estiver crescendo a uma taxa de 0,001 cm por dia, qual será a taxa de aumento do volume do tumor naquele instante?
18. Uma célula bacteriana tem a forma esférica. Se o raio da célula estiver crescendo à taxa de 0,01 micrômetros por dia quando ela tiver 1,5 μm, qual será a taxa de crescimento do volume da célula naquele instante?
19. Para o tumor no Exercício 17, qual será a taxa de crescimento da sua área quando seu raio for 0,5 cm?
20. Para a célula do Exercício 18, qual será a taxa de aumento da área quando o seu raio for 1,5 μm?
21. Um tanque com a forma de um cone invertido está sendo esvaziado a uma taxa de 6 m^3/min. A altura do cone é de 24 m e o raio da base é de 12 m. Ache a velocidade com que o nível de água está abaixando, quando a água tiver uma profundidade de 10 m.
22. Um cocho tem 360 cm de comprimento e seus extremos têm a forma de triângulos isósceles invertidos, com 90 cm de altura e 90 cm de base. Água está fluindo no cocho a uma taxa de 60 cm^3/min. Com que velocidade estará se elevando o nível da água quando a profundidade for de 30 cm?
23. A lei de Boyle para a expansão de um gás é $PV = C$, onde P é o número de quilos por unidade quadrada de pressão, V é o número de unidades cúbicas do volume do gás e C é uma constante. Num certo instante, a pressão é de 150 kg/m^2, o volume é 1,5 m^3 e está crescendo a uma taxa de 1 m^3/min. Ache a taxa de variação da pressão nesse instante.
24. A lei adiabática (sem ganho ou perda de calor) para a expansão do ar é $PV^{1,4} = C$, onde P é o número de quilos por unidade quadrática de pressão, V é o número de unidades cúbicas de volume e C é uma constante. Num dado instante, a pressão é de 18.000 g/cm^2 e está crescendo a uma taxa de 3.600 g/cm^2 a cada segundo. Qual será a taxa de variação do volume nesse instante?
25. Uma pedra cai livremente num lago parado. Ondas circulares se espalham e o raio da região afetada aumenta a uma taxa de 16 cm/s. Qual a taxa segundo a qual a região está aumentando quando o raio for de 4 cm?
26. Uma certa quantidade de óleo está sendo despejado num tanque com a forma cônica invertida, a uma taxa de 3π m^3/min. Se o tanque tiver um raio de 2,5 m no topo e 10 m de profundidade, com que velocidade a profundidade do óleo estará variando quando ela estiver com 8 m de produndidade?
27. Um automóvel aproxima-se de um cruzamento a uma velocidade de 30 m/s. Quando o automóvel está a 120 m do cruzamento, um caminhão a uma velocidade de 40 m/s atravessa o cruzamento. O automóvel e o caminhão estão em ruas que se cruzam em ângulo reto. Com que velocidade o automóvel e o caminhão estarão se afastando um do outro, 2 s após o caminhão ter passado pelo cruzamento?
28. Uma corda está amarrada em um barco no nível da água e uma mulher em um cais puxa a corda a uma taxa de 15 m/min. Se as mãos da mulher estão a 5 m acima do nível da água, com que velocidade o bote estará se aproximando do cais, quando o comprimento da corda já puxada for de 6 m?

29. Esta semana uma fábrica está produzindo 50 unidades de um determinado produto e a produção está crescendo a uma taxa de 2 unidades por semana. Se $C(x)$ for o custo total da produção de x unidades e $C(x) = 0{,}08\,x^3 - x^2 + 10x + 48$, ache a taxa corrente segundo a qual o custo de produção está crescendo.

30. A demanda por um determinado tipo de cereal é dada pela equação $px + 50p = 16.000$, onde x milhares de caixas são demandados quando o preço por caixa for p. Se o preço corrente for de \$ 1,60 por caixa e se os preços por caixa crescerem a uma taxa de \$ 0,4 por semana, ache a taxa de variação da demanda.

31. A equação de oferta para certo produto é $x = 1.000\sqrt{3p^2 + 20p}$, onde x unidades são oferecidas por mês quando p for o preço unitário. Ache a taxa de variação na oferta se o preço corrente for de \$ 20 por unidade e se o preço estiver crescendo a uma taxa de \$ 0,50 ao mês.

32. Suponha que na produção de x unidades de certo produto seja necessária uma força de trabalho de y operários e $x = 4y^2$. Se a produção este ano foi de 250.000 unidades e a produção está aumentando a uma taxa de 18.000 unidades ao ano, qual será a taxa corrente segundo a qual a força de trabalho deve ser aumentada?

33. A equação de demanda de uma determinada camisa é $2px + 65p - 4.950 = 0$, onde x centenas de camisas são demandadas por semana quando p for o preço unitário. Se a camisa estiver sendo vendida esta semana a \$ 30 e o preço estiver crescendo a uma taxa de \$ 0,20 por semana, ache a taxa de variação na demanda.

34. A medida de um ângulo agudo de um triângulo retângulo está decrescendo a uma taxa de $\frac{1}{36}\pi$ rad/s. Se o comprimento da hipotenusa for constante e igual a 40 cm, ache a velocidade com que a área está variando, quando a medida do ângulo agudo for $\frac{1}{6}\pi$.

35. Dois caminhões aproximam-se de um cruzamento, um deles vindo da direção oeste e o outro pelo sul. Se ambos estão com uma velocidade de k km/h, mostre que um se aproxima do outro com uma velocidade de $k\sqrt{2}$ km/h, quando cada um está a m km do cruzamento.

36. Uma tina horizontal tem 16 m de comprimento e seus extremos são trapézios isósceles com uma altura de 4 m, uma base menor de 4 m e uma base maior de 6 m. A água está fluindo dentro da tina a uma taxa de 10 m^3/min. Com que velocidade o nível de água está subindo quando a profundidade da água é de 2 m?

37. No Exercício 36, se o nível de água estiver decrescendo a uma taxa de 25 cm/min quando a profundidade é de 3 m, com que velocidade a água está saindo da tina?

38. Uma escada com 7 m de comprimento está apoiada numa parede. Se o pé da escada for empurrado horizontalmente em direção à parede a 1,5 m/s, com que velocidade o topo da escada será deslocado para cima quando o pé da escada estiver a 2 m da parede?

39. Uma viga com 20 m está encostada em um aterro inclinado de 60° em relação à horizontal. Se o pé da viga estiver sendo movido horizontalmente em direção ao aterro a 1 m/s, com que velocidade o topo da viga estará se deslocando quando o pé estiver a 4 m do aterro?

40. O volume de um balão está decrescendo a uma taxa proporcional à sua área da superfície. Mostre que o raio do balão diminui a uma taxa constante.

41. Um avião está voando com velocidade constante a uma altitude de 3 km sobre uma linha reta que irá passar diretamente acima de um observador no chão. Num dado instante, o observador nota que o ângulo de elevação do avião é de $\frac{1}{3}\pi$ rad e está aumentando a uma taxa de $\frac{1}{60}$ rad/s. Ache a velocidade do avião.

42. Uma antena de radar está localizada num navio a 16 km de uma praia reta e está girando com 32 rpm. Com que velocidade o feixe do radar estará percorrendo a praia quando o feixe formar um ângulo de 45° com a praia?

43. Uma viga com 30 m de comprimento está apoiada em uma parede e o seu topo está se deslocando para baixo a uma velocidade de 0,5 m/s. Qual será a taxa de variação da medida do ângulo agudo formado pela viga e pelo chão quando o topo da viga estiver a 18 m do chão?

44. Dentro de um tanque na forma de um cone está fluindo água à razão de 8 m^3/min. O cone tem 6 m de profundidade 3m de diâmetro no topo. Se houver um vazamento na base e se o nível da água estiver subindo a uma razão de 1 cm/min, quando a profundidade for de 4,8 m, como estará escoando o vazamento?

3.10 DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

Se a função f for derivável, então f' será chamada a **derivada primeira** de f. Às vezes é chamada de **função derivada primeira**. Se a derivada de f' existir, ela será chamada de **derivada segunda** de f, ou de função derivada segunda e poderá ser denotada por f'' (lemos f duas linhas). Da mesma forma, a **derivada terceira** de f, ou a função derivada terceira, é definida como a derivada de f'', se ela existir. A derivada terceira de f é denotada por f''' (lemos f três linhas).

A **derivada enésima** da função f, onde n é um número inteiro positivo maior do que 1, é a derivada primeira da derivada $(n-1)$ésima de f. Denotamos a derivada enésima de f por $f^{(n)}$. Assim, se $f^{(n)}$ for a derivada enésima da função, podemos escrever f como sendo $f^{(0)}$.

EXEMPLO 1 Ache todas as derivadas da função f definida por

$$f(x) = 8x^4 + 5x^3 - x^2 + 7$$

Solução

$$f'(x) = 32x^3 + 15x^2 - 2x$$
$$f''(x) = 96x^2 + 30x - 2$$
$$f'''(x) = 192x + 30$$
$$f^{(4)}(x) = 192$$
$$f^{(5)}(x) = 0$$
$$f^{(n)}(x) = 0 \qquad n \geqslant 5$$

A notação de Leibniz para a derivada primeira é $\dfrac{dy}{dx}$. Para a derivada segunda de y em relação a x, a notação de Leibniz é $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, porque ela representa $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{d}{dx}(y)\right]$. O símbolo $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ é uma notação para a derivada enésima de y em relação a x.

Outros símbolos para a derivada enésima de f são

$$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)] \qquad D_x{}^n[f(x)]$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$\frac{d^3}{dx^3}(2 \text{ sen } x + 3 \cos x - x^3)$$

Solução

$$\frac{d}{dx}(2 \text{ sen } x + 3 \cos x - x^3) = 2 \cos x - 3 \text{ sen } x - 3x^2$$
$$\frac{d^2}{dx^2}(2 \text{ sen } x + 3 \cos x - x^3) = -2 \text{ sen } x - 3 \cos x - 6x$$
$$\frac{d^3}{dx^3}(2 \text{ sen } x + 3 \cos x - x^3) = -2 \cos x + 3 \text{ sen } x - 6$$

Como $f'(x)$ dá a taxa de variação instantânea de $f(x)$ em relação a x, $f''(x)$, que é a derivada de $f'(x)$, dá a taxa de variação instantânea de $f'(x)$ em relação a x. Além disso, se (x, y) for um ponto qualquer sobre o gráfico de $y = f(x)$, então $\dfrac{dy}{dx}$ dará a inclinação da reta tangente ao gráfico no ponto (x, y). Assim, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ será a taxa de variação instantânea da inclinação da reta tangente em relação a x no ponto (x, y).

EXEMPLO 3 Seja $m(x)$ a inclinação da reta tangente à curva

$$y = x^3 - 2x^2 + x$$

no ponto (x, y). Ache a taxa de variação instantânea de $m(x)$ em relação a x no ponto $(2, 2)$.

Solução

$$m(x) = \frac{dy}{dx}$$
$$= 3x^2 - 4x + 1$$

A taxa de variação instantânea de $m(x)$ em relação a x é dada por $m'(x)$ ou, equivalentemente, por $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

$$m'(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$$
$$= 6x - 4$$

No ponto $(2, 2)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 8$.

A derivada segunda $f''(x)$ é expressa em unidades de $f'(x)$ por unidade de x, ou seja, unidades de $f(x)$ por unidade de x, por unidade de x. Por exemplo, no movimento retílineo. Se $f(t)$ cm for a distância de uma partícula à origem no instante t s, então $f'(t)$ cm/s, será a velocidade da partícula no instante t s e $f''(t)$ cm/s/s (centímetros por segundo por segundo) será a taxa de variação instantânea da velocidade no mesmo instante t s. Em Física, a taxa de variação instantânea da velocidade é chamada de **aceleração instantânea**. Logo, se uma partícula está se movendo ao longo de uma reta, de acordo com a equação de movimento $s = f(t)$, onde a velocidade instantânea é dada por v cm/s e a aceleração instantânea é dada por a cm/s^2, no instante t s, então a será a derivada primeira de v em relação ao tempo ou, equivalentemente, a derivada segunda de s em relação a t; isto é,

$$\boxed{\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} \\ a &= \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow a = \frac{d^2s}{dt^2} \end{aligned}}$$

Quando $a > 0$, v é crescente e quando $a < 0$, v é decrescente. Quando $a = 0$, v não muda. Como a velocidade escalar de uma partícula no instante t é $|v|$ cm/s, temos os seguintes resultados:

(i) Se $v \geqslant 0$ e $a > 0$, a velocidade escalar é crescente.
(ii) Se $v \geqslant 0$ e $a < 0$, a velocidade escalar é decrescente.
(iii) Se $v \leqslant 0$ e $a > 0$, a velocidade escalar é decrescente.
(iv) Se $v \leqslant 0$ e $a < 0$, a velocidade escalar é crescente.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a equação

$$s = 3t^2 - t^3 \qquad t \geqslant 0 \tag{1}$$

onde s cm é a distância da partícula até a origem, decorridos t s. Se v cm/s for a velocidade instantânea em t s, então $v = \dfrac{ds}{dt}$. Logo,

$$v = 6t - 3t^2 \tag{2}$$

Se a cm/s² for a aceleração em t s, então $a = \dfrac{dv}{dt}$. Assim,

$$a = 6 - 6t \tag{3}$$

Vamos determinar para quais valores de t se anulam as quantidades s, v ou a. De (1),

$$s = 0 \text{ quando } t = 0 \text{ ou } t = 3$$

De (2),

$$v = 0 \text{ quando } t = 0 \text{ ou } t = 2$$

De (3),

$$a = 0 \text{ quando } t = 1$$

Tabela 1

	s	v	a	*Conclusão*
$t = 0$	0	0	6	A partícula está na origem. A velocidade é zero e está crescendo. A velocidade escalar está crescendo.
$0 < t < 1$	+	+	+	A partícula está à direita da origem, movendo-se para a direita. A velocidade é crescente. A velocidade escalar é crescente.
$t = 1$	2	3	0	A partícula está a 2 cm à direita da origem, movendo-se para a direita a 3 cm/s. A velocidade não está mudando, bem como a velocidade escalar.
$1 < t < 2$	+	+	−	A partícula está à direita da origem e está movendo-se para a direita. A velocidade é decrescente, bem como a velocidade escalar.
$t = 2$	4	0	−6	A partícula está a 4 cm à direita da origem e está mudando da direita para a esquerda. A velocidade é decrescente. A velocidade escalar é crescente.
$2 < t < 3$	+	−	−	A partícula está à direita da origem, movendo-se para a esquerda. A velocidade é decrescente. A velocidade escalar é crescente
$t = 3$	0	−9	−12	A partícula está na origem, movendo-se para a esquerda a 9 cm/s. A velocidade é decrescente. A velocidade escalar é crescente.
$3 < t$	−	−	−	A partícula está à esquerda da origem, movendo-se para a esquerda. A velocidade é decrescente. A velocidade escalar é crescente.

Na Tabela 1 estão valores de s, v e a para t igual a 0, 1, 2 e 3. Também estão indicados os sinais das quantidades s, v e a nos intervalos de t, excluindo 0, 1, 2 e 3. Uma conclusão é tirada relativa à posição e ao movimento da partícula para os vários valores de t.

Na Figura 1, o movimento da partícula se faz ao longo de uma reta horizontal e o comportamento do movimento está indicado acima da reta. ◄

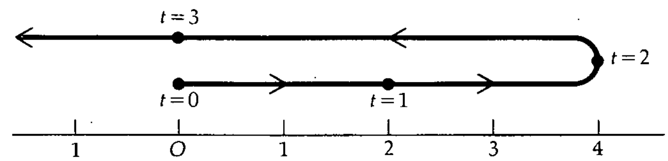


FIGURA 1

EXEMPLO 4 Uma partícula move-se ao longo de uma reta, de acordo com a seguinte equação de movimento:

$$s = \frac{1}{2}t^2 + \frac{4t}{t+1}$$

onde s cm é a distância orientada da partícula até a origem em t s. Se v cm/s for a velocidade instantânea em t s e a cm/s² for a aceleração em t s, ache t, s e v quando $a = 0$.

Solução

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad a = \frac{dv}{dt}$$

$$= t + \frac{4}{(t+1)^2} \qquad = 1 - \frac{8}{(t+1)^3}$$

Tomando $a = 0$, teremos

$$\frac{(t+1)^3 - 8}{(t+1)^3} = 0$$

$$(t+1)^3 = 8$$

de onde vemos que o único valor real de t é obtido da raiz cúbica de 8; assim sendo, $t + 1 = 2$ ou $t = 1$. Quando $t = 1$,

$$s = \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{4 \cdot 1}{1+1} \qquad v = 1 + \frac{4}{(1+1)^2}$$

$$= \tfrac{5}{2} \qquad = 2$$

Portanto, a aceleração é 0 no instante 1 s, quando a partícula está a $\frac{5}{2}$ cm da origem, movendo-se para a direita com uma velocidade de 2 cm/s.

Uma partícula movendo-se sobre uma reta tem um **movimento harmônico simples** se a medida de sua aceleração for sempre proporcional à medida de seu deslocamento de um ponto fixo na reta e a aceleração e o deslocamento tiverem sempre sentidos opostos.

EXEMPLO 5 Mostre que se uma partícula estiver se movendo ao longo de uma reta, de acordo com a equação de movimento,

$$s = b \operatorname{sen}(kt + \theta) \tag{4}$$

onde b, k e θ são constantes e s cm é a distância orientada da partícula até a origem em t s, então o movimento será harmônico simples.

Solução Queremos mostrar que se a cm/s² for a aceleração da partícula em t s, então a será proporcional a s e a e s terão sinais opostos. Para determinar a encontramos primeiro v, onde v cm/s é a velocidade da partícula em t s.

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} \\ &= b[\cos(kt + \theta)](k) \\ &= bk \cos(kt + \theta) \\ a &= \frac{dv}{dt} \\ &= bk\,[-\operatorname{sen}(kt + \theta)]\,(k) \\ &= -bk^2 \operatorname{sen}(kt + \theta) \end{aligned}$$

Substituindo (4) nessa igualdade, temos

$$a = -k^2 s$$

Como $-k^2$ é uma constante, a é proporcional a s. Além disso, como $-k^2$ é negativo, a e s têm sentidos opostos. Logo, o movimento é harmônico simples.

A derivada segunda é aplicada ainda na construção do gráfico de uma função (Secção 4.5) e no teste da derivada segunda para extremos relativos (Secção 4.6). Uma aplicação importante das derivadas de ordem superior é no estudo de séries infinitas, conforme mostra o Capítulo 13.

O exemplo a seguir ilustra como a derivada segunda é encontrada para funções definidas implicitamente.

EXEMPLO 6 Dada

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

ache $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ por derivação implícita.

Solução Derivando implicitamente em relação a x, obtemos

$$8x + 18y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x}{9y} \tag{5}$$

Para encontrar $\frac{d^2y}{dx^2}$, calculamos a derivada de um quociente tendo em mente que y é uma função de x. Assim,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{9y(-4) - (-4x)\left(9 \cdot \frac{dy}{dx}\right)}{81y^2}$$

Substituindo o valor de $\frac{dy}{dx}$ de (5) nessa equação, obtemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-36y + (36x)\frac{-4x}{9y}}{81y^2}$$

$$= \frac{-36y^2 - 16x^2}{81y^3}$$

$$= \frac{-4(9y^2 + 4x^2)}{81y^3}$$

Como qualquer valor de x e y satisfazendo essa equação deve também satisfazer a equação original, podemos substituir $9y^2 + 4x^2$ por 36 e obter

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-4(36)}{81y^3}$$

$$= -\frac{16}{9y^3}$$

EXERCÍCIOS 3.10

Nos Exercícios de 1 a 16 ache as derivadas primeira e segunda da função definida pela equação dada.

1. $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$
2. $F(x) = 7x^3 - 8x^2$
3. $g(s) = 2s^4 - 4s^3 + 7s - 1$
4. $G(t) = t^3 - t^2 + t$
5. $F(x) = x^2\sqrt{x} - 5x$
6. $g(r) = \sqrt{r} + \frac{1}{\sqrt{r}}$
7. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
8. $h(y) = \sqrt[3]{2y^3 + 5}$
9. $f(t) = 4 \cos t^2$
10. $g(t) = 2 \operatorname{sen}^3 t$
11. $G(x) = \operatorname{cotg}^2 x$
12. $f(x) = \frac{2 - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$
13. $g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4}$
14. $g(x) = (2x - 3)^2(x + 4)^3$
15. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x + 1}$
16. $f(x) = \sec 2x + \operatorname{tg} 2x$
17. Ache $D_x^3(x^4 - 2x^2 + x - 5)$.
18. Ache $D_t^3(\sqrt{4t + 1})$.
19. Ache $\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{3}{2x - 1}\right)$.
20. Ache $f^{(4)}(x)$ se $f(x) = \frac{2}{x - 1}$.
21. Ache $D_x^3(2 \operatorname{tg} 3x)$.
22. Ache $\frac{d^4}{dt^4}(3 \operatorname{sen}^2 2t)$.
23. Ache $f^{(5)}(x)$ se $f(x) = \cos 2x - \operatorname{sen} 2x$.
24. Ache $\frac{d^3u}{dv^3}$ se $u = v\sqrt{v - 2}$.
25. Dada $x^2 + y^2 = 1$, mostre que $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{y^3}$.
26. Dada $x^2 + 25y^2 = 100$, mostre que $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4}{25y^3}$.
27. Dada $x^3 + y^3 = 1$, mostre que $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2x}{y^5}$.
28. Dada $x^{1/2} + y^{1/2} = 2$, mostre que $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^{3/2}}$.
29. Dada $x^4 + y^4 = a^4$ (a é uma constante), ache $\frac{d^2y}{dx^2}$ na forma mais simples.

30. Dada $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ (a e b são constantes), ache $\frac{d^2y}{dx^2}$ na forma mais simples.
31. Ache a inclinação da reta tangente em cada ponto do gráfico de $y = x^4 + x^3 - 3x^2$, onde a taxa de variação da inclinação é zero.
32. Ache a taxa de variação instantânea da inclinação da reta tangente ao gráfico $y = 2x^3 - 6x^2 - x + 1$ no ponto $(3, -2)$.

Nos Exercícios 33 e 34, uma partícula está se movendo ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a equação dada, onde s cm é a distância orientada da partícula até a origem, v cm/s é a velocidade da partícula e a cm/s² é a aceleração da partícula no instante t s. Ache v e a em termos de t. Faça uma tabela similar à Tabela 1 que dê uma descrição da posição e movimento da partícula. Inclua na tabela os intervalos de tempo, onde a partícula está se movendo para a direita e para a esquerda, onde a velocidade é crescente e decrescente, quando a velocidade escalar é crescente e decrescente, e a posição da partícula com relação à origem nesses intervalos. Mostre o comportamento do movimento numa figura similar à Figura 1.

33. $s = t^3 - 9t^2 + 15t,\ t \geqslant 0$
34. $s = \frac{1}{6}t^3 - 2t^2 + 6t - 2,\ t \geqslant 0$

Nos Exercícios de 35 a 39, uma partícula está se movendo ao longo de uma reta, de acordo com a equação dada, onde s m é a distância orientada entre a posição da partícula e a origem no instante t s. Ache o instante em que a aceleração instantânea é zero e nesse instante determine a distância orientada a partir da origem e a velocidade instantânea.

35. $s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t + 1,\ t \geqslant 0$
36. $s = 2t^3 - 6t^2 + 3t - 4,\ t \geqslant 0$
37. $s = \dfrac{125}{16t + 32} - \dfrac{2}{5}t^5,\ t \geqslant 0$
38. $s = 9t^2 + 2\sqrt{2t + 1},\ t \geqslant 0$
39. $s = \frac{4}{9}t^{3/2} + 2t^{1/2},\ t \geqslant 0$

Nos Exercícios de 40 a 45, uma partícula está se movendo ao longo de uma reta, de acordo com a equação de movimento dada, onde s cm é a distância orientada entre a partícula e a origem no instante t s. Mostre que o movimento é harmônico simples.

40. $s = A \operatorname{sen} 2\pi kt + B \cos 2\pi kt$, *onde A, B*, e *k* são constantes.
41. $s = b \cos(kt + \theta)$, onde b, k, e θ são constantes.
42. $s = 6 \operatorname{sen}(t + \frac{1}{3}\pi) + 4 \operatorname{sen}(t - \frac{1}{6}\pi)$
43. $s = \operatorname{sen}(6t - \frac{1}{3}\pi) + \operatorname{sen}(6t + \frac{1}{6}\pi)$
44. $s = 8 \cos^2 6t - 4$
45. $s = 5 - 10 \operatorname{sen}^2 2t$

Nos Exercícios de 46 a 49, ache as fórmulas para f′(x) e f″(x) e estabeleça os domínios de f′ e f″.

46. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$
47. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases}$
48. $f(x) = |x|^3$
49. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

50. Para a função do Exercício 48, ache $f'''(x)$ quando ela existir.
51. Para a função do Exercício 49, ache $f'''(x)$ quando ela exitir.
52. Mostre que se $xy = 1$, então $\dfrac{d^2y}{dx^2} \cdot \dfrac{d^2x}{dy^2} = 4$.
53. Se f', g', f'' e g'' existem e se $h = f \circ g$, expresse $h''(x)$ em termos das derivadas de f e g.
54. Se f e g são duas funções, tais que suas derivadas primeira e segunda existem e h é a função definida pela equação $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, prove que

$$h''(x) = f(x) \cdot g''(x) + 2f'(x) \cdot g'(x) + f''(x) \cdot g(x)$$

55. Se $y = x^n$, onde n é qualquer inteiro positivo, prove, por indução matemática, que $\dfrac{d^ny}{dx^n} = n!$
56. Se

$$y = \frac{1}{1 - 2x}$$

prove, por indução matemática, que

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{2^n n!}{(1 - 2x)^{n+1}}$$

57. Se k for um inteiro positivo qualquer, prove, por indução matemática, que

$$D_x^n(\operatorname{sen} x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } n = 4k \\ \cos x & \text{se } n = 4k + 1 \\ -\operatorname{sen} x & \text{se } n = 4k + 2 \\ -\cos x & \text{se } n = 4k + 3 \end{cases}$$

58. Obtenha uma fórmula similar a do Exercício 57 para $D_x^n(\cos x)$.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 3

Nos Exercícios de 1 a 16, ache a derivada da função dada.

1. $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 2x - 3$
2. $g(x) = 5(x^4 + 3x^7)$
3. $g(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{4}{x^2}$
4. $f(x) = \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{x^4}$
5. $F(x) = 2x^{1/2} - \dfrac{1}{2}x^{-1/2}$
6. $G(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$
7. $G(t) = (3t^2 - 4)(4t^3 + t - 1)$
8. $f(x) = (x^4 - 2x)(4x^2 + 2x + 5)$

9. $g(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 - 1}$

10. $h(y) = \dfrac{y^2}{y^3 + 8}$

11. $f(s) = (2s^3 - 3s + 7)^4$

12. $F(x) = (4x^4 - 4x^2 + 1)^{-1/3}$

13. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{x^3 + 1}}$

14. $g(x) = \left(\dfrac{3x^2 + 4}{x^7 + 1}\right)^{10}$

15. $F(x) = (x^2 - 1)^{3/2}(x^2 - 4)^{1/2}$

16. $g(x) = (x^4 - x)^{-3}(5 - x^2)^{-1}$

Nos Exercícios de 17 a 24, calcule a derivada indicada.

17. $D_x[(x + 1)\text{sen}x - x\cos x]$

18. $D_r(\text{tg}^2\, 3r)$

19. $\dfrac{d}{dx}\left(x \text{ tg } \dfrac{1}{x}\right)$

20. $D_t(\text{sen}^2\, 3t\sqrt{\cos 2t})$

21. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\sec^2 t}{1 + t^2}\right)$

22. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1 + \text{sen } x}{x \cos x}\right)$

23. $D_w[\text{sen}(\cos 3w) - 3\cos^2 2w]$

24. $D_x(\text{tg}^3\, x \cdot \sec x)$

Nos Exercícios de 25 a 34, ache $\dfrac{dy}{dx}$.

25. $4x^2 + 4y^2 - y^3 = 0$

26. $y = \sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}$

27. $y = \dfrac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$

28. $xy^2 + 2y^3 = x - 2y$

29. $\text{sen}(x + y) + \text{sen}(x - y) = 1$

30. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

31. $y = x^2 + [x^3 + (x^4 + x)^2]^3$

32. $y = \dfrac{x\sqrt{3 + 2x}}{4x - 1}$

33. $\text{tg } x + \text{tg } y = xy$

34. $\sec(x + y) - \sec(x - y) = 1$

35. Ache as equações das retas tangentes à curva $y = 2x^3 + 4x^2 - x$ que têm inclinação $\frac{1}{2}$.

36. Ache uma equação da reta normal à curva $x - y = \sqrt{x + y}$ no ponto (3, 1).

37. Ache as equações das retas tangente e normal à curva $2x^3 + 2y^3 - 9xy = 0$ no ponto (2, 1).

38. Ache as equações das retas tangente e normal à curva $y = 8 \text{ sen}^3\, 2x$ no ponto $(\frac{1}{12}\pi, 1)$.

39. Prove que a reta tangente à curva $y = -x^4 + 2x^2 + x$ no ponto (1, 2) é também tangente à curva em um outro ponto e determine esse ponto.

40. Prove que as retas tangentes às curvas

$$4y^3 - x^2y - x + 5y = 0 \quad \text{e} \quad x^4 - 4y^3 + 5x + y = 0$$

na origem são perpendiculares.

41. Encontre $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ se $y = \sqrt{3 - 2x}$.

42. Dada $\dfrac{dy}{dx} = y^k$, onde k é uma constante e y, uma função de x, expresse $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ em termos de y e k.

43. Dada $f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 8x + 2$. Para que valores de x $f''(x) > 0$?

44. Mostre que se $xy = k$, onde k é uma constante não-nula, então $\dfrac{d^2y}{dx^2} \cdot \dfrac{d^2x}{dy^2} = \dfrac{4}{k}$.

45. Uma partícula se movimenta sobre uma reta horizontal segundo a equação $s = t^3 - 11t^2 + 24t + 100$, onde s cm é a distância orientada da partícula até a origem no instante t s. (a) A partícula está no ponto inicial quando $t = 0$. Para que outros valores de t a partícula estará de novo no ponto inicial? (b) Determine a velocidade da partícula em cada instante em que ela estiver no ponto inicial e interprete o sinal da velocidade em cada caso.

46. Uma partícula se movimenta sobre uma reta horizontal, de acordo com a equação $s = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$, onde s cm é a distância orientada da partícula a partir de um ponto O em t s. O sentido positivo do movimento é para a direita. Determine os intervalos de tempo nos quais a partícula se move para a direita e para a esquerda. Determine também quando a partícula inverte o sentido de seu movimento na reta. Mostre o comportamento do movimento como uma figura e escolha valores de t ao acaso, mas inclua os valores de t nos quais a partícula inverte o sentido do seu movimento.

47. Uma partícula move-se ao longo de uma reta segundo a equação $s = 5 - 2\cos^2 t$, onde s cm é a distância orientada da partícula até a origem em t s. Se v cm/s e a cm/s^2 forem, respectivamente, a velocidade e a aceleração da partícula em t s, ache v e a em termos de s.

48. Um objeto está escorregando por um plano inclinado de acordo com a equação $s = 12t^2 + 6t$, onde s m é a distância orientada do objeto até o topo do plano, após t s do início do movimento. (a) Ache a velocidade aos 3 s. (b) Ache a velocidade inicial.

49. Uma bola é atirada para cima do topo de um prédio com 112 m de altura. Sua equação de movimento é $s = -16t^2 + 96t$, onde s m é a distância orientada da bola ao ponto de partida, após t s. Ache (a) a velocidade instantânea da bola após 2 s; (b) qual a altura máxima atingida pela bola? (c) Quanto tempo levará para a bola atingir o solo? (d) Ache a velocidade instantânea da bola ao atingir o solo.

50. A lei de Stefan afirma que um corpo emite energia radiante, de acordo com a fórmula $R = kT^4$, onde R é a medida da taxa de emissão da energia radiante por unidade quadrada de área, T é a medida Kelvin da temperatura da superfície e k é uma constante. Ache (a) a taxa média de variação de R em relação a T quando T passa de 200 a 300; (b) a taxa de variação instantânea de R em relação a T, quando T é 200.

51. Se A unidades quadradas for a área de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos têm x unidades de comprimento, ache (a) a taxa média de variação de A em relação a x quando x varia de 8,00 para 8,01; (b) a taxa de variação instantânea de A em relação a x,quando x é 8,00.

52. Se $y = x^{2/3}$, ache a taxa relativa de variação de y em relação a x quando (a) $x = 8$ e (b) $x = c$, onde c é uma constante.

53. A equação de oferta de uma calculadora é $y = m^2 + \sqrt{m}$, onde $100y$ calculadoras são fornecidas quando o preço de cada calculadora for m. Ache (a) a taxa média de variação da oferta em relação ao preço quando ele passa de \$ 16 para \$ 17; (b) a taxa de variação instantânea (ou marginal) da oferta em relação ao preço, quando ele é \$16.

54. Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$, se $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$.

55. Use a definição de derivada para encontrar $f'(-5)$, se $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$.

56. Use a definição de derivada para encontrar $f'(5)$, se $f(x) = \sqrt{3x+1}$.

57. Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$, se $f(x) = \sqrt{4x-3}$.

58. Ache $f''(x)$ se $f(x) = 3\,\text{sen}^2\,x - 4\cos^2 x$.

59. Ache $f''(\pi)$ se $f(x) = \sqrt{2 + \cos x}$.

60. Ache $f'(-3)$ se $f(x) = (|x| - x)\sqrt[3]{9x}$.

61. Ache $f'(x)$ se $f(x) = (|x+1| - |x|)^2$.

62. Dada

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 16 & \text{se } x < 4 \\ 8x - 32 & \text{se } 4 \leqslant x \end{cases}$$

(a) Faça um esboço do gráfico de f. (b) Determine se f é contínua em 4. (c) Determine se f é derivável em 4.

63. Dada

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{se } x \leqslant 3 \\ 20 - x^2 & \text{se } 3 < x \end{cases}$$

(a) Faça um esboço do gráfico de f. (b) Determine se f é contínua em 3. (c) Determine se f é derivável em 3.

64. O teorema do resto em Álgebra Elementar afirma que, se $P(x)$ é um polinômo em x e r é um número real qualquer, então existe um polinômio $Q(x)$, tal que $P(x) = Q(x)(x - r) + P(r)$. Qual é o $\lim\limits_{x \to r} Q(x)$?

65. Dada $f(x) = |x|^3$. (a) Faça um esboço do gráfico de f. (b) Ache $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, se existir. (c) Ache $f'(0)$ se existir.

66. Dada $f(x) = x^2\,\text{sgn}\,x$. (a) Onde f é derivável? (b) f' é contínua em seu domínio?

67. Dada

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{se } x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

Ache os valores de a e b, tais que $f'(1)$ exista.

68. Suponha que

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x < 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{se } 1 \leqslant x \end{cases}$$

Ache os valores de a, b e c, tais que $f''(1)$ exista.

69. Se $C(x)$ for a quantia em dinheiro correspondente ao custo total da fabricação de x cadeiras e $C(x) = x^2 + 40x + 800$, ache (a) a função custo marginal; (b) o custo marginal quando 20 cadeiras são fabricadas, (c) o custo real da fabricação da vigésima primeira cadeira.

70. O rendimento total recebido da venda de x lâmpadas é $R(x)$ e $R(x) = 100x - \frac{1}{6}x^2$. Ache (a) a função rendimento marginal; (b) o rendimento marginal quando $x = 15$; (c) o rendimento real da venda da décima sexta lâmpada.

71. Em um lago grande, um peixe predador alimenta-se de um peixe menor e a população de predadores em qualquer época é uma função do número de peixes pequenos no lago, naquele período de tempo. Suponha que quando há x peixes pequenos no lago, a população de predatores é y e $y = \frac{1}{4}x^2 + 80$. Se a temporada de pesca terminou t semanas atrás, $x = 8t + 90$. A que taxa a população do peixe predador estará crescendo 9 semanas após o término da temporada de pesca? Não expresse y em termos de t, mas use a regra da cadeia.

72. A equação de demanda para uma barra de chocolate é

$$px + x + 20p = 3000$$

onde $1.000x$ barras são demandadas por semana quando p centavos é o preço por unidade. Se o preço atual de cada barra for 49 centavos e estiver aumentando à taxa de 0,2 centavos por semana, ache a taxa de variação na demanda.

73. Uma partícula move-se ao longo de uma reta, e

$$s = \text{sen}(4t + \tfrac{1}{3}\pi) + \text{sen}(4t + \tfrac{1}{6}\pi)$$

onde s m é a distância da partícula até a origem no instante t s. Prove que o movimento é harmônico simples.

74. Se a equação do movimento é $s = \cos 2t + 2\,\text{sen}\,2t$, prove que o movimento é harmônico simples.

75. Se uma partícula se move ao longo de uma reta e $s = \cos 2t + \cos t$, prove que o movimento não é harmônico simples.

76. Uma partícula move-se numa reta, de acordo com a equação $s = \sqrt{a + bt^2}$; onde a e b são constantes positivas. Prove que a medida da aceleração é inversamente proporcional a s^3 para todo t.

77. Um navio deixa um porto ao meio-dia e desloca-se para o oeste com a velocidade de 20 nós (um nó é uma milha náutica por hora e 1 milha náutica equivale a aproximadamente 2 km). Ao meio-dia do dia seguinte um segundo navio deixa o mesmo porto e viaja para o noroeste a 15 nós. Com que velocidade os navios se separam quando o segundo navio percorreu 90 milhas náuticas?

78. Um reservatório tem 80 m de comprimento e sua secção transversal é um trapézio isósceles com lados iguais de 10 m, uma base superior de 17 m e uma base inferior de 5 m. Quando a água tiver 5 m de profundidade, ache a taxa segundo a qual estará escoando, se o nível de água estiver abaixando a uma taxa de 0,1 m/h.

79. Um funil na forma de um cone tem 10 cm de diâmetro do topo e 8 cm de profundidade. A água está fluindo dentro do funil, a uma taxa de 12 cm³/s e para fora do funil, a uma taxa de 4 cm³/s. Com que velocidade o nível de água estará subindo, quando a profundidade for de 5 cm?

80. Quando o último vagão de um trem passa por baixo de um viaduto, um automóvel cruza o viaduto numa rodovia perpendicular aos trilhos e 30 m acima deles. O trem está a 80 m/s, enquanto que o automóvel está a 40 m/s. Com que velocidade se afastam um do outro após 2 s?

81. Um homem com 1,80 m de altura caminha em direção a um edifício com uma velocidade de 1,20 m/s. Há um ponto de luz no chão a 12 m do edifício. Com que velocidade diminui a sombra do homem no edifício, quando ele está a 9 m do edifício?

82. Uma queimadura na pele de uma pessoa tem a forma circular. Se o raio da queimadura estiver diminuindo à taxa de 0,05 cm por dia quando ela tem 1,0 cm, qual será a taxa de diminuição da área da queimadura naquele instante?

83. Suponha que $f(x) = 3x + |x|$ e $g(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}|x|$. Prove que nem $f'(0)$, nem $g'(0)$ existem, mas que $(f \circ g)'(0)$ existe.

84. Dê um exemplo de duas funções f e g para as quais f é derivável, em $g(0)$, g não é derivável em 0 e $f \circ g$ é derivável em 0.

85. Dê um exemplo de duas funções f e g, tais que f não seja derivável em $g(0)$, g seja derivável em 0 e $f \circ g$ seja derivável em 0.

86. No Exercício 59 dos Exercícios 3.1, prove que se f for derivável em a, então

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a - \Delta x)}{2\,\Delta x}$$

Mostre, usando a função valor absoluto, que é possível existir o limite acima, mesmo que $f'(a)$ não exista.

87. Se $f'(x_1)$ existir, prove que

$$\lim_{x \to x_1} \frac{xf(x_1) - x_1 f(x)}{x - x_1} = f(x_1) - x_1 f'(x_1)$$

88. Sejam f e g funções cujos domínios são o conjunto de todos os números reais. Além disso, suponha que (i) $g(x) = xf(x) + 1$; (ii) $g(a + b) = g(a) \cdot g(b)$ para todo a e b; (iii) $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$. Prove que $g'(x) = g(x)$.

89. Se duas funções, f e g forem deriváveis num número x_1, a função composta $f \circ g$ será, necessariamente, derivável em x_1? Se sua resposta for afirmativa, prove-a. Se a resposta for negativa, dê um contra-exemplo.

90. Suponha que $g(x) = |f(x)|$. Se $f^{(n)}(x)$ existir e $f(x) \neq 0$, prove que

$$g^{(n)}(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|} f^{(n)}(x)$$

91. Prove que $D_x^n(\text{sen } x) = \text{sen}(x + \frac{1}{2}n\pi)$. (*Sugestão*: use a indução matemática e as fórmulas $\text{sen}(x + \frac{1}{2}\pi) = \cos x$ ou $\cos(x + \frac{1}{2}\pi) = -\text{sen } x$ após cada derivação.)

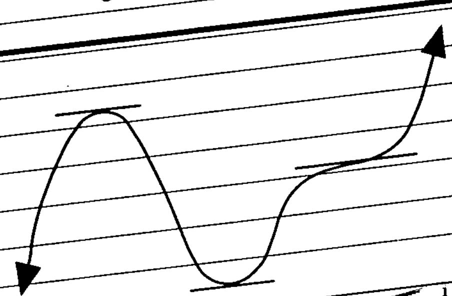
92. Suponha que a função f seja definida no intervalo aberto $(0, 1)$ e

$$f(x) = \frac{\text{sen } \pi x}{x(x - 1)}$$

Defina f em 0 e 1, de tal forma que f seja contínua no intervalo fechado $[0, 1]$.

QUATRO

Valores Extremos das Funções, Técnicas de Construção de Gráficos e a Diferencial



A interpretação da derivada como a inclinação de uma reta tangente fornece-nos informações sobre o comportamento das funções, e assim, ela é usada em técnicas de gráficos de funções. As Secções 4.1 e 4.4–4.7 tratam dessa aplicação. Na Secção 4.1, definimos *valores extremos de funções* que são utilizados nas Secções 4.2 e 4.8 para resolver problemas envolvendo máximos e mínimos. Por exemplo, determinamos a maior viga retangular que pode ser cortada de uma dada tora cilíndrica, bem como as dimensões de uma caixa que requer a quantia mínima de material para um volume específico.

Um dos teoremas mais importantes em Cálculo é o *teorema do valor médio*, discutido na Secção 4.3. É usado para provar muitos teoremas de Cálculo Diferencial e Integral, bem como em outros assuntos, como a análise numérica. Na Secção 4.9 introduzimos o conceito de *diferencial*. A Secção Suplementar 4.10 é dedicada ao *Método de Newton*, uma aplicação da derivada a processos numéricos para arredondar soluções de equações.

4.1 VALOR FUNCIONAL MÁXIMO E MÍNIMO

Vimos que a interpretação geométrica de derivada de uma função é a inclinação da reta tangente ao gráfico da função em um ponto. Esse fato possibilitanos aplicar derivadas como recurso auxiliar no esboço de gráficos. Por exemplo, podemos usar a derivada para determinar os pontos onde a reta tangente é horizontal; esses são os pontos onde a derivada é zero. A derivada também pode ser usada para encontrarmos os intervalos nos quais a função está acima ou abaixo da reta tangente. Antes de empregar a derivada para fazer esboços de gráficos, precisamos de algumas definições e teoremas.

4.1.1 DEFINIÇÃO A função f terá um **valor máximo relativo** em c se existir um intervalo aberto contendo c, no qual $f(x)$ esteja definida, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo x nesse intervalo.

As Figuras 1 e 2 mostram o esboço de parte do gráfico de uma função, tendo um valor máximo relativo em c.

4.1.2 DEFINIÇÃO A função f terá um **valor mínimo relativo** em c se existir um intervalo aberto contendo c, no qual $f(x)$ esteja definida, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo x nesse intervalo.

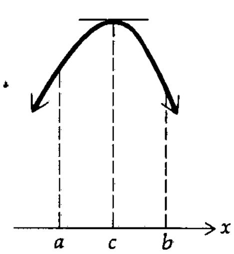


FIGURA 1

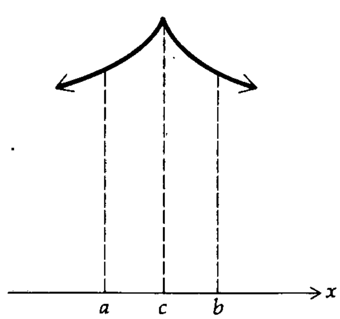


FIGURA 2

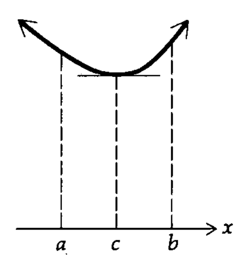


FIGURA 3

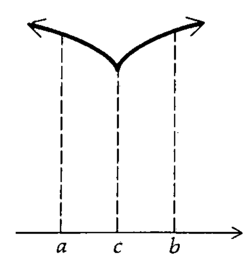


FIGURA 4

As Figuras 3 e 4 mostram o esboço de parte do gráfico de uma função, tendo um valor mínimo relativo em c.

Se a função f tiver um máximo relativo em c ou um mínimo relativo, então dizemos que f tem um **extremo relativo** em c.

O seguinte teorema será usado para localizar os valores possíveis de c para os quais existe um extremo relativo.

4.1.3 TEOREMA Se $f(x)$ foi definida para todos os valores de x no intervalo aberto (a, b) e se f tiver um extremo relativo em c, onde $a < c < b$, então $f'(c) = 0$, se $f'(c)$ existir.

A interpretação geométrica desse teorema é que se f tiver um extremo relativo em c, e se $f'(c)$ existir, então o gráfico de f precisará ter uma reta tangente horizontal no ponto onde $x = c$.

Para demonstrar o Teorema 4.1.3, usamos os Teoremas 2.10.3 e 2.10.4. Seria útil que você consultasse esses teoremas, bem como as Ilustrações 3 e 4 da Secção Suplementar 2.10 que apresentam suas respectivas interpretações geométricas.

Prova do Teorema 4.1.3 A demonstração será dada para o caso em que f tem um valor mínimo relativo em c.

Se $f'(x)$ existir, então

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \tag{1}$$

Como f tem um valor mínimo relativo em c, pela Definição 4.1.2 existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - c| < \delta, \text{ então } f(x) - f(x) \geqslant 0$$

Se x tende a c pela direita, $x - c > 0$; logo

$$\text{se } 0 < x - c < \delta, \text{ então } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0$$

Pelo Teorema 2.10.4, se o limite existir,

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0 \tag{2}$$

Da mesma forma, se x tende a c pela esquerda, $x - c < 0$ e, portanto,

$$\text{se } -\delta < x - c < 0, \text{ então } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0$$

assim, pelo Teorema 2.10.3, se o limite existir,

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0 \tag{3}$$

Como $f'(c)$ existe, os limites nas desigualdades (2) e (3) têm que ser iguais a $f'(c)$. Assim, de (2),

$$f'(c) \geqslant 0$$

e de (3),

$$f'(c) \leqslant 0$$

Como ambas as desigualdades são verdadeiras, concluímos que

$$f'(c) = 0$$

que era o que queríamos provar.

A demonstração no caso em que f tem um valor máximo relativo em c é similar e será proposta como um exercício (veja o Exercício 59). ■

Se f for uma função derivável em um intervalo aberto (a, b), então os únicos valores possíveis de x para os quais f pode ter um extremo relativo são aqueles em que $f'(x) = 0$; no entanto, $f'(x)$ pode ser igual a zero para um valor específico de x, sem que f possua um extremo relativo neste ponto. Em outras palavras, para funções deriváveis em um intervalo (a, b), a anulação da derivada em um ponto c é condição necessária mas **não** suficiente para que c seja um extremo relativo, e essa afirmação será comprovada pela ilustração a seguir.

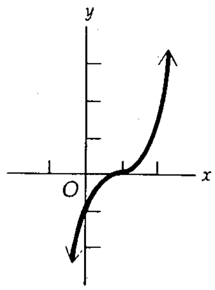


FIGURA 5

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Consideremos a função f definida por

$$f(x) = (x - 1)^3$$

Um esboço do gráfico dessa função está na Figura 5. $f'(x) = 3(x - 1)^2$, e assim $f'(1) = 0$. Mas, $f(x) < 0$ se $x < 1$ e $f(x) > 0$ se $x > 1$. Assim, f não tem um extremo relativo em 1. ◀

Uma função f pode ter um extremo relativo num número e f' pode não existir para este número. Isso é mostrado na Ilustração 2.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \leqslant 3 \\ 8 - x & \text{se } 3 < x \end{cases}$$

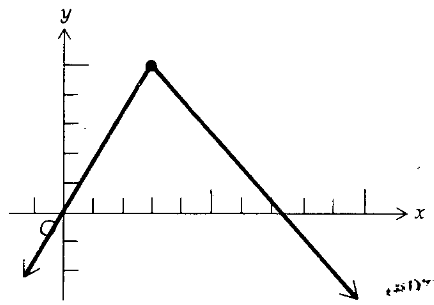


FIGURA 6

Um esboço do gráfico dessa função está na Figura 6. A função f tem um valor máximo relativo em 3. A derivada à esquerda em 3 é dada por $f'_-(3) = 2$, enquanto que a derivada à direita de 3 é dada por $f'_+(3) = -1$. Concluímos, então, que $f'(3)$ não existe. ◀

A Ilustração 2 demonstra por que a condição "$f'(c)$ existe" deve ser incluída nas hipóteses do Teorema 4.1.3.

É possível que uma função f possa ser definida num número c, onde $f'(c)$ não exista e ainda f pode não ter um extremo relativo nesse número. Tal função será ilustrada agora.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Seja a função f definida por

$$f(x) = x^{1/3}$$

O domínio de f é o conjunto de todos números reais.

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}} \qquad \text{se } x \neq 0$$

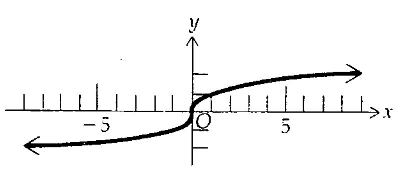


FIGURA 7

Além disso, $f'(0)$ não existe. A Figura 7 mostra um esboço do gráfico de f. A função não tem extremos relativos. ◀

Em suma, se uma função f está definida em um número c, uma condição necessária à existência de um extremo relativo para f é que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não exista. Porém, essa condição não é suficiente.

4.1.4 DEFINIÇÃO Se c for um número no domínio da função f e se $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existir, então c será chamado de **número crítico** de f.

Dessa definição e da discussão anterior, uma condição necessária (mas não suficiente) à existência de um extremo relativo em c é que c seja um número crítico.

EXEMPLO 1 Ache os números críticos da função f definida por

$$f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$$

Solução

$$f'(x) = \tfrac{4}{3}x^{1/3} + \tfrac{4}{3}x^{-2/3}$$
$$= \tfrac{4}{3}x^{-2/3}(x+1)$$
$$= \frac{4(x+1)}{3x^{2/3}}$$

Quando $x = -1$, $f'(x) = 0$ e quando $x = 0$, $f'(x)$ não existe. Ambos -1 e 0 estão no domínio de f; logo, os pontos críticos de f são -1 e 0.

EXEMPLO 2 Ache os números críticos da função g definida por

$$g(x) = \operatorname{sen} x \cos x$$

Solução Como $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$,

$$g(x) = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$$
$$g'(x) = \tfrac{1}{2}(\cos 2x)2$$
$$= \cos 2x$$

Desde que $g'(x)$ exista para todo x, os únicos números críticos são aqueles para os quais $g'(x) = 0$. Como $\cos 2x = 0$, quando

$$2x = \tfrac{1}{2}\pi + k\pi \quad \text{onde } k \text{ é um inteiro qualquer}$$

os números críticos de g são $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$, onde k é um inteiro qualquer.

Um problema freqüente refere-se a uma função dada num certo intervalo, onde queremos encontrar o maior ou o menor valor da função. Esses intervalos podem ser fechados, abertos ou fechados num extremo e abertos no outro. O maior valor da função no intervalo é chamado de *valor máximo absoluto* e o menor valor da função no intervalo é chamado de *valor mínimo absoluto*. A seguir, são dadas as definições precisas.

4.1.5 DEFINIÇÃO A função f terá um **valor máximo absoluto num intervalo**, se existir algum número c no intervalo, tal que $f(c) \geqslant f(x)$ para todo x no intervalo. Em tal caso, $f(c)$ será o valor máximo absoluto de f no intervalo.

4.1.6 DEFINIÇÃO A função f terá um **valor mínimo absoluto num intervalo**, se existir algum número c no intervalo, tal que $f(c) \leqslant f(x)$ para todo x no intervalo. Em tal caso, $f(c)$ será o valor mínimo absoluto de f no intervalo.

Um **extremo absoluto** de uma função num intervalo é um valor máximo absoluto ou um valor mínimo absoluto da função no intervalo. Uma função pode ou não ter um extremo absoluto num intervalo dado. Em cada uma das ilustrações a seguir, uma função e um intervalo são dados e determinamos os extremos absolutos da função no intervalo, quando existirem.

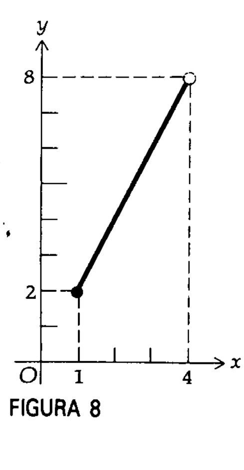


FIGURA 8

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Suponha que f seja a função definida por

$$f(x) = 2x$$

Um esboço do gráfico de f em $[1, 4)$ está na Figura 8. A função f tem um valor mínimo absoluto de 2 em $[1, 4)$. Não há valor máximo absoluto de f em $[1, 4)$, pois $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 8$, mas $f(x)$ é sempre menor do que 8 no intervalo dado. ◀

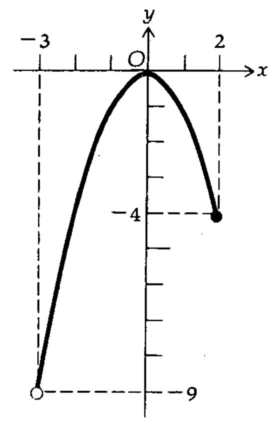


FIGURA 9

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** Consideremos a função definida por

$$f(x) = -x^2$$

Um esboço do gráfico de f em $(-3, 2]$ está na Figura 9. A função f tem um valor máximo absoluto de 0 em $(-3, 2]$. Não há valor mínimo absoluto de f em $(-3, 2]$, pois $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -9$, mas $f(x)$ é sempre maior do que -9 no intervalo dado. ◀

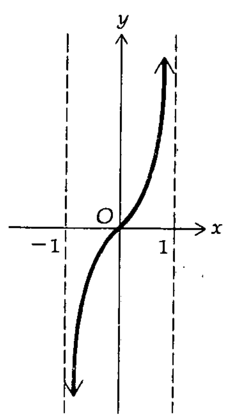


FIGURA 10

▶ **ILUSTRAÇÃO 6** A função f definida por

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

não possui nem valor máximo absoluto nem valor mínimo absoluto em $(-1, 1)$. Um esboço do gráfico de f em $(-1, 1)$ está na Figura 10. Observe que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$ ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 7** Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 6x + 7 & \text{se } 1 \leqslant x \end{cases}$$

Um esboço do gráfico de f em $[-5, 4]$ está na Figura 11. O valor máximo absoluto de f em $[-5, 4]$ ocorre em 1 e $f(1) = 2$; o valor mínimo absoluto de f em $[-5, 4]$ ocorre em -5 e $f(-5) = -4$. Note que f tem um valor máximo relativo em 1 e um valor mínimo relativo em 3. Observe também que 1 é um número crítico de f, pois $f'(1)$ não existe e 3 é um número crítico de f, já que $f'(3) = 0$. ◀

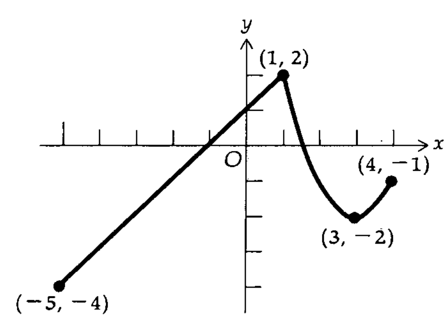


FIGURA 11

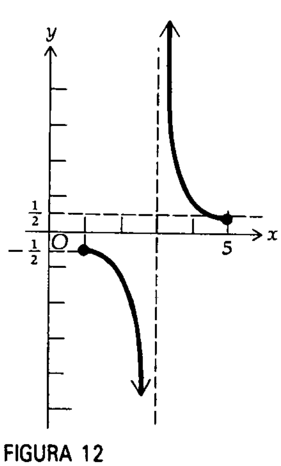


FIGURA 12

▶ **ILUSTRAÇÃO 8** A função f definida por

$$f(x) = \frac{1}{x - 3}$$

não possui nem valor máximo nem valor mínimo absolutos em $[1, 5]$. Veja, na Figura 12, um esboço do gráfico de f. Como $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$, então, $f(x)$ pode se tornar menor do que qualquer número negativo, quando tomamos $3 - x > 0$, e menor do que um $\delta > 0$ adequado. Da mesma forma, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$; assim, $f(x)$ pode se tornar maior do que qualquer número positivo, quando tomamos $x - 3 > 0$ e menor do que um $\delta > 0$ adequado. ◀

Podemos falar de um extremo absoluto de uma função, mesmo que não seja especificado o intervalo. Em tal caso, estamos nos referindo ao extremo absoluto da função em todo o seu domínio.

4.1.7 DEFINIÇÃO

$f(c)$ será o **valor máximo absoluto** da função f se c estiver no domínio de f e se $f(c) \geqslant f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f.

4.1.8 DEFINIÇÃO

$f(c)$ será o **valor mínimo absoluto** da função f se c estiver no domínio de f e se $f(c) \leqslant f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f.

▶ **ILUSTRAÇÃO 9** O gráfico da função f definida por

$$f(x) = x^2 - 4x + 8$$

é uma parábola e o seu esboço está na Figura 13. O ponto mais baixo da parábola está em (2, 4) e a parábola abre-se para cima. A função tem um valor mínimo absoluto de 4 em 2. Não há valor máximo absoluto de f. ◀

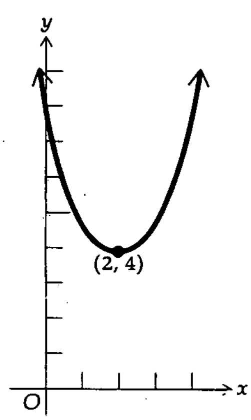


FIGURA 13

Consultando as Ilustrações 4-9, vemos que o único caso no qual existem ambos os valores absolutos máximo e mínimo da função é na Ilustração 7, onde a função é contínua no intervalo fechado $[-5, 4]$. Nas demais ilustrações, não temos um intervalo fechado, ou não temos uma função contínua. Se uma função for contínua num intervalo fechado, há um teorema, conhecido como *teorema do valor extremo*, o qual assegura que a função tem ambos os valores máximo e mínimo absolutos no intervalo. A demonstração desse teorema foge ao contexto deste livro. Você poderá encontrá-la num texto de Cálculo Avançado.

4.1.9 TEOREMA
Teorema do Valor Extremo

Se a função f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então f terá um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em $[a, b]$.

O Teorema 4.1.9 assegura que a continuidade de uma função em um intervalo fechado é condição suficiente para garantir que a função tenha no intervalo ambos os valores, máximo e mínimo, absolutos. A condição, contudo, não é necessária. Por exemplo, a função cujo gráfico está na Figura 14 tem um valor máximo absoluto em $x = c$ e um valor mínimo absoluto em $x = d$ e, no entanto, ela é descontínua no intervalo aberto $(-1, 1)$.

Um extremo absoluto de uma função contínua num intervalo fechado deve ser um extremo relativo, ou um valor de função num extremo do intervalo. Como uma condição necessária para que uma função tenha um extremo relativo num número c é que c seja um número crítico, o valor máximo absoluto e o valor mínimo absoluto de uma função contínua f num intervalo fechado $[a, b]$ podem ser determinados pelo seguinte procedimento:

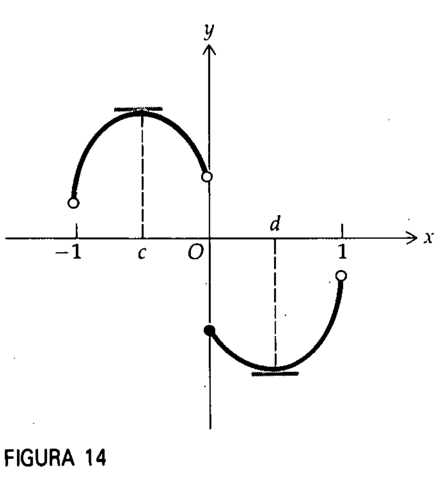


FIGURA 14

1. Ache os valores da função nos números críticos de f em (a, b).
2. Ache os valores de $f(a)$ e $f(b)$.
3. O maior dentre os valores das etapas 1 e 2 será o valor máximo absoluto e o menor será o valor mínimo absoluto.

Tabela 1

x	-2	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$f(x)$	-1	2	$\frac{22}{27}$	$\frac{7}{8}$

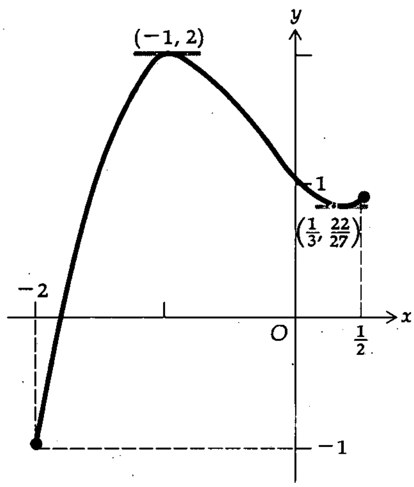


FIGURA 15

EXEMPLO 3 Ache os extremos absolutos de f em $[-2, \frac{1}{2}]$ se

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$$

Solução Como f é contínua em $[-2, \frac{1}{2}]$, o teorema do valor extremo pode ser aplicado. Para achar os números críticos de f, calculamos primeiro f':

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

Como $f'(x)$ existe para todos os números reais, os únicos números críticos de f serão os valores de x para os quais $f'(x) = 0$. Vamos tomar $f'(x) = 0$.

$$(3x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x = \tfrac{1}{3} \qquad x = -1$$

Os números críticos de f são -1 e $\frac{1}{3}$ e cada um deles está no intervalo fechado $[-2, \frac{1}{2}]$. Os valores da função nos números críticos e nos extremos do intervalo são dados na Tabela 1.

O valor máximo absoluto de f em $[-2, \frac{1}{2}]$ é, portanto, 2, o que ocorre em -1, e o valor mínimo absoluto de f em $[-2, \frac{1}{2}]$ é -1, que ocorre no extremo esquerdo -2. A Figura 15 mostra um esboço do gráfico de f em $[-2, \frac{1}{2}]$.

Tabela 2

x	1	2	5
$f(x)$	1	0	$\sqrt[3]{9}$

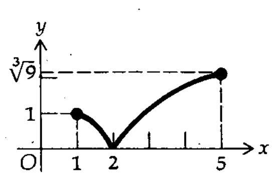


FIGURA 16

EXEMPLO 4 Ache os extremos absolutos de f em $[1, 5]$ se

$$f(x) = (x - 2)^{2/3}$$

Solução Como f é contínua em $[1, 5]$, o teorema do valor extremo pode ser aplicado

$$f'(x) = \frac{2}{3(x - 2)^{1/3}}$$

Não existe valor de x para a qual $f'(x) = 0$. Mas, como $f'(x)$ não existe em 2, concluímos que 2 é um número crítico de f; assim, os extremos absolutos ocorrem em 2 ou num dos extremos do intervalo. Os valores da função nesses números estão na Tabela 2.

Da tabela, concluímos que o valor mínimo absoluto de f em $[1, 5]$ é 0, ocorrendo em 2, e o valor máximo absoluto de f em $[1, 5]$ é $\sqrt[3]{9}$, ocorrendo em 5. Um esboço do gráfico dessa função em $[1, 5]$ está na Figura 16.

EXERCÍCIOS 4.1

Nos Exercícios de 1 a 20, ache os números críticos da função dada.

1. $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x$
2. $g(x) = 2x^3 - 2x^2 - 16x + 1$
3. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$
4. $f(x) = x^{7/3} + x^{4/3} - 3x^{1/3}$
5. $g(x) = x^{6/5} - 12x^{1/5}$
6. $f(x) = x^4 + 11x^3 + 34x^2 + 15x - 2$

7. $f(t) = (t^2 - 4)^{2/3}$
8. $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)^{1/3}$
9. $h(x) = \dfrac{x-3}{x+7}$
10. $f(t) = t^{5/3} - 3t^{2/3}$
11. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$
12. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 5x + 4}$
13. $f(x) = \operatorname{sen}^2 3x$
14. $f(z) = \cos^2 4z$
15. $g(t) = \operatorname{sen} 2t \cos 2t$
16. $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos 2x$
17. $f(x) = \operatorname{tg}^2 4x$
18. $g(x) = \sec^2 3x$
19. $G(x) = (x-2)^3(x+1)^2$
20. $F(x) = (5+x)^3(2-x)^2$

Nos Exercícios de 21 a 40, ache os extremos absolutos da função dada no intervalo indicado, se existirem, e determine os valores de x nos quais ocorrem os extremos absolutos. Faça um esboço do gráfico da função no intervalo.

21. $f(x) = 4 - 3x$; $(-1, 2]$
22. $f(x) = x^2 - 2x + 4$; $(-\infty, +\infty)$
23. $g(x) = \dfrac{1}{x}$; $[-2, 3]$
24. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $[2, 3)$
25. $f(x) = 2\cos x$; $[-\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi)$
26. $G(x) = -3 \operatorname{sen} x$; $[0, \frac{3}{4}\pi)$
27. $f(x) = \sqrt{3+x}$; $[-3, +\infty)$
28. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$; $(-2, 2)$
29. $h(x) = \dfrac{4}{(x-3)^2}$; $[2, 5]$
30. $g(x) = \dfrac{3x}{9-x^2}$; $(-3, 2)$
31. $F(x) = |x-4| + 1$; $(0, 6)$
32. $f(x) = |4 - x^2|$; $(-\infty, +\infty)$
33. $g(x) = \sqrt{4+7x}$; $[0, 3)$
34. $F(x) = U(x) - U(x-1)$ onde $U(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases}$; $(-1, 1)$
35. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x-5} & \text{se } x \neq 5 \\ 2 & \text{se } x = 5 \end{cases}$; $[3, 5]$
36. $f(x) = \begin{cases} |x+1| & \text{se } x \neq -1 \\ 3 & \text{se } x = -1 \end{cases}$; $[-2, 1]$
37. $f(x) = x - [\![x]\!]$; $(1, 3)$
38. $h(x) = 2x + [\![2x-1]\!]$; $(1, 2]$
39. $g(x) = \sec 3x$; $[-\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi]$
40. $f(x) = \operatorname{tg} 2x$; $[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{6}\pi]$

Nos Exercícios de 41 a 58, ache o valor máximo absoluto e o valor mínimo absoluto da função dada no intervalo indicado pelo método usado nos Exemplos 3 e 4 desta secção. Faça um esboço do gráfico da função no intervalo.

41. $g(x) = x^3 + 5x - 4$; $[-3, -1]$
42. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$; $[-4, 4]$
43. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$; $[-4, 0]$
44. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$; $[-3, 2]$
45. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$; $[0, 3]$
46. $g(x) = x^4 - 8x^2 + 16$; $[-1, 4]$
47. $f(t) = 2 \operatorname{sen} t$; $[-\pi, \pi]$
48. $f(w) = 3\cos 2w$; $[\frac{1}{6}\pi, \frac{3}{4}\pi]$
49. $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{cosec} 2x$; $[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{6}\pi]$
50. $h(x) = 2\sec \frac{1}{2}x$; $[-\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi]$
51. $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$; $[-1, 2]$
52. $f(x) = \dfrac{x+5}{x-3}$; $[-5, 2]$
53. $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-3}$; $[0, 1]$
54. $f(x) = \begin{cases} 2x - 7 & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - x^2 & \text{se } 2 < x \leqslant 4 \end{cases}$; $[-1, 4]$
55. $F(x) = \begin{cases} 3x - 4 & \text{se } -3 \leqslant x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$; $[-3, 3]$
56. $G(x) = \begin{cases} 4 - (x+5)^2 & \text{se } -6 \leqslant x \leqslant -4 \\ 12 - (x+1)^2 & \text{se } -4 < x \leqslant 0 \end{cases}$; $[-6, 0]$
57. $f(x) = (x+1)^{2/3}$; $[-2, 1]$
58. $g(x) = 1 - (x-3)^{2/3}$; $[-5, 4]$
59. Prove o Teorema 4.1.3 para o caso em que f tem um valor máximo relativo em c.

4.2 APLICAÇÕES ENVOLVENDO EXTREMOS ABSOLUTOS NUM INTERVALO FECHADO

Vamos aplicar o teorema do valor extremo a alguns problemas nos quais a solução é um extremo absoluto de uma função num intervalo fechado. O teorema assegura a existência de ambos os valores máximo e mínimo absolutos de uma função contínua num intervalo fechado. Na ilustração a seguir mostraremos o procedimento, considerando o problema discutido no Exemplo 4 da Secção 2.7.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Um fabricante de caixas de papelão deseja fazer caixas abertas a partir de pedaços de papelão com 12 cm² cortando quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando os lados para cima. Queremos encontrar o comprimento do lado do quadrado a ser cortado para obter uma caixa com o maior volume possível. A Figura 1 representa um dado pedaço de papelão e a Figura 2 representa a caixa. Mostramos no Exemplo 4 da Secção 2.7 que se x cm for o comprimento do lado do quadrado a ser cortado e $V(x)$ cm³ for o volume da caixa, então

$$V(x) = 144x - 48x^2 + 4x^3$$

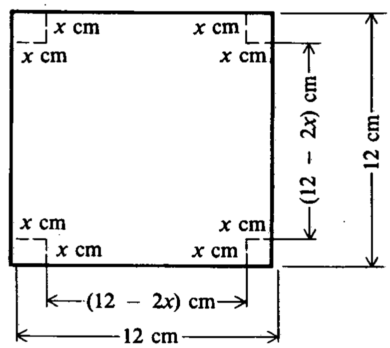


FIGURA 1

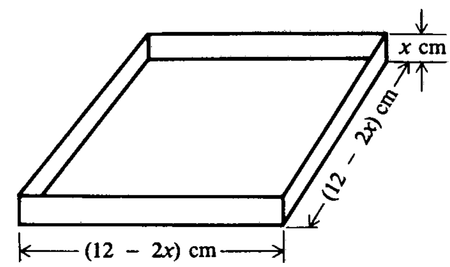


FIGURA 2

e o domínio de V será o intervalo fechado [0, 6]. Como V é contínua em [0, 6], segue do teorema do valor extremo que V tem um valor máximo absoluto nesse intervalo. Sabemos também que esse valor máximo absoluto precisa ocorrer num número crítico de V ou num extremo do intervalo. Para encontrar os números críticos de V determinamos $V'(x)$ e então encontramos os valores de x para os quais $V'(x) = 0$ ou $V'(x)$ não existe.

$$V'(x) = 144 - 96x + 12x^2$$

$V'(x)$ existe para todos os valores de x. Se $V'(x) = 0$,

$$12(x^2 - 8x + 12) = 0$$

$$x = 6 \qquad x = 2$$

Os números críticos de V são 2 e 6, ambos pertencentes ao intervalo fechado [0, 6]. O valor máximo absoluto de V em [0, 6] precisa ocorrer num número crítico ou num extremo do intervalo. Como $V(0) = 0$ e $V(6) = 0$, enquanto que $V(2) = 128$, o valor máximo absoluto de V em [0, 6] é 128, ocorrendo quando $x = 2$.

Logo, o maior volume possível é de 128 cm³, obtido quando o comprimento do lado do quadrado a ser cortado é de 2 cm. ◀

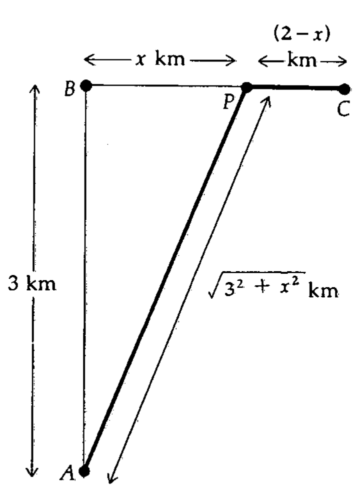


FIGURA 3

EXEMPLO 1 Os pontos A e B estão em lados opostos de um rio reto com 3 km de largura. O ponto C está na mesma margem que B, mas 2 km rio abaixo. Uma companhia telefônica deseja estender um cabo de A até C. Se o custo por quilômetro do cabo é 25% maior sob a água do que em terra, como deve ser estendido o cabo, de forma que o custo seja o menor para a companhia?

Solução Consulte a Figura 3. Seja P um ponto na mesma margem que B e C e entre B e C, de tal forma que o cabo será estendido de A para P e deste para C. Seja x km a distância de B até P. Logo, $(2 - x)$ quilômetros será a distância de P até C e $x \in [0, 2]$. Seja k o custo por quilômetro em terra e $\frac{5}{4}k$ o custo por quilômetro sob a água (k é uma constante). Se $C(x)$ for o custo total da ligação de A até P e de P até C, então

$$C(x) = \tfrac{5}{4}k\sqrt{3^2 + x^2} + k(2 - x)$$

Como C é contínua em [0, 2], o teorema do valor extremo pode ser aplicado, assim, C tem ambos os valores, máximo e mínimo, absolutos, em [0, 2]. Queremos encontrar o valor mínimo absoluto.