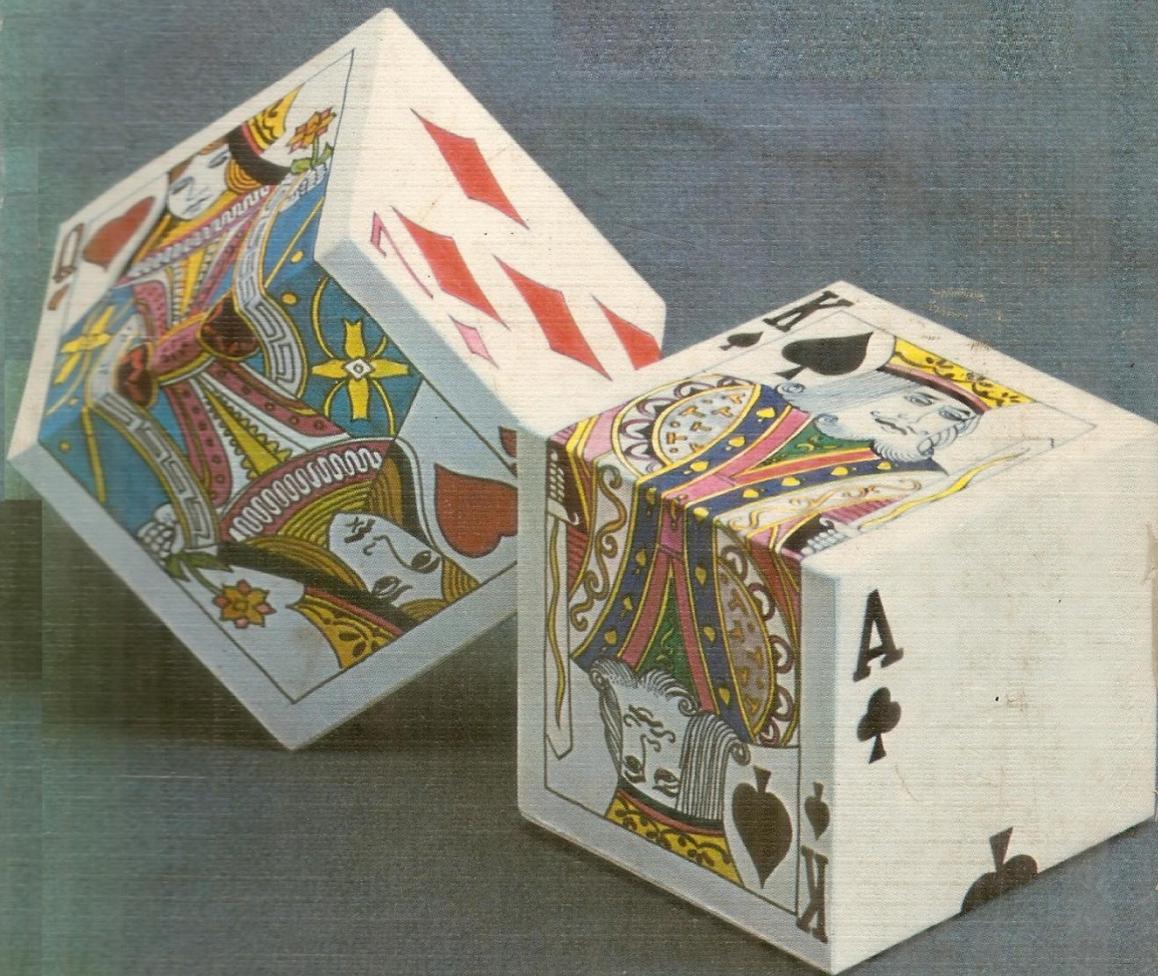


barry r. james
probabilidade:
um curso em nível
intermediário



Le calcul des probabilités n'est au fond que le bon sens réduit au calcul.
 — Laplace

A. *Ao leitor.*

O presente volume é oferecido para uso em cursos de Probabilidade em nível “intermediário”, que devia ser entendido como o nível entre um curso elementar de Introdução à Probabilidade e um curso mais avançado que trata de Probabilidade com base na Teoria da Medida e Integração. O material aqui apresentado tem sido usado várias vezes em disciplinas de Probabilidade em nível de início de Mestrado, mas também poderá ser usado em nível de graduação se alguns assuntos de natureza mais técnica forem pulados. (Tais assuntos são indicados no texto pelo aviso que podem ser omitidas “em uma primeira leitura”.)

Este livro não pretende ser introdutório, embora eventualmente possa ser usado como tal. Por exemplo, um assunto muito comum nos livros de Introdução à Probabilidade, e que não será considerado aqui, é a teoria combinatória. É preferível, mas não necessário, que o leitor já tenha alguma noção das distribuições discretas clássicas baseadas na contagem de permutações, combinações, etc., tais como a binomial, hipergeométrica e multinomial. Uma boa discussão dessas distribuições pode ser encontrada em Breiman ([6], p. 19-31, em inglês) ou Feller ([8], traduzido para o Português).

Para se poder acompanhar o texto deste livro, os reais prerequisites são um curso de Cálculo Diferencial e Integral e alguma familiaridade com os conceitos básicos de conjuntos e funções. É bom que o leitor saiba lidar com uniões, interseções e complementares de conjuntos, e conheça os conceitos de imagem inversa de um Conjunto por uma função, supremo e íntimo de um conjunto e limite de uma seqüência de números reais. Em caso de uma eventual lacuna na formação do leitor nesta área de Análise, recomenda-se uma consulta ao livro *Curso de Análise* (Volume 1), de Elon Lima [14]. Lá se pode achar, também, definições e discussões de outros

conceitos analíticos que aparecem de vez em quando aqui, tais como o limite superior de uma seqüência de números reais, ou a integral de Riemann. Além disso, integrais múltiplas entram em jogo no Capítulo 2, e será bom se até o §2.7 o leitor já tiver ouvido falar na matriz jacobiana e derivadas parciais, cuja definição poderá ser encontrada em qualquer bom texto de Cálculo Avançado. Finalmente, nos parágrafos 7.2 e 7.3 usam-se alguns conceitos elementares de Álgebra Linear; em particular, é preciso conhecer as regras de multiplicação de matrizes e vetores.

Em caso de qualquer dúvida que surgir sobre o significado de um símbolo usado no texto, o leitor deverá consultar a lista de símbolos e notações que aparece no final do livro. Procurei fazer uma lista completa, mas se persistir a dúvida, é recomendável consultar os livros, citados acima, de Lima [14] ou Feller [8]. (A única diferença importante entre a notação de [14] e a presente, é que aqui o complementar de um conjunto A é representado por A^c .)

Como é sempre o caso com livros de Matemática deste nível, as listas de exercícios são parte importantíssima do livro. Há grande número de exercícios puramente computacionais, para ajudar o leitor a se treinar no cálculo básico de probabilidades. Há muitos exercícios que estendem e desenvolvem idéias abordadas no texto, e alguns outros que introduzem idéias não consideradas ali. Os exercícios estão arranjados por seção, e de um modo geral os problemas foram colocados na ordem que achei mais conveniente para sua resolução posterior. Mas esta regra não foi seguida com muita fidelidade, e recomendo que o leitor ao menos leia todos os exercícios quando chegar ao final de cada seção, resolvendo em seguida os que ele achar mais interessantes. Sugestões foram incluídas com os exercícios que considerei mais difíceis, ou com os que fogem ao nível da seção em que se encontram.

B. *Ao professor.*

O material no livro é mais que o suficiente para um curso de semestre. No IMPA, o curso de Probabilidade é de quatro meses e, cada vez que foi usada a apostila precursora deste livro, sentiu-se a necessidade de correr no final para abordar todos os assuntos aqui presentes. Capítulos 1, 2 e 3 formam a base do livro e podem ser feitos em mais ou menos a metade de um período. Muitas demonstrações nos Capítulos 5 e 6 são técnicas e poderão ser omitidas. Os parágrafos 6.3, 7.2 e 7.3 constituem um assunto especial — a parte da Estatística Multivariada — que poderá ser omitido ou até condensado para apresentação em uma aula no final do curso.

O Capítulo 4 é muito mais extenso do que costuma ser o tratamento de distribuição e esperança condicionais em textos da Teoria da Probabilidade. Em caso de tempo exíguo, esse capítulo poderá ser abreviado, pois consiste, na maior parte, em exemplos. Mas será bom se o aluno terminar o capítulo com, pelo menos, uma boa idéia intuitiva do princípio da preservação de chances relativas, pois assim terá condições de lidar no futuro com aplicações de condicionamento, que é da maior importância nas áreas de Confiabilidade, Processos Estocásticos e Estatística (tanto Bayesiana quanto Não-Bayesiana).

Quanto aos requisitos, quero enfatizar que não é necessário que o aluno tenha conhecimentos da Teoria da Medida e a integral de Lebesgue para poder acompanhar o livro. A esperança matemática de uma variável aleatória é tratada utilizando-se da integral de Stieltjes, cuja definição e propriedades são abordadas no §3.1. A integral de Lebesgue é mencionada apenas em observações. Distribuição e esperança condicionais são tratadas em plena generalidade, ou seja, sem a restrição aos casos simples que costumam ser tratados em livros de Introdução à Probabilidade. Mas o enfoque adotado é o que chega às definições partindo da consideração de limites de probabilidades condicionais. A relação entre este tratamento mais intuitivo e a abordagem de Probabilidade Avançada, que utiliza o Teorema de Radon-Nikodym, é formalizada no §4.3 (esta formalização poderá ser omitida, como é indicado no texto).

C. Uma reta sobre terminologia.

Durante o processo de escrever este livro, esbarrei frequentemente no problema de terminologia. Como o português não é minha língua natal, procurei ser fiel ao idioma ao máximo possível. Mas descobri vários conceitos que, embora representados por uma palavra ou frase em outras línguas, possuíam mais de uma versão aqui no Brasil. Era, por exemplo, o caso de “esperança” e “expectância” para indicar a média de uma variável aleatória. Precisei, então, fazer uma escolha. Gostaria agora de explicar minha escolha em três casos.

(1) Parece-me que a palavra “expectância” surgiu em português como tradução do inglês “expectation”. Porém, a palavra usada em espanhol é “esperanza” e em francês é “espérance”, esta última sendo usada desde, pelo menos, o século 18. Portanto, optei por “esperança”.

(2) Resolvi usar o adjetivo “condicional”, em vários lugares em que também se usa “condicionada”, a saber, em “probabilidade condicional”, “distribuição condicional” e “esperança condicional”.

Escolhi assim porque quando ocorre um evento, são ocorrências de outros eventos e valores de variáveis aleatórias que estão sendo diretamente afetados (i.e., condicionados), decorrendo daí as modificações nas probabilidades, distribuições e esperanças através das respectivas definições. Portanto, prefiro “condicional”, mas talvez seja mais uma questão de gosto.

(3) Primeiro, consideremos um exemplo do problema: na expressão “leite de vaca puro”, é óbvio, pela concordância, que não estamos opinando sobre a vaca. Mas em espanhol, onde “leche” é feminina, a expressão seria altamente ambígua. Temos o mesmo problema em português com a expressão “Teorema do Limite Central”, atualmente muito usado no Brasil. Assim como está, esta frase dá a nítida impressão de que é o limite que seja central, o que na realidade não faz sentido. Por isso, optei pelo uso de “Teorema Central do Limite”, para afastar qualquer dúvida sobre o que seja central.

É interessante que a frase em inglês, “Central Limit Theorem”, é também altamente ambígua, e acho que isto explica a tradução de uso corrente no Brasil. Ocorre que a origem da expressão foi, aparentemente, o alemão e não o inglês. De fato, a expressão é frequentemente atribuída a Pólya, que usou a frase “der zentrale Grenzwertsatz”, i.e., o “central” refere-se ao “teorema do limite”.

D. Agradecimentos.

Este livro surgiu de notas de aulas usadas no curso básico de Probabilidade do programa de Mestrado em Matemática Aplicada do IMPA. Um curso mais ou menos parecido com o presente livro foi dado pela primeira vez em 1976, e desde então as notas e a apostila resultante foram sendo modificadas de ano em ano, até chegarem a seu estado atual, que é este livro. Dei o curso três vezes neste período, e a apostila foi usada também por meus colegas Pedro J. Fernández e Ricardo Frischtak, no IMPA, e Anníbal Parracho Sant’ana, no Instituto de Matemática da UFRJ. Sou muito grato a eles pelos seus comentários e sugestões.

As versões semifinais do manuscrito foram cuidadosamente lidas por Maria Eulália Vares e Sergio Wechster. Fizeram muitas sugestões para melhorar a apresentação do texto e contribuíram ao livro com vários exercícios. Além disso, conseguiram corrigir grande número de erros de português, ao mesmo tempo ajeitando a minha versão do idioma. A eles, minha profunda gratidão. A propósito, devo dizer aqui que os erros de português ainda restantes são única e exclusivamente da responsabilidade do autor.

Este livro não poderia ter acontecido sem o apoio e incentivo constantes dos meus colegas do IMPA. Estou especialmente obrigado a Djalma Pessoa, Elon Lima e Ruben Klein, não somente pelo apoio recebido, mas também pela insistência deles de que o livro saísse o mais rápido possível.

Grande contribuição foi dada pelas várias turmas de alunos do IMPA, através de suas perguntas, dúvidas, observações e, de modo geral, o “feedback” que deram em aula. Eles até emprestaram suas notas e cadernos para ajudar a escrever a apostila em português. Não dá para citar todos os nomes aqui, mas a todos os alunos — e aos assistentes (monitores) — gostaria de transmitir os meus agradecimentos especiais.

Finalmente, chego à peça chave do livro: a minha esposa e colega, Kang. Descobri nestes últimos meses que o processo de escrever um livro envolve muito mais tempo e trabalho que eu pensava. E foi ela que teve a paciência de agüentar tudo isso, inclusive abrindo mão de qualquer descanso durante os feriados de dezembro para me ajudar. Ela leu vários capítulos com cuidado, fez muitas sugestões boas, e passou a limpo a maior parte da apostila. Pela ajuda, pela paciência e pelo sacrifício, minha gratidão para com ela não tem limite.

Rio de Janeiro, maio de 1981.

BRJ

PREFÁCIO	VII
CAPÍTULO 1 DEFINIÇÕES BÁSICAS	
§ 1.1 Modelo matemático para um experimento (modelo probabilístico) ..	1
§ 1.2 Probabilidade condicional	14
§ 1.3 Independência	18
Exercícios	27
CAPÍTULO 2 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS	
§ 2.1 Variáveis aleatórias e funções de distribuição	35
§ 2.2 Tipos de variáveis aleatórias	41
§ 2.3 A distribuição de uma variável aleatória	47
§ 2.4 Vetores aleatórios	55
§ 2.5 Independência	59
§ 2.6 Distribuições de funções de variáveis e vetores aleatórios	67
§ 2.7 O método do jacobiano	74
§ 2.8 Observações adicionais — variáveis e vetores aleatórios	84
Exercícios	86
CAPÍTULO 3 ESPERANÇA MATEMÁTICA	
§ 3.1 Preliminares: a integral de Stieltjes	97
§ 3.2 Esperança	104
§ 3.3 Propriedades da esperança	113
§ 3.4 Esperanças de funções de variáveis aleatórias	117
§ 3.5 Momentos	120
§ 3.6 Esperanças de funções de vetores aleatórios	126
§ 3.7 Teoremas de convergência	133
Exercícios	137
CAPÍTULO 4 DISTRIBUIÇÃO E ESPERANÇA CONDICIONAIS	
§ 4.1 Distribuição condicional de X dada Y discreta	144
§ 4.2 Distribuição condicional de X dada Y: caso geral	154
§ 4.3 Definições formais e teoremas de existência	162
§ 4.4 Exemplos	166
§ 4.5 Esperança condicional	174
Exercícios	180

CAPÍTULO 5 A LEI DOS GRANDES NÚMEROS

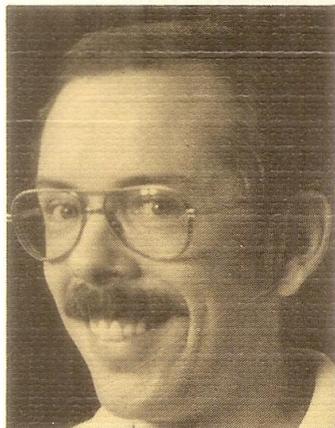
§ 5.1 Introdução às Leis Fraca e Forte dos Grandes Números	189
§ 5.2 Seqüências de eventos e o Lema de Bovel-Cantelli.....	197
§ 5.3 A Lei Forte	202
Exercícios	215

CAPÍTULO 6 FUNÇÕES CARACTERÍSTICAS E CONVERGÊNCIA

§ 6.1 Funções características	221
§ 6.2 Convergência em distribuição.....	231
§ 6.3 Função característica de um vetor aleatório.....	238
§ 6.4 Observações e complementos	244
Exercícios	253

CAPÍTULO 7 O TEOREMA CENTRAL DO LIMITE

§ 7.1 O Teorema Central do Limite para seqüências de variáveis aleatórios	261
§ 7.2 A distribuição normal multivariada	273
§ 7.3 O Teorema Central do Limite — caso multivariado.....	277
Exercícios	280
REFERÊNCIAS	286
ÍNDICE DE NOTAÇÕES	287
ÍNDICE ALFABÉTICO	288



barry r. james

É americano da Pennsylvania, criado em Minnesota, onde faz um frio de rachar. Bacharelou-se ("summa cum laude") no Williams College, Massachusetts, obteve o Doutorado (Ph.D) em Estatística na Universidade da Califórnia e, um ano depois (1972), veio para o Brasil (leia-se Rio de Janeiro), numa trajetória que faz um ângulo agudo com o gradiente da temperatura, como se vê. Mantida esta condição,

difícilmente sairá daqui. É Pesquisador Associado do IMPA e suas áreas preferidas de pesquisa são Probabilidade e Estatística não-Paramétrica. Gosta de trabalhar em parceria com a esposa Kang Ling, que também doutorou-se em Estatística na Universidade da Califórnia, em Berkeley e é Pesquisadora Associada do IMPA. Ela, não sendo co-autora do livro, não concordou em sair na foto, o que sem dúvida o torna menos atraente.

**probabilidade:
um curso em nível
intermediário**



CNPq Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

impa



Instituto de Matemática Pura e Aplicada