função $\log_a: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ costuma ser definida como a inversa da função exponencial $y \mapsto a^y$. Isto requer o trabalho preliminar de estabelecer o significado e as propriedades das potências a^y, onde y é um número real qualquer, o que é possível fazer rigorosamente. Mas achamos mais simples definir primeiro o logaritmo e, a partir deste, a exponencial, como faremos agora.

Definiremos a função $\log: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ pondo, para cada $x > 0$,

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

O número $\log x$ é chamado o *logaritmo* de x. Lembrando que $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, vemos que $\log x < 0$ se $0 < x < 1$, $\log 1 = 0$ e $\log x > 0$ quando $x > 1$.

A função log é monótona crescente, derivável, com $(\log)'(x) = 1/x$, $(\log)''(x) = -1/x^2$, etc. Segue-se que log é infinitamente derivável, isto é, $\log \in C^\infty$. Vê-se também que log é uma função côncava.

Teorema 8. *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$ tem-se $\log(xy) = \log x + \log y$.*

Demonstração: $\log(xy) = \int_1^{xy} dt/t = \int_1^x dt/t + \int_x^{xy} dt/t = \log x + \int_x^{xy} dt/t$. Quando s varia de 1 a y, o produto xs varia de x a xy. Logo a mudança de variável $t = xs$ nos dá $dt = xds$ e $\int_x^{xy} dt/t = \int_1^y xds/xs = \int_1^y ds/s = \log y$, o que prova o teorema. □

Corolário 1. *Para todo número racional r, tem-se $\log(x^r) = r.\log x$.*

Com efeito, segue-se do Teorema 8 que $\log(x^n) = n.\log x$ quando $n \in \mathbb{N}$. De $x^n.x^{-n} = 1$ resulta $0 = \log(x^n.x^{-n}) = \log(x^n) + \log(x^{-n}) = n.\log x + \log(x^{-n})$, donde $\log(x^{-n}) = -n \log x$. Isto prova o corolário para $r \in \mathbb{Z}$. No caso geral, $r = p/q$ onde $p, q \in \mathbb{Z}$. Por definição, $(x^{p/q})^q = x^p$. Daí, pelo que já provamos, $q.\log(x^{p/q}) = p.\log x$, donde $\log(x^{p/q}) = (p/q)\log x$. □

Corolário 2. *$\log: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é sobrejetiva.*

Como log é contínua, sua imagem é um intervalo, portanto basta mostrar que log é ilimitada superior e inferiormente, o que decorre das igualdades $\log(2^n) = n \log 2$ e $\log(2^{-n}) = -n.\log 2$. □

Sendo uma função crescente, log é uma bijeção de $\mathbb{R}^+$ sobre $\mathbb{R}$. Sua inversa, $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é chamada a *função exponencial*. Por definição, $\exp(x) = y \Leftrightarrow \log y = x$, ou seja, $\log(\exp(x)) = x$ e $\exp(\log y) = y$.

Existe um único número real cujo logaritmo é igual a 1. Ele é indicado pelo símbolo e. Mostraremos logo mais que e coincide com o número introduzido nos Exemplos 12 e 13 do Capítulo 3. Por enquanto, sua definição é $e = \exp(1)$.

Teorema 9. *A função exponencial $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é uma bijeção crescente, de classe C^∞, com $(\exp)'(x) = \exp(x)$ e $\exp(x+y) = \exp(x).\exp(y)$ para $x, y \in \mathbb{R}$ quaisquer. Além disso, para todo $r \in \mathbb{Q}$ tem-se $\exp(r) = e^r$.*

Demonstração: Pela regra de derivação da função inversa, para cada $x \in \mathbb{R}$, com $\exp(x) = y$, tem-se $(\exp)'(x) = 1/(\log)'(y) = y = \exp(x)$. Assim $\exp' = \exp$, donde $\exp \in C^\infty$. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, sejam $x' = \exp(x)$ e $y' = \exp(y)$, logo $x = \log x'$ e $y = \log y'$. Então $\exp(x+y) = \exp(\log x' + \log y') = \exp[\log(x'y')] = \exp(x).\exp(y)$. Se r é racional, o Corolário 1 do Teorema 8 nos dá $\log(\exp(r)) = r = r.1 = r.\log e = \log(e^r)$, donde $\exp(r) = e^r$, pela injetividade de log. □

A igualdade $\exp(r) = e^r$ para $r \in \mathbb{Q}$, juntamente com a relação $\exp(x+y) = \exp(x).\exp(y)$ nos indicam que $\exp(x)$ se comporta como uma potência de base e e expoente x. Poremos então, por definição, $e^x = \exp(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Com isto, passa a ter significado a potência e^x para x real qualquer.

Com esta notação, temos

$$e^{x+y} = e^x.e^y, \quad e^0 = 1, \quad e^{-x} = 1/e^x,$$
$$x < y \Leftrightarrow e^x < e^y,$$
$$\log(e^x) = x, \quad e^{\log y} = y, \quad \text{para quaisquer } x \in \mathbb{R}, y > 0$$

Temos ainda $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$, como se vê facilmente.

Pelo Teorema do Valor Médio, para todo $x > 1$ existe c tal que $1 < c < x$ e $\log x = \log x - \log 1 = (\log)'(c)(x-1) = (x-1)/c$. Segue-se que $\log x < x$ para todo $x \geq 1$. Como $\log x = 2\log\sqrt{x}$, temos $0 < \log x < 2\sqrt{x}$, donde $0 < \log x/x < 2/\sqrt{x}$ para todo $x \geq 1$. Como $\lim_{x\to+\infty}(2/\sqrt{x}) = 0$, segue-se que $\lim_{x\to+\infty} \log x/x = 0$, fato que tinha sido provado no final do Capítulo 3 supondo $x = n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, dado qualquer polinômio $p(x)$, tem-se $\lim_{x\to+\infty} p(x)/e^x = 0$. Para provar isto, basta considerar o caso em que $p(x) = x^k$. Então escrevemos $e^{x/k} = y$, donde $x = k.\log y$. Evidentemente, $x \to +\infty$ se, e somente se,

$y \to +\infty$. Portanto

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{x/k}}\right) = \lim_{y\to+\infty}\left(k\frac{\log y}{y}\right) = 0$$

e daí

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{x/k}}\right)^k = 0.$$

Se c e k são constantes reais, a função $f(x) = c.e^{kx}$ tem derivada $f'(x) = k.c.e^{kx} = k.f(x)$. Esta propriedade de possuir derivada proporcional a si mesma é responsável por grande parte das aplicações da função exponencial. Mostraremos que essa propriedade é exclusiva das funções desse tipo.

Teorema 10. *Seja $f: I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo I, com $f'(x) = k.f(x)$. Se, para um certo $x_0 \in I$, tem-se $f(x_0) = c$ então $f(x) = c.e^{k(x-x_0)}$ para todo $x \in I$.*

Demonstração: Seja $\varphi: I \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = f(x).e^{-k(x-x_0)}$. Então $\varphi'(x) = f'(x)e^{-k(x-x_0)} - kf(x).e^{-k(x-x_0)} = 0$. Logo φ é constante. Como $\varphi(x_0) = c$, tem-se $\varphi(x) = c$ para todo $x \in I$, ou seja, $f(x) = c.e^{k(x-x_0)}$. □

Como a derivada da função $f(x) = e^x$ é ainda $f'(x) = e^x$, temos $f'(0) = 1$. Segue-se da definição de derivada que $\lim_{x\to 0}(e^x - 1)/x = 1$.

Dados $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, definiremos a potência a^x de modo que seja válida a fórmula $\log(a^x) = x.\log a$. Para isto, tomaremos esta igualdade como definição, ou seja, diremos que a^x é o (único) número real cujo logaritmo é igual a $x.\log a$.

Noutras palavras, $a^x = e^{x\log a}$.

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a^x$, tem as propriedades esperadas.

A primeira é que, para $x = p/q \in \mathbb{Q}$ (onde $q > 0$), $f(x) = \sqrt[q]{a^p}$. Com efeito, $f(x) = \exp((p/q)\log a) = \exp(\log \sqrt[q]{a^p}) = \sqrt[q]{a^p}$.

Tem-se $a^{x+y} = a^x.a^y$, $a^0 = 1$, $a^{-x} = 1/a^x$ e $(a^x)^y = a^{xy}$.

A função $f(x) = a^x$ tem derivada $f'(x) = a^x.\log a$, portanto é de classe C^∞. A derivada f' é positiva se $a > 1$ e negativa se $0 < a < 1$. Logo f é crescente no primeiro caso e decrescente no segundo. Quando $a > 1$, tem-se $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$. Se $0 < a < 1$, os valores destes limites são trocados. Se $0 < a \neq 1$, $f(x) = a^x$ é uma bijeção de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^+$, cuja inversa indica-se com $\log_a: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Para cada $x > 0$, $\log_a x$ chama-se o *logaritmo de x na base a*.

Assim $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$. Voltamos à definição clássica. Quando $a = e$, vale $\log_e x = \log x$. O logaritmo que definimos no começo desta seção tem, portanto, base e. É o chamado *logaritmo natural*. Para todo $x > 0$, temos

$$e^{\log x} = x = a^{\log_a x} = e^{\log_a x.\log a},$$

portanto $\log x = \log_a x.\log a$, ou seja, $\log_a x = \log x/\log a$. Desta última fórmula resultam propriedades de $\log_a x$ análogas às de $\log x$, como $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ ou $(\log_a)'(x) = \dfrac{1}{x.\log a}$.

Para finalizar esta seção, mostraremos que e coincide com o número definido nos Exemplos 12 e 13 do Capítulo 3.

A derivada da função $\log x$ é igual a $1/x$. No ponto $x = 1$ esta derivada vale 1. Isto significa que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1,$$

ou seja,

$$\lim_{x\to 0}\log[(1+x)^{1/x}] = 1.$$

Como

$$(1+x)^{1/x} = \exp\{\log[(1+x)^{1/x}]\},$$

vem

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \exp(1) = e.$$

Pondo $y = 1/x$, concluímos que $\lim_{y\to\infty}(1+1/y)^y = e$.

Em particular, $\lim_{n\in\mathbb{N}}(1+1/n)^n = e$.

4. Integrais impróprias

São de dois tipos: integrais de funções ilimitadas (definidas num intervalo limitado porém não fechado) e integrais de funções definidas num intervalo ilimitado.

O teorema seguinte descarta um caso trivial.

Teorema 11. *Seja $f: (a,b] \to \mathbb{R}$ limitada, tal que a restrição $f|[c,b]$ é integrável para cada $c \in (a,b]$. Então, seja qual for o valor*

que se atribua a $f(a)$, obtém-se uma função integrável $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, com $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)dx$.

Demonstração: Seja K tal que $a \le x \le b \Rightarrow |f(x)| \le K$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $c \in (a,b]$ com $K.(c-a) < \varepsilon/4$. Como $f|[c,b]$ é integrável, existe uma partição P de $[c,b]$ tal que $S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon/2$. Então $Q = P \cup \{a\}$ é uma partição de $[a,b]$ tal que

$$S(f;Q) - s(f;Q) \le 2K(c-a) + S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon.$$

Logo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável. A integral indefinida $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_x^b f(t)dt$ cumpre a condição de Lipschitz $|F(y) - F(x)| \le K|y-x|$ logo é (uniformemente) contínua, donde $F(a) = \lim_{c\to a+} F(c) = \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)dx$. □

Resultado análogo vale para para $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$.

Basta, portanto, considerar $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ ilimitada. Suporemos também f contínua. A *integral imprópria* $\int_a^b f(x)dx$ é definida como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Em cada intervalo fechado $[a+\varepsilon, b]$, f é contínua, logo integrável. O problema é saber se existe ou não o limite acima. Se ele existir a integral será *convergente*; se não existir o limite a integral será *divergente*.

Evidentemente, o caso de uma função contínua ilimitada $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ se trata de modo semelhante, pondo-se $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. Finalmente, o caso de $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ contínua reduz-se aos anteriores tomando $c \in (a,b)$ e pondo $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. □

Exemplo 1. Seja $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x^\alpha$. Supondo $\alpha \ne 1$, temos

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty \text{ se } \alpha > 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha} \text{ se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Quando $\alpha = 1$, temos

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \log x\Big]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+} (-\log\varepsilon) = +\infty.$$

Portanto $\int_0^1 dx/x^\alpha$ diverge se $\alpha \ge 1$ e converge para $(1-\alpha)^{-1}$ se $\alpha < 1$. Em particular, $\alpha = 1/2$ dá $\int_0^1 dx/\sqrt{x} = 2$.

Exemplo 2. Seja $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. Então

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx/\sqrt{1-x^2} &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_0^{1-\varepsilon} dx/\sqrt{1-x^2} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \operatorname{arcsen} x\Big]_0^{1-\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \operatorname{arcsen}(1-\varepsilon) \\ &= \operatorname{arcsen} 1 = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Quando $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ cumpre $f(x) \ge 0$ para todo $x \in (a,b]$ então a integral $\int_a^b f(x)dx$ converge se, e somente se, existe $k > 0$ tal que $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \le k$ para todo $\varepsilon \in (0, b-a)$ pois a função $\varphi(\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ é não-crescente. Se existir uma função $g\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\int_a^b g(x)dx$ seja convergente e $0 \le f(x) \le k.g(x)$ para todo $x \in (a,b]$ então $\int_a^b f(x)dx$ converge pois, neste caso, $\varphi(\varepsilon) \le k \cdot \int_a^b g(x)dx$ para todo $\varepsilon \in (0, b-a)$.

Exemplo 3. A integral $I = \int_0^1 dx/\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$ converge se $k \in \mathbb{R}$ cumpre $k^2 < 1$. Com efeito, como $0 \le x \le 1$, temos $1 - k^2 \le 1 - k^2x^2$. Pondo $K = 1/\sqrt{1-k^2}$ segue-se que $1/\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \le K/\sqrt{1-x^2}$ portanto $I \le \int_0^1 K/\sqrt{1-x^2} = K\pi/2$.

Diz-se que a integral imprópria $\int_a^b f(x)dx$ é *absolutamente convergente* quando $\int_a^b |f(x)|dx$ converge. Como no caso de séries, a convergência de $\int_a^b |f(x)|dx$ implica a de $\int_a^b f(x)dx$.

Com efeito, dada $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, definamos sua *parte positiva* e sua *parte negativa* $f_+, f_-\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ pondo, para $a < x \le b$:

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\} \text{ e } f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Então $f_+(x) = \frac{1}{2}[|f(x)| + f(x)]$ e $f_-(x) = \frac{1}{2}[|f(x)| - f(x)]$ de modo que f_+ e f_- são contínuas. Além disso, temos $f_+(x) \ge 0$, $f_-(x) \ge 0$, $f = f_+ - f_-$ e $|f| = f_+ + f_-$, donde $f_+ \le |f|$ e $f_- \le |f|$. Segue-se destas desigualdades que se $\int_a^b f(x)dx$ é absolutamente convergente então $\int_a^b f_+(x)dx$ e $\int_a^b f_-(x)dx$ convergem. Logo $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_+(x)dx - \int_a^b f_-(x)dx$ é convergente.

O critério de comparação assume então a seguinte forma: se $f, g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ são contínuas e $\int_a^b g(x)dx$ converge então a condição $|f(x)| \le k.g(x)$ para todo $x \in [a,b)$ implica que $\int_a^b f(x)dx$ é (absolutamente) convergente. Por exemplo,

se $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ é contínua, existem constantes $k > 0$ e $\alpha < 1$ tais que $|f(x)| \leq k/(b-x)^\alpha$ para todo $x \in [a,b)$ então a integral $\int_a^b f(x)dx$ é (absolutamente) convergente.

Tratemos agora de integrais sobre intervalos ilimitados.

Dada $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ contínua, define-se a integral imprópria de f pondo:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx.$$

Se o limite acima existir, a integral diz-se *convergente*. Do contrário, ela diz-se *divergente*. Uma definição análoga é dada quando $f\colon (-\infty,b] \to \mathbb{R}$. Então $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{B\to-\infty} \int_B^b f(x)dx$. Finalmente, para $f\colon (-\infty,+\infty) \to \mathbb{R}$, toma-se um ponto arbitrário $a \in \mathbb{R}$ (geralmente $a = 0$) e põe-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Exemplo 4. Seja $f\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x^\alpha$. Se $\alpha \neq 1$ tem-se

$$\int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{A^{1-\alpha}-1}{1-\alpha},$$

logo

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$$

converge se $\alpha > 1$. Por outro lado, se $\alpha \leq 1$, $\int_1^{+\infty} dx/x^\alpha$ diverge. Isto contrasta com a integral da mesma função no intervalo $(0,1]$.

Exemplo 5. $\int_0^{+\infty} dx/(1+x^2) = \pi/2$. Com efeito, $\operatorname{arctg} x$ é uma primitiva de $1/(1+x^2)$. Por conseguinte

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} (\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Diz-se que uma integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ é *absolutamente convergente* quando $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ converge. Como no caso de intervalos limitados, prova-se que, neste caso, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Vale portanto o *critério de comparação*: se $f, g\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ são contínuas, se $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge e se existe $k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k.g(x)$ para todo $x \geq a$ então $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge (absolutamente). Em particular, se $|f(x)| \leq k/x^\alpha$ com $\alpha > 1$ então $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ é (absolutamente) convergente.

Exemplo 6. Seja $a > 0$. A integral $\int_a^{+\infty} dx/x^2$ converge e, como se vê facilmente, seu valor é $1/a$. Mesmo se não soubéssemos que a derivada de $\operatorname{arctg} x$ é $1/(1+x^2)$, concluiríamos, por comparação, que $\int_a^{+\infty} dx/(1+x^2)$ é convergente pois $1/(1+x^2) \leq 1/x^2$.

Exemplo 7. (*A função gama.*) Trata-se da função $\Gamma\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, definida para todo $t > 0$ pela integral $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}dx$. Para mostrar que a integral acima converge, a decompomos na soma $\int_0^1 + \int_1^{+\infty}$. A integral $\int_0^1 e^{-x}x^{t-1}dx$ converge porque $e^{-x}x^{t-1} \leq 1/x^{1-t}$. A segunda parcela, $\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}dx$ converge porque $e^{-x}x^{t-1} \leq 1/x^2$ para todo x suficientemente grande. Com efeito, esta desigualdade equivale a $x^{t+1}/e^x \leq 1$. Ora, como sabemos, $\lim_{x\to+\infty} x^{t+1}/e^x = 0$, logo existe $a > 0$ tal que $x > a \Rightarrow x^{t+1}/e^x \leq 1$. A função gama estende a noção de fatorial pois $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}$, como se vê integrando por partes.

Exemplo 8. A integral de Dirichlet $I = \int_0^{+\infty} (\operatorname{sen} x/x)dx$ converge, mas não absolutamente. Com efeito, para todo $n \in \mathbb{N}$ seja $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\operatorname{sen} x/x|dx$. Então $I = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$ É claro que $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ e que $\lim a_n = 0$. Logo, pelo Teorema de Leibniz, a série $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n a_n$ (e conseqüentemente a integral) converge. Por outro lado, $\int_0^{+\infty} |\operatorname{sen} x|/x dx$ é a soma da série $\sum_{n=0}^\infty a_n$, cujo termo a_n é a área de uma região que contém um triângulo de base $\pi/2$ e altura $2/(2n+1)\pi$. A área desse triângulo é igual a $1/2\,(2n+1)$. Como a série harmônica diverge, segue-se que $\sum a_n = +\infty$. (Prova-se que $\int_0^{+\infty} (\operatorname{sen} x/x)dx = \pi/2$.)

Uma aplicação bastante conhecida das integrais impróprias é o critério de convergência de séries numéricas contido no seguinte teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em qualquer livro de Cálculo.

Teorema 12. *Seja $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ contínua, monótona, não-decrescente. Para todo número natural $n \geq a$, seja $a_n = f(n)$. A série $\sum a_n$ converge se, e somente se, a integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.*

5. Exercícios

Seção 1: Os teoremas clássicos do Cálculo Integral

1. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável, contínua à direita no ponto $x_0 \in [a,b)$. Prove que $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, dada por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, é derivável à direita no ponto x_0, com $F'_+(x_0) = f(x_0)$. Enuncie fato análogo com "esquerda" em lugar de "direita". Dê exemplos com f integrável, descontínua no ponto x_0, nos quais:

   (a) Existe $F'(x_0)$;

   (b) Não existe $F'(x_0)$.

2. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável, com f' integrável. Prove que, para quaisquer $x, c \in [a,b]$, tem-se $f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t)dt$. Conclua que o Teorema 5 vale com "integrável" em vez de "contínua".

3. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável, com $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Se $\{x \in [a,b];\, f'(x) = 0\}$ tem conteúdo nulo, prove que f é crescente.

4. Dada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ com derivada contínua, prove o Teorema do Valor Médio (Teorema 7 do Capítulo 8) como conseqüência da fórmula de mesmo nome para integrais (Corolário de Teorema 4, deste capítulo).

5. Sejam $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e $\alpha, \beta\colon I \to [a,b]$ deriváveis. Defina $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ pondo $\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$, para todo $x \in I$. Prove que φ é derivável e $\varphi'(x) = f(\beta(x)).\beta'(x) - f(\alpha(x)).\alpha'(x)$.

6. Sejam $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ a função do Exercício 2.3 do Capítulo 10 e $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(0) = 0$ e $g(x) = 1$ se $x > 0$. Mostre que f e g são integráveis porém $g \circ f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ não é integrável.

7. Dada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ com derivada integrável, seja $m = (a+b)/2$. Prove que $f(a) + f(b) = [2/(b-a)] \int_a^b [f(x) + (x-m)f'(x)]dx$.

8. Sejam $f, p\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tais que f é contínua, p é integrável e $p(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Prove que se

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = f(a)\int_a^b p(x)dx,$$

então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(a) = f(c)$. Vale um resultado análogo com $f(b)$ em lugar de $f(a)$. Conclua que no Teorema 4 pode-se tomar $c \in (a,b)$ e que no Corolário do Teorema 5 pode-se exigir que $\theta \in (0,1)$. [Veja Exercício 9, Seção 4, Capítulo 10.]

9. O exercício 3, seção 4 do Capítulo 3 deixa em aberto o cálculo de

$$\lim_{n \to a} \frac{n!e^n}{n^n}.$$

Na realidade, a fórmula de Stirling diz que, pondo $x_n = n!e^n/n^n$ e $w_n = \sqrt{2\pi n}$, tem-se $\lim x_n/w_n = 1$, portanto $\lim x_n = +\infty$. Uma demonstração mais simples de que $\lim x_n = +\infty$ pode ser feita segundo as etapas abaixo indicadas:

A. Integrando por partes, mostre que

$$\int_1^n \log x dx = n\log n - n + 1 = A_n \text{ (digamos).}$$

B. Se B_n é a soma superior da função $\log x$ relativamente à partição $\{1, 2, \ldots, n\}$ do intervalo $[1,n]$, mostre que

$$A_n < B_n = \sum_{k=1}^n \log k = \log n!$$

C. Uma melhor aproximação superior para a área A_n pode ser dada considerando-se, para cada $k = 2, \ldots, n$ a tangente ao gráfico de $y = \log x$ pelo ponto $x = k - 1/2$. O trapézio com base no intervalo $[k-1, k]$ do eixo x, com dois lados verticais e lado inclinado igual a essa tangente tem área $\log(k - 1/2)$. Seja $C_n = \sum_{k=2}^n \log(k - 1/2)$ a soma das áreas desses trapézios. Mostre que $A_n < C_n < B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

D. Mostre que se tem

$$B_n - C_n = \sum_{k=2}^n [\log k - \log(k - 1/2)] = \sum_{k=2}^n 1/2\theta_k,$$

onde $k - 1/2 \leq \theta_k \leq k$.

E. Conclua que

$$\lim(B_n - A_n) \geq \lim(B_n - C_n) = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{\theta_k} = +\infty.$$

F. Observe que

$$B_n - A_n = \log n! - n\log n + n - 1 = \log(n!e^{n-1}n^{-n}),$$

portanto $\lim x_n = +\infty$.

Seção 2: A integral como limite de somas de Riemann

1. Com auxílio de somas de Riemann prove a validez dos seguintes limites:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{p+1}} \sum\limits_{i=1}^{n} i^p = \dfrac{1}{p+1}$,

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \operatorname{sen}(\dfrac{i\pi}{n}) = \dfrac{2}{\pi}$.

2. Dada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, limitada ou não, faz sentido considerar a soma de Riemann $\sum(f;P^*)$, para toda partição pontilhada P^*. Prove que, se existe $\lim_{|P|\to 0} \sum(f;P^*)$, então f é uma função limitada.

3. Prove a recíproca do Teorema 7: se existir $\lim_{|P|\to 0} \sum(f;P^*) = L$ então a função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável e $\int_a^b f(x)dx = L$.

4. Sejam $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integráveis. Para toda partição $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$ sejam $P^* = (P,\xi)$ e $P^\# = (P,\eta)$ pontilhamentos de P. Prove que

$$\lim_{|P|\to 0} \sum f(\xi_i)g(\eta_i)(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

5. Dadas $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, para cada partição pontilhada P^* de $[a,b]$ define-se a *soma de Riemann-Stieltjes*

$$\sum(f,g;P^*) = \sum f(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})].$$

   Prove: se f é integrável e g possui derivada integrável então

$$\lim_{|P|\to 0} \sum(f,g;P) = \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

6. Dada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, seja, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$M(f;n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+ih), \quad h = \frac{(b-a)}{n},$$

   a média aritmética dos valores $f(a+h), f(a+2h), \ldots, f(a+nh) = f(b)$. Prove que se a função f é integrável então

$$\lim_{n\to\infty} M(f;n) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

   Por este motivo, o segundo membro desta igualdade se chama o *valor médio da função* f no intervalo $[a,b]$.

7. Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é convexa, prove que $f(\dfrac{a+b}{2}) \le \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Seção 3: Logaritmos e exponenciais

1. Sejam $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ funções contínuas, não identicamente nulas, tais que $f(x+y) = f(x).f(y)$ e $g(uv) = g(u)+g(v)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $u, v \in \mathbb{R}^+$. Prove que existem $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = e^{ax}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $g(x) = b.\log x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

2. Prove que a seqüência cujo n-ésimo termo é $x_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n - \log n$ é decrescente e limitada, logo converge. (Seu limite é conhecido como a *constante* γ *de Euler-Mascheroni* , cujo valor aproximado é $0,5772$.)

3. Prove que $\lim_{x\to 0} x.\log x = 0$.

4. Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \dfrac{x}{n})^n = e^x$.

Seção 4: Integrais impróprias

1. Verifique a convergência ou divergência das integrais

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-\cos x}, \quad \int_{-3}^{3} \frac{dx}{x^2}, \quad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

2. Verifique a convergência ou divergência das integrais

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{xdx}{1-e^x}.$$

3. Mostre que $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(x^2)dx$ converge mas não absolutamente.

4. Mostre que $\int_0^{+\infty} x.\operatorname{sen}(x^4)dx$ converge, embora a função $x.\operatorname{sen}(x^4)$ seja ilimitada.

5. Seja $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ contínua, positiva, monótona não-crescente. Prove que se $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge então $\lim_{x\to+\infty} x.f(x) = 0$.

6. Seja $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ integrável em cada intervalo limitado $[a,x]$. Prove que a integral imprópria

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$$

existe se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $A > 0$ tal que $A < x < y$ implica $\left|\int_x^y f(t)dt\right| < \varepsilon$. ("Critério de Cauchy".)

7. Prove o Teorema 12.

12

Seqüências e Séries de Funções

Em vários problemas da Matemática e das suas aplicações busca-se uma função que cumpra certas condições dadas. É freqüente, nesses casos, obter-se uma seqüência de funções $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, cada uma das quais cumpre as condições exigidas apenas aproximadamente, porém com aproximações cada vez melhores. Então a função-limite dessa seqüência deverá cumprir as tais condições, caso aconteça o melhor. Isto leva ao estudo de limites de seqüências de funções. Muitas vezes cada função da seqüência obtém-se da anterior somando-se uma função g_n. Neste caso, tem-se uma série de funções $\sum g_n$. Seqüências e séries de funções serão estudadas neste capítulo.

Para seqüências e séries de números há apenas uma noção de limite. Mas para funções há várias. Aqui examinaremos as duas noções mais comuns de convergência, que definiremos a seguir.

1. Convergência simples e convergência uniforme

Diz-se que uma seqüência de funções $f_n: X \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *converge simplesmente* para a função $f: X \to \mathbb{R}$ quando, para todo $x \in X$, a seqüência de números $f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ converge para $f(x)$.

Assim, $f_n \to f$ simplesmente em X quando, dados $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo de ε e de x) tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Graficamente, em cada reta vertical que passa por um ponto $x \in X$ fica determinada uma seqüência de pontos $(x, f_1(x)), \ldots, (x, f_n(x)), \ldots$ interseções dessa reta com os gráficos de $f_1, \ldots, f_n, \ldots$. Estes pontos convergem para $(x, f(x))$, interseção da reta vertical com o gráfico de f.

Exemplo 1. A seqüência de funções $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $f_n(x) = x/n$, converge simplesmente para a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é identicamente nula. Com efeito, para todo $x \in \mathbb{R}$ fixado, tem-se $\lim_{n\to+\infty}(x/n) = 0$.

Um tipo de convergência de funções mais restrito do que a convergência simples, é a convergência uniforme, que definiremos agora.

Uma seqüência de funções $f_n: X \to \mathbb{R}$ *converge uniformemente* para a função $f: X \to \mathbb{R}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo apenas de ε) tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ seja qual for $x \in X$.

No plano $\mathbb{R}^2$, dado $\varepsilon > 0$, a *faixa de raio* ε em torno do gráfico de f é o conjunto

$$F(f;\varepsilon) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in X, f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon\}.$$

Dizer que $f_n \to f$ uniformemente em X significa que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que o gráfico de f_n, para todo $n > n_0$, está contido na faixa de raio ε em torno do gráfico de f.

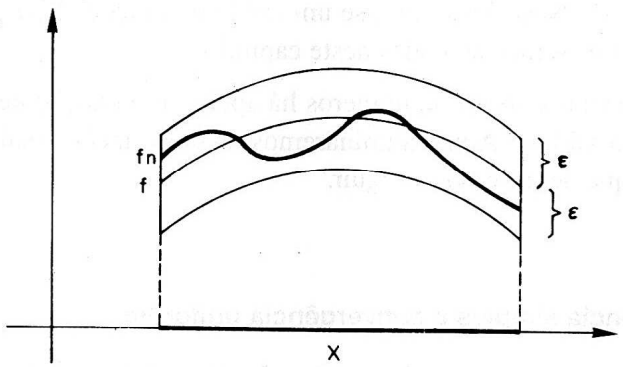

Fig. 10 – O gráfico de f_n está contido na faixa $F(f;\varepsilon)$.

Exemplo 2. Nenhuma faixa de raio ε em torno do eixo das abcissas (gráfico da função identicamente nula) pode conter o gráfico de uma função $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = x/n$. Logo a seqüência (f_n) do Exemplo 1 não converge uniformemente para zero em $\mathbb{R}$. Por outro lado, se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado, digamos com $|x| \le c$ para todo $x \in X$, então $f_n \to 0$ uniformemente em X. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $n_0 > c/\varepsilon$. Então $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x)| = |x|/n < c/n_0 < \varepsilon$.

Exemplo 3. A seqüência de funções contínuas $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n$, converge simplesmente para a função descontínua $f: [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = 0$ se $0 \le x < 1, f(1) = 1$. A convergência é uniforme em todo intervalo da forma $[0, 1-\delta], 0 < \delta < 1$ mas não é uniforme em $[0,1]$. Estas duas afirmações decorrem de fatos gerais (a saber, os Teoremas 1 e 2 abaixo) mas podem ser facilmente provadas a partir da definição. Com efeito, escrevendo $a = 1 - \delta$, temos $0 < a < 1$ logo $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Longrightarrow a^n < \varepsilon$. Então $n > n_0 \Longrightarrow 0 < f_n(x) \le a^n < \varepsilon$ para todo $x \in [0,a]$. Portanto $f_n \to 0$ uniformemente no intervalo $[0, 1-\delta]$. Por outro lado, tomando $\varepsilon = 1/2$, afirmamos que, seja qual for $n_0 \in \mathbb{N}$, existem pontos $x \in [0,1)$ tais que $|f_{n_0}(x) - f(x)| \ge 1/2$, ou seja, $x^{n_0} \ge 1/2$. Basta observar que $\lim_{x\to1^-} x^{n_0} = 1$. Logo existe $\delta > 0$ tal que $1 - \delta < x < 1 \Longrightarrow x^{n_0} > 1/2$. Isto mostra que f_n não converge uniformemente para f no intervalo $[0,1]$.

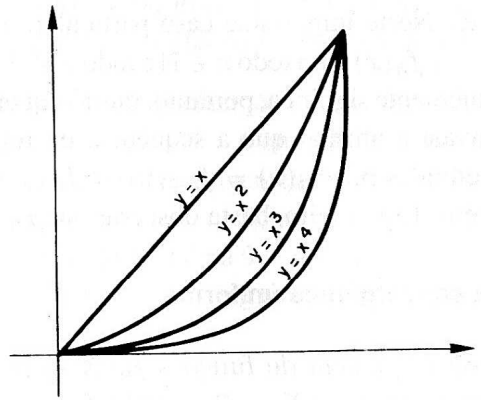

Fig. 11 – As funções $f_n(x) = x^n$ convergem simplesmente no intervalo $[0,1]$ para uma função descontínua.

Exemplo 4. A seqüência de funções contínuas $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ converge simplesmente para a função identicamente nula. Esta convergência não é uniforme. Com efeito, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $f_n(\sqrt[n]{1/2}) = 1/4$. Logo, para $\varepsilon < 1/4$, nenhuma função f_n tem seu gráfico contido na faixa de raio ε em torno da função 0. Por outro lado, se $0 < \delta < 1$, temos $f_n \to 0$ uniformemente no intervalo $[0, 1-\delta]$ pois $x^n \to 0$ uniformemente nesse intervalo e $0 \le x^n(1-x^n) \le x^n$.

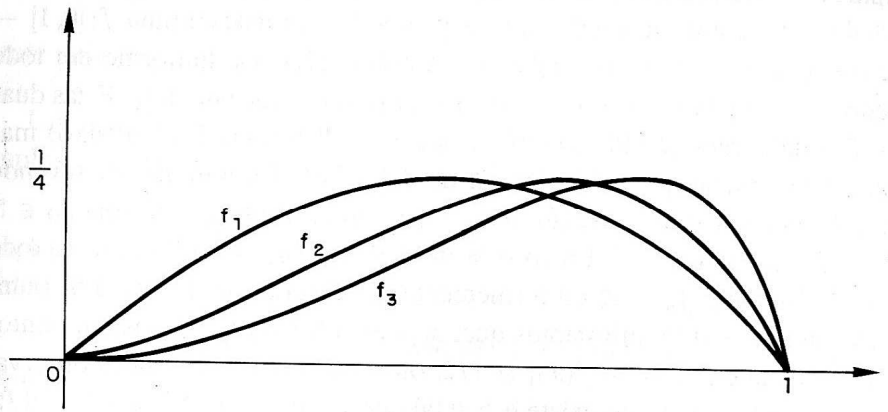

Fig. 12

As considerações feitas nesta seção incluem a soma $f = \sum f_n$ de uma série de funções $f_n: X \to \mathbb{R}$. Neste importante caso particular, tem-se $f = \lim s_n$, onde $s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$. Dizer que a série $\sum f_n$ converge uniformemente significa, portanto, que a seqüência (s_n) converge uniformemente e equivale a afirmar que a seqüência de funções $r_n: X \to \mathbb{R}$ ("restos" da série), definidas por $r_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots$, converge uniformemente para zero. Com efeito, basta observar que $r_n = f - s_n$.

2. Propriedades da convergência uniforme

Teorema 1. *Se uma seqüência de funções $f_n: X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f: X \to \mathbb{R}$ e cada f_n é contínua no ponto $a \in X$ então f é contínua no ponto a.*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ para todo $x \in X$. Fixemos um número natural $n > n_0$. Como f_n é contínua no ponto a, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $|x - a| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon/3$, donde

$$|f(x) - f(a)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Isto prova o teorema. □

Exemplo 5. A seqüência de funções contínuas $f_n(x) = x^n$ não pode convergir uniformemente em $[0, 1]$ pois converge simplesmente para

a função descontínua $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ se $0 \leq x < 1$, $f(1) = 1$. Já a seqüência de funções contínuas $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$ converge simplesmente no intervalo $[0, 1]$ para a função 0, que é contínua mas nem por isso a convergência é uniforme. Mesma observação pode ser feita sobre a seqüência de funções contínuas $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x/n$. A esse respeito, vale o teorema abaixo. Antes de demonstrá-lo, daremos uma definição.

Diz-se que uma seqüência de funções $f_n: X \to \mathbb{R}$ *converge monotonicamente* para a função $f: X \to \mathbb{R}$ quando, para cada $x \in X$, a seqüência $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona e converge para $f(x)$. Assim, por exemplo, as seqüências dos Exemplos 1 e 3 convergem monotonicamente.

É claro que se $f_n \to f$ monotonicamente em X então $|f_{n+1}(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)|$ para todo $x \in X$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2. **(Dini.)** *Se a seqüência de funções contínuas $f_n: X \to \mathbb{R}$ converge monotonicamente para a função contínua $f: X \to \mathbb{R}$ no conjunto compacto X então a convergência é uniforme.*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, ponhamos $X_n = \{x \in X; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como f_n e f são contínuas, cada X_n é compacto. A monotonicidade da convergência, por sua vez, implica $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \cdots$. Finalmente, como $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$, vemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \varnothing$. Segue-se do Teorema 9, Capítulo 5, que algum X_{n_0} (e portanto todo X_n com $n > n_0$) é vazio. Isto significa que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ seja qual for $x \in X$. □

Exemplo 6. A seqüência de funções contínuas $f_n: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, converge monotonicamente para a função (contínua) identicamente nula no conjunto não-compacto $[0, 1)$ mas a convergência não é uniforme. Com efeito, dado $0 < \varepsilon < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ existem pontos $x \in [0, 1)$ tais que $x^n > \varepsilon$, pois $\lim_{x \to 1-} x^n = 1 > \varepsilon$.

Teorema 3. **(Passagem ao limite sob o sinal de integral.)** *Se a seqüência de funções integráveis $f_n: [a, b] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ então f é integrável e*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Noutras palavras: $\int_a^b \lim_n f_n = \lim_n \int_a^b f_n$ *se a convergência é uniforme.*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/4(b-a)$ para todo $x \in [a,b]$. Fixemos $m > n_0$. Como f_m é integrável, existe uma partição P de $[a,b]$ tal que, indicando com ω_i e ω_i' respectivamente as oscilações de f e f_m no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de P, tem-se $\sum \omega_i'(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon/2$. Mas, para $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$ quaisquer, vale:

$$\begin{aligned}|f(y) - f(x)| &\le |f(y) - f_m(y)| + |f_m(y) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &< \omega_i' + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.\end{aligned}$$

Portanto $\omega_i \le \omega_i' + \varepsilon/2(b-a)$. Segue-se que

$$\begin{aligned}\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) &\le \sum \omega_i'(t_i - t_{i-1}) + [\varepsilon/2(b-a)] \sum (t_i - t_{i-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Isto mostra que f é integrável. Além disso,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| &= \left|\int_a^b [f(x) - f_n(x)]dx\right| \\ &\le \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \\ &\le \frac{(b-a)\varepsilon}{4(b-a)} < \varepsilon\end{aligned}$$

se $n > n_0$. Conseqüentemente, $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. □

Observação. Se cada f_n é contínua, a demonstração se simplifica consideravelmente pois f então é contínua, donde integrável.

Exemplo 7. Se uma seqüência de funções integráveis $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ converge simplesmente para $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, pode ocorrer que f não seja integrável. Por exemplo, se $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ for uma enumeração dos números racionais de $[a,b]$ e definirmos f_n como a função que assume o valor 1 nos pontos $r_1, \ldots, r_n$ e é zero nos demais pontos de $[a,b]$ então (f_n) converge simplesmente para uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q} \cap [a,b]$ e $f(x) = 0$ se x é irracional. Evidentemente, cada f_n é integrável mas f não é.

Exemplo 8. Mesmo quando a seqüência de funções integráveis $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ converge simplesmente para a função integrável $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$,

pode ocorrer que $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx \ne \int_a^b f(x)dx$. Por exemplo, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = nx^n(1-x^n)$. Então $f_n(1) = 0$ e $0 \le f_n(x) < nx^n$ se $0 \le x < 1$. Ora, $\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$ se $0 \le x < 1$. (Pelo Exemplo 8, Capítulo 3, pois $\lim_{n\to\infty} (n+1)x^{n+1}/nx^n = x < 1$.) Portanto (f_n) converge simplesmente em $[0,1]$ para a função identicamente nula. Entretanto $\int_0^1 f_n(x)dx = n^2/(n+1)(2n+1)$, portanto $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1/2$, enquanto $\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) = 0$.

Para que se tenha a derivada do limite igual ao limite das derivadas, em vez de supor que $f_n \to f$ uniformemente, deve-se postular que a seqüência das derivadas convirja uniformemente.

Teorema 4. **(Derivação termo a termo.)** *Seja (f_n) uma seqüência de funções de classe C^1 no intervalo $[a,b]$. Se, para um certo $c \in [a,b]$, a seqüência numérica $(f_n(c))$ converge e se as derivadas f_n' convergem uniformemente em $[a,b]$ para uma função g então (f_n) converge em $[a,b]$ uniformemente para uma função f, de classe C^1, tal que $f' = g$. Em resumo: $(\lim f_n)' = \lim f_n'$ desde que as derivadas f_n' convirjam uniformemente.*

Demonstração: Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, para cada $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in [a,b]$ temos $f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n'(t)dt$. Fazendo $n \to \infty$ vemos, pelo Teorema 3, que existe $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ e vale $f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)dt$. Além disso, pelo Teorema 1, g é contínua logo (novamente em virtude do Teorema Fundamental do Cálculo) f é derivável e $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Em particular, f' é contínua, isto é, f é de classe C^1. Resta apenas provar que a convergência $f_n \to f$ é uniforme. Ora,

$$|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(c) - f(c)| + \int_c^x |f_n'(t) - g(t)|dt.$$

Como $f_n' \to g$ uniformemente, resulta daí que $f_n \to f$ uniformemente. □

Exemplo 9. A seqüência de funções $f_n(x) = \operatorname{sen}(nx)/n$ converge uniformemente para zero em toda a reta. Mas a seqüência de suas derivadas $f_n'(x) = cos(nx)$ não converge, sequer simplesmente, em intervalo algum. (Todo intervalo contém um número da forma $x = m\pi/p$, com m, p inteiros. Então $\cos(nx)$ assume infinitas vezes os valores 1 e -1.)

Os teoremas acima, no caso de uma série $\sum f_n$, assumem as seguintes

formas:

1. Se $\sum f_n$ converge uniformemente para f e cada f_n é contínua no ponto a então f é contínua no ponto a.
2. Se cada termo $f_n: X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, com $f_n(x) \geq 0$ para todo $x \in X$ e a série $\sum f_n$ converge para uma função contínua $f: X \to \mathbb{R}$ no compacto X então a convergência é uniforme.
3. Se cada $f_n: [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável e $\sum f_n$ converge uniformemente para $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ então f é integrável e $\int_a^b \sum f_n(x)dx = \sum \int_a^b f_n(x)dx$.
4. Se cada $f_n: [a,b] \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, se $\sum f_n'$ converge uniformemente em $[a,b]$ e se, para algum $c \in [a,b]$, a série $\sum f_n(c)$ converge então $\sum f_n$ converge uniformemente para uma função de classe C^1 e $(\sum f_n)' = \sum f_n'$.

Exemplo 10. A série $\sum_{n=0}^{\infty} x^2/(1+x^2)^n$, cujos termos são funções contínuas, definidas em toda a reta, converge para a soma $1+x^2$, para todo $x \neq 0$. No ponto $x = 0$, todos os termos da série se anulam, logo sua soma é zero. Segue-se que a série dada converge simplesmente em toda a reta mas a convergência não é uniforme, pois a soma é uma função descontínua.

O teorema básico sobre convergência uniforme de séries de funções, demonstrado a seguir, não tem análogo para seqüências.

Teorema 5. **(Teste de Weierstrass.)** *Dada a seqüência de funções $f_n: X \to \mathbb{R}$, seja $\sum a_n$ uma série convergente de números reais $a_n \geq 0$ tais que $|f_n(x)| \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$. Nestas condições, as séries $\sum |f_n|$ e $\sum f_n$ são uniformemente convergentes.*

Demonstração: Pelo critério de comparação, para todo $x \in X$ a série $\sum |f_n(x)|$ (e portanto a série $\sum f_n(x)$) é convergente. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n>n_0} a_n < \varepsilon$. Pondo

$$R_n(x) = \sum_{k>n} |f_n(x)| \quad \text{e} \quad r_n(x) = \sum_{k>n} f_n(x),$$

tem-se imediatamente $|r_n(x)| \leq R_n(x) \leq \sum_{k>n} a_k < \varepsilon$ para todo $n > n_0$. Logo $\sum |f_n|$ e $\sum f_n$ são uniformemente convergentes. □

3. Séries de potências

As funções mais importantes da Análise podem ser expressas como somas

de séries da forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots.$$

Estas séries, que constituem uma generalização natural dos polinômios, são chamadas de *séries de potências*.

Para simplificar a notação, trataremos de preferência o caso em que $x_0 = 0$, isto é, as séries de potências do tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots.$$

O caso geral reduz-se a este pela mudança de variável $y = x - x_0$. Os resultados que obtivermos para as séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ podem ser facilmente adaptados para o caso $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

O primeiro fato a destacar sobre uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ é que o conjunto dos valores de x para os quais ela converge é um intervalo de centro x_0. Esse intervalo pode ser limitado (aberto, fechado ou semi-aberto), igual a $\mathbb{R}$ ou até mesmo reduzir-se a um único ponto. Isto será demonstrado logo a seguir. Antes vejamos um exemplo que ilustra todas essas possibilidades.

Exemplo 11. Pelo teste de d'Alembert, a série $\sum x^n/n!$ converge para todo valor de x. A série $\sum[(-1)^n/(2n+1)]x^{2n+1}$ converge se, e somente se, $x \in [-1,1]$. A série $\sum[(-1)^{n+1}/n]x^n$ converge se $x \in (-1,1]$ e diverge fora desse intervalo. O conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série geométrica $\sum x^n$ converge é o intervalo aberto $(-1,1)$. Finalmente, a série $\sum n^n x^n$ converge apenas no ponto $x = 0$.

Dada uma série de potências $\sum a_n x^n$, a localização dos pontos x para os quais ela converge se faz por meio do teste de Cauchy (Teorema 6, Capítulo 4), o qual põe em evidência o comportamento da seqüência $(\sqrt[n]{|a_n|})$.

Se a seqüência $(\sqrt[n]{|a_n|})$ é ilimitada então a série $\sum a_n x^n$ converge apenas quando $x = 0$. Com efeito, para todo $x \neq 0$ a seqüência de números $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x|\sqrt[n]{|a_n|}$ é ilimitada e o mesmo ocorre com $|a_n x^n|$, logo o termo geral da série $\sum a_n x^n$ não tende a zero.

Se, entretanto, a seqüência $(\sqrt[n]{|a_n|})$ é limitada então o conjunto

$$R = \{\rho > 0;\ \sqrt[n]{|a_n|} < 1/\rho \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ suficientemente grande }\}$$

é não-vazio. Na realidade, é fácil ver que se $\rho \in R$ e $0 < x < \rho$ então $x \in R$. Logo R é um intervalo, do tipo $(0, r), (0, r]$ ou $(0, +\infty)$, onde $r = \sup R$. O número r é chamado o *raio de convergência* da série $\sum a_n x^n$. (Convencionaremos escrever $r = +\infty$ quando R for ilimitado.)

O raio de convergência r da série de potências $\sum a_n x^n$ goza das seguintes propriedades:

1) Para todo $x \in (-r, r)$ a série $\sum a_n x^n$ *converge absolutamente*. Com efeito, tomando ρ tal que $|x| < \rho < r$ temos $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/\rho$, e conseqüentemente $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} < |x|/\rho < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Logo $\sum a_n x^n$ converge absolutamente, pelo teste de Cauchy.

2) Se $|x| > r$ então a série $\sum a_n x^n$ *diverge*. Com efeito, neste caso $|x| \notin R$, logo não se tem $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/|x|$ para todo n suficientemente grande. Isto significa que $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1/|x|$, e conseqüentemente $|a_n x^n| \geq 1$, para uma infinidade de valores de n. Logo o termo geral da série $\sum a_n x^n$ não tende a zero, e ela diverge.

3) Se $x = \pm r$, nada se pode dizer em geral: a série $\sum a_n x^n$ pode convergir ou divergir, conforme o caso.

4) Se existir $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ então $r = 1/L$. (Entendendo-se que $r = +\infty$ se $L = 0$.) Com efeito, para todo $\rho \in R$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < 1/\rho$. Fazendo $n \to \infty$ obtemos $L \leq 1/\rho$, donde $\rho \leq 1/L$. Segue-se que $r = \sup R \leq 1/L$. Supondo, por absurdo, que fosse $r < 1/L$, tomaríamos c tal que $r < c < 1/L$, donde $L < 1/c$. Pela definição de limite, teríamos $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/c$ para todo n suficientemente grande, donde $c \in R$ e daí $c \leq r$, uma contradição. Logo $r = 1/L$.

Podemos resumir a análise feita acima no

Teorema 6. *Uma série de potências $\sum a_n x^n$, ou converge apenas para $x = 0$ ou existe r, com $0 < r \leq +\infty$, tal que a série converge absolutamente no intervalo aberto $(-r, r)$ e diverge fora do intervalo fechado $[-r, r]$. Nos extremos $-r$ e r, a série pode convergir ou divergir. Se existir $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ então $r = 1/L$. O número r chama-se o raio de convergência da série. Além disso, tem-se $0 < \rho < r \iff \sqrt[n]{|a_n|} < 1/\rho$ para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.*

Observação. Segue-se do Teorema 7, Capítulo 4, que se os coeficientes a_n forem diferentes de zero e existir $\lim |a_{n+1}|/|a_n| = L$, então o raio de convergência da série $\sum a_n x^n$ é $r = 1/L$.

Teorema 7. *Uma série de potências $\sum a_n x^n$ converge uniformemente em todo intervalo compacto $[-\rho, \rho]$, onde $0 < \rho <$ raio de convergência.*

Demonstração: A série $\sum a_n \rho^n$ é absolutamente convergente e, para todo $x \in [-\rho, \rho]$, tem-se $|a_n x^n| \leq |a_n| \rho^n$. Pelo teste de Weierstrass (Teorema 5), segue-se que a série $\sum a_n x^n$ converge uniformemente no intervalo $[-\rho, \rho]$. □

Corolário. *Se $r > 0$ é o raio de convergência da série $\sum a_n x^n$, a função $f\colon (-r, r) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum a_n x^n$, é contínua.*

Exemplo 12. A série $\sum a_n x^n$ pode não convergir uniformemente em todo o intervalo $(-r, r)$, onde r é o raio de convergência. Isto é claro no caso da série $\sum x^n/n!$, cujo raio de convergência é infinito, para a qual $r_n(x) = \sum_{k>n} x^k/k! > x^{n+1}/(n+1)!$ quando x é positivo. Dado $\varepsilon > 0$, não importa qual n se tome, é impossível ter $r_n(x) < \varepsilon$ para todo x positivo.

Teorema 8. **(Integração termo a termo.)** *Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$. Se $[\alpha, \beta] \subset (-r, r)$ então*

$$\int_\alpha^\beta (\sum a_n x^n) dx = \sum \frac{a_n}{n+1} \left(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}\right).$$

Demonstração: A convergência de $\sum a_n x^n$ é uniforme no intervalo $[\alpha, \beta]$ pois se escrevermos $\rho = \max\{|\alpha|, |\beta|\} < r$ teremos $[\alpha, \beta] \subset [-\rho, \rho]$. Logo é permitido integrar termo a termo, pelo Teorema 3. □

Teorema 9. **(Derivação termo a termo.)** *Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$. A função $f\colon (-r, r) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$, é derivável, com $f'(x) = \sum_{n=1}^\infty n \cdot a_n x^{n-1}$ e a série de potências de $f'(x)$ ainda tem raio de convergência r.*

Demonstração: Seja r' o raio de convergência da série $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$, a qual converge se, e somente se, $x \cdot \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 1} n a_n x^n$