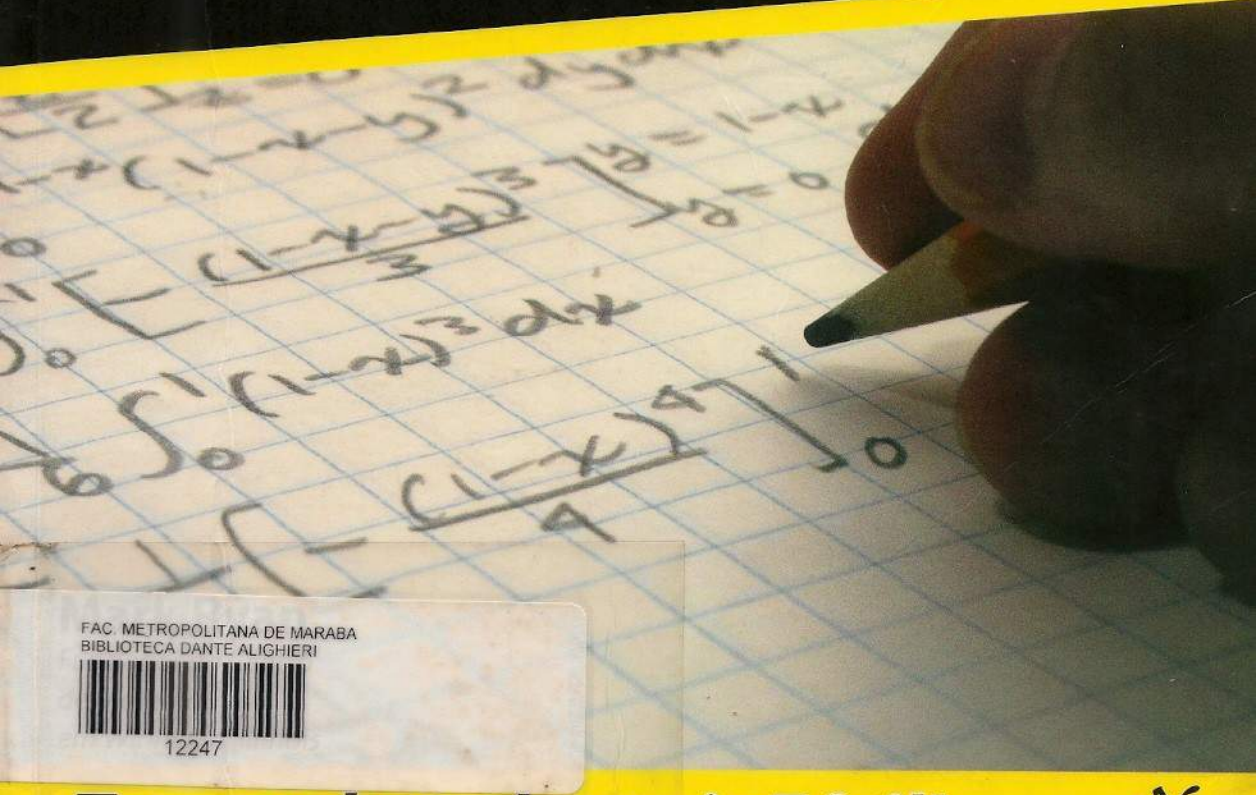
Intrigado com limites? Perplexo com as derivadas?
Esse simpático guia oferece a ajuda que você precisa.

2º Edição

Cálculos

PARA LEIGOS®

FOR DUMMIES®



FAC. METROPOLITANA DE MARABA
BIBLIOTECA DANTE ALIGHIERI
12247

Tornando tudo mais Fácil!

ALTA BOOKS®

CálculosPara Leigos®

Folha de Cola

Tabela geométrica muito boa

Todos os triângulos

$A = \frac{1}{2}$ base · altura

Triângulo eqüilátero

$A = \frac{\text{lado}^2\sqrt{3}}{4}$

Triângulo retângulo

Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$
(c é a hipotenusa)

Paralelogramo

Área = base · altura

Trapézio

Área = $\frac{\text{base}_1 + \text{base}_2}{2}$. altura

Círculo

Área = πr^2
Circuferência = $2\pi r = \pi d$

Setor do círculo
(pense no pedaço de pizza)

Área = $\pi r^2\left(\frac{\theta}{360°}\right)$

(θ é o ângulo central)

Comprimento do arco= $2\pi r\left(\frac{\theta}{360°}\right)$

(Comprimento do arco é o comprimento da casca)

Esfera

Volume = $\frac{4}{3}\pi r^3$

Área da superfície = $4\pi r^3$

Cone da pirâmide
(base plana, topo pontudo)

Volume = $\frac{1}{3}$ A · h

(A é a área da base)

Cilindro circular reto, Prisma reto ou caixa

Volume = A · h
(A é a área da base)

Área da superfície lateral = P · altura

(P é o perímetro [ou circunferência] da base)

Geometria de Coordenadas
Dados dois pontos
(x_1,y_1) e (x_2,y_2)

Inclinação = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Distância= $\sqrt{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)^2}$

Ponto médio = $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Tabela trigonométrica rápida

Trigonometria do triângulo retângulo
SohCahToa:

$\text{sen}\theta = \frac{O}{H}$ $\quad$ $\text{cosec}\theta = \frac{H}{O}$

$\cos\theta = \frac{A}{H}$ $\quad$ $\sec\theta = \frac{H}{A}$

$\text{tg}\theta = \frac{O}{A}$ $\quad$ $\text{cotg}\theta = \frac{A}{O}$

Graus e Radianos:

2πradianos = 360° $\quad$ $\frac{\pi}{3}$ radianos = 60°

πradianos = 180° $\quad$ $\frac{\pi}{4}$ radianos = 45°

$\frac{\pi}{2}$radianos = 90° $\quad$ $\frac{\pi}{6}$ radianos = 30°

Para converter de radianos para graus, multiplique por $\frac{180°}{\pi}$.

Para converter de graus para radianos, multiplique por $\frac{\pi}{180°}$.

Identidades
Identidades recíprocas:

$\text{cosec}\theta = \frac{1}{\text{sen}\theta}$

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$\text{cotg}\theta = \frac{1}{\text{tg}\theta}$

Identidades quociente:

$\text{tg}\theta = \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$

$\text{cotg}\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}$

Identidade Pitagoreana:

$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\text{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$1 + \text{cotg}^2\theta = \text{cosec}^2\theta$

Fórmulas
Fórmulas do ângulo-metade:

$\text{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$

$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$

Fórmulas dos ângulos duplos:

$\text{sen}2\theta = 2\text{sen}\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

Fórmulas de redução:

$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\text{tg}(-\theta) = -\text{tg}\theta$

Cálculos Para Leigos®

Folha de Cola

Tabela elegante da derivada

Regra do produto: $\frac{d}{dx}(uv) = u'v + v'u$ Regra do quociente: $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

1. $\frac{d}{dx} c = 0$
2. $\frac{d}{dx} x = 1$
3. $\frac{d}{dx} cx = c$
4. $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$
5. $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
6. $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
7. $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$
8. $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$
9. $\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x$
10. $\frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x$
11. $\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \sec^2 x$
12. $\frac{d}{dx} \operatorname{cotg} x = -\operatorname{cosec}^2 x$
13. $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \operatorname{tg} x$
14. $\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$
15. $\frac{d}{dx} \arcsen x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
16. $\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
17. $\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1 + x^2}$
18. $\frac{d}{dx} \operatorname{arccotg} x = \frac{-1}{1 + x^2}$
19. $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}$
20. $\frac{d}{dx} \operatorname{arccosec} x = \frac{-1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}$

Tabela elegante e útil da integral

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$
3. $\int e^x dx = e^x + C$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$
5. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$
6. $\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C$
7. $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$
9. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C$
10. $\int \operatorname{cotg} x dx = -\ln |\operatorname{sen} x| + C$
11. $\int \sec x dx = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C$
12. $\int \operatorname{cosec} x dx = -\ln |\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg} x| + C$
13. $\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C$
14. $\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\operatorname{cotg} x + C$
15. $\int \sec x \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + C$
16. $\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + C$
18. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{|x|}{a} + C$
20. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$

BIBLIOTECA DANTE ALIGHIERI

Cálculos PARA LEIGOS®

Mark Ryan

BIBLIOTECA DANTE ALIGHIERI
N.º de Registro: 3490
Tombo n.º: 32497
CDD: 515
Cutter: R989c
Forma de Aquisição: doação
Data Aquisição: 10/11/07

BIBLIOTECA DANTE ALIGHIERI

Cálculos PARA LEIGOS®

Mark Ryan

ALTA BOOKS®
Rio de Janeiro . 2009

BIBLIOTECA DANTE ALIGHIERI

Cálculos para Leigos – 2º edição

Calculus For Dummies Original English language edition Copyright © 2003 by Wiley Publishing, Inc. by Mark Ryan. All rights reserved including the right of reproduction in whole or in part in any form. This translation published by arrangement with Wiley Publishing, Inc
Cálculos para Leigos Edição original em português Copyright © 2009 da Starlin Alta Con. Com. Ltda. Todos os direitos reservados incluindo o direito de reprodução total ou parcial, seja qual for a forma. A tradução publicada foi autorizada pela Wiley Publishing, Inc.

Todos os direitos reservados e protegidos pela Lei 5988 de 14/12/73. Nenhuma parte deste livro, sem autorização prévia por escrito da editora, poderá ser reproduzida ou transmitida sejam quais forem os meios empregados: eletrônico, mecânico, fotográfico, gravação ou quaisquer outros. Todo o esforço foi feito para fornecer a mais completa e adequada informação, contudo a editora e o(s) autor(es) não assumem responsabilidade pelos resultados e usos da informação fornecida. Recomendamos aos leitores testar a informação, bem como tomar todos os cuidados necessários (como o backup), antes da efetiva utilização. Este livro não contém CD-ROM, disquete ou qualquer outra mídia.

Erratas e atualizações: Sempre nos esforçamos para entregar a você, leitor, um livro livre de erros técnicos ou de conteúdo; porém, nem sempre isso é conseguido, seja por motivo de alteração de software, interpretação ou mesmo quando alguns deslizes constam na versão original de alguns livros que traduzimos. Sendo assim, criamos em nosso site, www.altabooks.com.br, a seção Erratas, onde relataremos, com a devida correção, qualquer erro encontrado em nossos livros.

Avisos e Renúncia de Direitos: Este livro é vendido como está, sem garantia de qualquer tipo, seja expressa ou implícita.

Marcas Registradas: Todos os termos mencionados e reconhecidos como Marca Registrada e/ou comercial são de responsabilidade de seus proprietários. A Editora informa não estar associada a nenhum produto e/ou fornecedor apresentado no livro. No decorrer da obra, imagens, nomes de produtos e fabricantes podem ter sido utilizados, e desde já a Editora informa que o uso é apenas ilustrativo e/ou educativo, não visando ao lucro, favorecimento ou desmerecimento do produto/fabricante.

Produção Editorial: Editora Alta Books
Coordenação Editorial: Marcelo Utrine
Coordenador Administrativo e Contratação: Anderson Câmara
Tradução: Marcia Danielle
Revisão: Carla Ayres
Diagramação: Nathanael dos Santos Souza
Revisão Técnica: Bruno Ceirão
Fechamento: Equipe Alta Books

Impresso no Brasil

O código de propriedade intelectual de 1º de Julho de 1992 proíbe expressamente o uso coletivo sem autorização dos detentores do direito autoral da obra, bem como a cópia ilegal do original. Esta prática generalizada nos estabelecimentos de ensino, provoca uma brutal baixa nas vendas dos livros a ponto de impossibilitar os autores de criarem novas obras.

ALTA BOOKS®

Rua Viúva Claudio, 291 - Bairro Industrial do Jacaré
Rio de Janeiro - RJ CEP 20970-031
Tel: 21 3278-8069 Fax: 21 3277-1253
www.altabooks.com.br
altabooks@altabooks.com.br

Sobre o Autor

Pós-graduado pela Universidade de Brown e pela Universidade de Direito de Wisconsin e membro do Conselho Nacional de Professores de Matemática, **Mark Ryan**, vem ensinando matemática desde 1989. Ele dirige o Centro de Matemática em Winnetka, Illinois (www.themathcenter.com), onde ensina nos cursos de matemática do ensino médio incluindo uma introdução ao cálculo e um workshop para os pais baseado em um programa que ele mesmo desenvolveu: Os 10 hábitos dos estudantes de matemática mais bem sucedidos. No ensino médio, ele conseguiu obter, duas vezes, uma pontuação de 800 na prova de matemática do SAT. E ele não sabe apenas matemática, ele também tem uma facilidade de explicar tudo com um inglês claro. Ele exerceu a profissão de advogado por 4 anos antes de decidir que deveria fazer algo que gostasse e usar seu talento natural para a matemática – é claro, 4 anos é muito tempo, mas antes tarde do que nunca.

Cálculos Para Leigos é o segundo livro de Ryan. Seu primeiro livro, Everyday Math for Everyday Life (*"Matemática para todos os dias da sua vida"*), foi publicado em 2002.

Um jogador de torneios de gamão e um esquiador e jogador de tênis entusiasmado, Ryan mora em Chicago.

Dedicatória

Para os meus alunos de hoje e para os meus ex-alunos. Que aos ensiná-los, também fui ensinado por eles.

Agradecimentos do Autor

Eu estou muito agradecido – mais uma vez – ao meu agente, Sheree Bykofsky, e sua equipe por ter me arrumado esse livro. Foi uma sorte para mim quando eu me filiei a Sheree Bykofsky Associates, Inc.

Um agradecimento especial ao meu cunhado, Steve Mardiks, e meus amigos Abby Lombardi, Ted Lowitz e Barry Sullivan pelos seus conselhos, edição, e apoio valiosos. Josh Dillon fez um ótimo trabalho verificando o conteúdo sobre cálculo do livro bem como a objetividade do que foi exposto.

Todos na Wiley Publishing foram ótimos de se trabalhar. O editor de aquisições Kathy Cox tem um desejo revigorante sem fim de atender os desejos do leitor. O editor de projeto Tim Gallan tem a mistura certa de paciência e uma atitude de seguir dentro do prazo. Ele é um editor talentoso que entende a floresta, as árvores, quando editar, e quando não editar. O copidesque Laura Peterson fez inúmeros aperfeiçoamentos significativos no livro. E a equipe responsável pelo layout e ilustração fez um ótimo trabalho com as figuras difíceis e complexas do livro. Esse livro é um testamento dos altos padrões de todos da Wiley Publishing.

Sumário Resumido

Introdução 1

Parte I: Uma visão geral do cálculo 7

Capítulo 1: O que é Cálculo? 9

Capítulo 2: As duas grandes idéias do Cálculo: Diferenciação e integração 15

Capítulo 3: Por que o cálculo funciona 23

Parte II: Se aquecendo com os pré-requisitos do cálculo 29

Capítulo 4: Pré-álgebra e revisão de álgebra 31

Capítulo 5: Funções legais e seus ótimos gráficos 45

Capítulo 6: A dança da trigonometria 63

Parte III: Limites 75

Capítulo 7: Limites e continuidade 77

Capítulo 8: Avaliando limites 93

Parte IV: Diferenciação 109

Capítulo 9: Orientação da diferenciação 111

Capítulo 10: Regras da diferenciação – Sim, cara, elas mandam 131

Capítulo 11: Diferenciação e o formato das curvas 151

Capítulo 12: Seus problemas estão resolvidos: A diferenciação ao resgate! 175

Parte V: Integração e séries infinitas 207

Capítulo 13: Introdução à integração e área aproximada 209

Capítulo 14: Integração: Sua diferenciação ao contrário 233

Capítulo 15: Técnicas de integração para especialistas 259

Capítulo 16: Esqueça o Dr. Phill: Use a integral para resolver problemas 283

Capítulo 17: Série infinita 313

Parte VI: A parte dos "dez" 337

Capítulo 18: Dez coisas para se lembrar 339

Capítulo 19: Dez coisas para esquecer 343

Capítulo 20: Dez coisas com as quais você não pode escapar 345

Índice Remissivo 349

Sumário

Introdução 1

Sobre este livro 1
Convenções usadas neste livro 2
Como usar este livro 2
Suposições tolas 3
Como este livro é organizado 3
Parte I: Uma visão geral do cálculo 3
Parte II: Se aquecendo com os pré-requisitos do cálculo 4
Parte III: Limites 4
Parte IV: Diferenciação 4
Parte V: Integral e séries infinitas 4
Parte VI: A parte dos "dez" 5
Ícones usados neste livro 5
Para onde ir daqui 6

Parte I: Uma visão geral do cálculo 7

Capítulo 1: O que é Cálculo? 9

O que o cálculo não é 9
Então, o que é o Cálculo? 10
Exemplos de cálculo no mundo real 12

Capítulo 2: As duas grandes idéias do Cálculo: Diferenciação e integral 15

Definindo a diferenciação 15
A derivada é uma inclinação 15
A derivada é uma razão 17
Investigando a integração 17
Classificando as séries infinitas 19
Séries divergentes 19
Séries convergentes 20

Capítulo 3: Por que o cálculo funciona 23

O conceito do limite: um microscópio matemático 23
O que acontece quando você amplia 24
Dois avisos – ou precisão 27
Eu posso perder minha licença para praticar matemática 27
Mas o que "infinito" realmente significa? 28

Parte II: Se aquecendo com os pré-requisitos do cálculo 29

Capítulo 4: Pré-álgebra e revisão de álgebra 31

Ajustando as suas frações 31
Algumas regras rápidas 31
Multiplicando frações 32
Dividindo frações 32
Somando frações 33
Subtraindo frações 34
Simplificando frações 34
Valor absoluto – absolutamente fácil 36
Fortalecendo os seus poderes 36
Fixando as raízes 37
Regra das raízes – ou melhor, regra da raiz 37
Simplificando raízes 38
Logaritmos – isso não é um evento na competição de lenhadores[3] 39
Fatorando – Quando é que eu vou precisar disso? 40
Achando o MDC 40
Procurando um padrão 40
Tentando algumas fatorações trinomiais 41
Resolvendo equações quadráticas 42
Método 1: Fatorando 42
Método 2: A fórmula quadrática 42
Método 3: Completando o quadrado 44

Capítulo 5: Funções legais e seus ótimos gráficos 45

O que é uma função? 45
As características explicativas de uma função 45
Variáveis independentes e dependentes 47
Notação das funções 48
Função composta 48
Com o que uma função se parece? 49
Funções comuns e seus gráficos 51
Retas no plano em português claro 51
Função de 2° grau e modular – mesmo trabalho 55
Algumas funções esquisitas 55
Funções exponenciais 56
Funções logarítmicas 56
Funções inversas 57
Deslocamentos, reflexos, esticamentos e reduções 58
Transformações horizontais 59
Transformações verticais 61

Capítulo 6: A dança da trigonometria 63

Estudando trigonometria no acampamento SohCahToa 63
Dois triângulos retângulos especiais 64
O triângulo 45°-45°-90° 64

O triângulo 30°-60°-90° 65
Circulando o inimigo com o círculo unitário 66
Ângulos no círculo trigonométrico 67
Medindo ângulos com radianos 67
Querida, eu encolhi a hipotenusa 69
Colocando tudo junto 69
Desenhando o gráfico do seno, cosseno e da tangente 71
Funções trigonométricas inversas 72
Identificando com identidades trigonométricas 73

Parte III: Limites 75

Capítulo 7: Limites e continuidade 77

Leve ao limite – NÃO 77
Usando três funções para ilustrar o mesmo limite 78
Andando de lado com limites laterais 81
A definição formal de limite – o que você estava esperando 82
Limites infinitos e assíntotas verticais 82
Limites no infinito – bem distantes, cara! 83
Calculando a velocidade instantânea usando limites 84
Unindo limites e continuidade 86
Continuidade e limites normalmente andam juntos 87
A exceção do intervalo aberto conta toda a história 88
Descobrindo a bobagem matemática da continuidade 89
O mnemônico 33333 do limite 90

Capítulo 8: Avaliando limites 93

Limites fáceis 93
Limites para memorizar 93
Pegue e Leve 94
Os "verdadeiros" problemas sobre limites 95
Descobrindo o limite com a sua calculadora 95
Resolvendo problemas sobre limite com a álgebra 97
Faça uma pausa e prepare um sanduíche de limite 100
Avaliando limites no infinito 104
Limites no infinito e assíntotas horizontais 105
Resolvendo problemas no infinito com uma calculadora 106
Usando a álgebra para limites no infinito 107

Parte IV: Diferenciação 109

Capítulo 9: Orientação da diferenciação 111

Fazendo a diferenciação: É somente encontrar a inclinação 112
A inclinação de uma reta 114
A derivada de uma reta 116
A derivada: É apenas uma razão 117
Cálculo no parque infantil 117

Velocidade – a razão mais familiar ... 118
A correlação razão – inclinação ... 119
A derivada de uma curva ... 120
O quociente da diferença ... 122
Razão média e instantânea ... 128
Ser ou não ser? Três casos onde a derivada não existe ... 129

Capítulo 10: Regras da diferenciação – Sim, cara, elas mandam ... 131

Regras básicas de diferenciação ... 132
A regra da constante ... 132
A regra da potência ... 132
A regra do múltiplo constante ... 133
A regra da soma – Eh! Essa é uma regra e tanto que você tem aí ... 134
A regra da diferença – não faz diferença ... 135
Achando a derivada de funções trigonométricas ... 135
Achando a derivada das funções exponenciais e logarítmicas ... 136
Regras da diferenciação para especialistas – Ah, sim, eu sou um nerd do cálculo ... 137
A regra do produto ... 137
A regra do quociente ... 138
A regra da cadeia ... 139
Diferenciação implícita ... 144
Entrando no ritmo com a diferenciação logarítmica ... 146
Fazendo a diferenciação de funções inversas ... 147
Escalando as alturas das derivadas de ordem superior ... 148

Capítulo 11: Diferenciação e o formato das curvas 151

Fazendo uma longa viagem de carro através do cálculo ... 151
Escale cada montanha, cruze cada riacho: inclinações positivas e negativas ... 152
Eu não consigo pensar em uma metáfora sobre viagem para essa seção: concavidade e pontos de inflexão ... 152
Esse vale das lágrimas: o valor mínimo local ... 153
Uma vista panorâmica: o máximo absoluto ... 153
Problema no carro: preso no vértice ... 154
É uma descida a partir daqui ... 154
Seu diário da viagem ... 154
Encontrando os valores extremos locais – Minha mãe, ela é assim, totalmente extrema ... 155
Escrevendo os números críticos ... 155
O teste da derivada primeira ... 157
O teste da derivada segunda – não, não, tudo menos outro teste! ... 159
Encontrando os valores máximos e mínimos absolutos em um intervalo fechado ... 162
Encontrando os valores máximos e mínimos absolutos sobre todo o domínio de uma função ... 165

Localizando a concavidade e os pontos de inflexão 166
Olhando os gráficos das derivadas até que eles me tirem do sério .. 168
O teorema do valor médio – GRRRRR 172

Capítulo 12: Seus problemas estão resolvidos: A diferenciação ao resgate! 175

Aproveitando o melhor (ou pior) da vida: problemas de otimização 175
O volume máximo de uma caixa 176
A área máxima de um curral – yeehaw! 177
Ioiô: Posição, velocidade, e aceleração 179
Velocidade versus rapidez (ou celeridade) 182
A altura máxima e mínima 182
Velocidade e deslocamento 183
Rapidez e distância viajada 184
Cantando pneu e marcas de derrapagem: aceleração e desaceleração 185
Amarrando tudo junto 186
Taxas relacionadas – elas avaliam, relativamente 187
Enchendo uma calha 189
Aperte o cinto de segurança: você está se aproximando do cruzamento do cálculo 191
Tangentes e normais: conectadas intimamente 194
O problema da tangente 194
O problema da normal 196
Atirando em linha reta com aproximações lineares 198
Problemas de administração e economia 201
Controlando marginais em economia 201

Parte V: Integração e séries infinitas..... 207

Capítulo 13: Introdução à integração e área aproximada 209

Integração: apenas adição sofisticada 209
Encontrando a área sob uma curva 211
Lidando com a área negativa 214
Área aproximada 214
Área aproximada pela soma dos extremos esquerdos 214
Área aproximada pela soma dos extremos direitos 218
Área aproximada pela soma dos pontos médios 220
Ficando sofisticado com a notação somatória 221
Resumindo os conceitos básicos 221
Escrevendo as somas de Riemann com a notação sigma 222
Encontrando a área exata com a integral definida 225
Área aproximada com a regra do trapézio e a regra de Simpson 228
A regra do trapézio 229
A regra de Simpson – isto é, Thomas (1710–1761), e não Homer (1987–) 230

Capítulo 14: Integração: sua diferenciação ao contrário 233

Antidiferenciação – isto é, a diferenciação ao contrário 233
Vocabulário, Voshmabulário: Que diferença isso faz? 235
A irritante função da área 235
O poder e a glória do Teorema Fundamental do Cálculo 238
O Teorema Fundamental do Cálculo: parte dois 242
Por que o teorema funciona: 1ª explicação das funções da área 244
Por que o teorema funciona: 2ª explicação das funções da área 246
Por que o teorema funciona: a relação integração / diferenciação 246
Encontrando as antiderivadas: três técnicas básicas 249
Regras inversas para as antiderivadas 249
Adivinhando e verificando 251
O método da substituição 253
Encontrando a área com problemas de substituição 256

Capítulo 15: Técnicas de integração para especialistas 259

Integração por partes: dividir para conquistas 259
Escolhendo o seu u 261
Integração por partes: segunda vez, igual à primeira 263
Andando em círculos 264
Integrais trigonométricas complicadas 265
Integrais contendo senos e cossenos 266
Integrais contendo secantes e tangentes 269
Integrais contendo co-secantes e cotangentes 271
Seu pior pesadelo: substituição trigonométrica 272
Caso 1: Tangentes 273
Caso 2: Senos 275
Caso 3: Secantes 277
Os As, Bs, e Cxs das frações parciais 277
Caso 1: O denominador contém apenas funções lineares 278
Caso 2: O denominador contém fatores quadráticos irredutíveis 279
Caso 3: O denominador contém fatores lineares ou quadráticos repetidos 280
Bônus: Equacionando coeficientes de termos semelhantes 281

Capítulo 16: Esqueça o Dr. Phill: Use a integral para resolver problemas 283

O Teorema do Valor Médio para as integrais e valor médio 284
A área entre duas curvas – duas vezes a diversão 287
Encontrando os volumes de sólidos estranhos 290
O método do cortador de carne 290
O método da pilha de panquecas 292

O método da pilha de rosquinhas nas quais alguém sentou em cima ... 293
O método das bonecas russas aninhadas uma dentro da outra. 295
Analisando o comprimento do arco ... 297
Superfícies de revolução – passe a garrafa de pessoa para pessoa .. 299
Regra de L'Hôspital: Cálculo para o doente ... 302
Colocando as formas inaceitáveis em forma ... 303
Mais três formas inaceitáveis ... 304
Integrais impróprias: basta olhar para a maneira como a integral está segurando o seu garfo! ... 305
Integrais impróprias com assíntotas verticais ... 306
Integrais impróprias com um ou dois limites infinitos de integração ... 308
Fazendo soar a corneta de Gabriel ... 310

Capítulo 17: Série infinita ... 313

Seqüência e série: O que elas são ... 314
Amarrando as seqüências ... 314
Somando séries ... 316
Convergência ou divergência? Essa é a questão ... 319
Um teste de divergência óbvio: o teste do n-ésimo termo ... 319
Três séries básicas e seus testes de convergência/divergência ... 320
Três testes de comparação para convergência/divergência ... 323
Os dois testes do "R": Razão e raízes ... 328
Série alternada ... 331
Encontrando a convergência absoluta versus a condicional ... 331
O teste da série alternada ... 332
Mantendo todos os testes corretos ... 335

Parte VI: A parte dos "dez" ... 337

Capítulo 18: Dez coisas para lembrar ... 339

Seu óculos de sol ... 339
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ... 339
$\frac{0}{5} = 0$, mas $\frac{5}{0}$ é indefinido ... 339
qualquer coisa$^0 = 1$ ... 340
SohCahToa ... 340
Valores trigonométricos para ângulos de 30, 45, e 60 graus ... 340
$\text{Sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ ... 341
A regra do produto ... 341
A regra do quociente ... 341
Onde você coloca as suas chaves ... 341

Capítulo 19: Dez coisas para esquecer ... 343

$(a + b)^2 = a^2 + b^2$ – Errado! ... 343
$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ – Errado! ... 343

inclinação $= \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ – Errado! 343
$\frac{3a+b}{3a+c} = \frac{b}{c}$ – Errado! 346
$\frac{d}{dx}\pi^3 = 3\pi^2$ – Errado! 346
Se k for uma constante, $\frac{d}{dx}kx = k'x + kx'$ – Errado! 346
A regra do quociente é $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v'u - vu'}{v^2}$ – Errado! 346
$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3$ – Errado! 346
$\int (\text{sen } x)dx = \cos x + C$ – Errado! 347
Teorema de Green 347

Capítulo 20: Dez coisas com as quais você não pode escapar 345

Dê duas respostas em perguntas de prova 345
Escreva de forma ilegível nas provas 345
Não mostre seu cálculo em provas 346
Não faça todos os problemas da prova 346
Culpe seu companheiro de estudo pela sua nota baixa na prova 346
Diga ao seu professor que você precisa de um "A" em cálculo para impressionar sua cara metade 346
Reclame que provas de manhã cedo não são justas porque você não é uma "pessoa matutina" 347
Proteste contra toda essa idéia de notas 347
Puxe o alarme de incêndio durante a prova 347
Use esse livro como desculpa 347

Índice Remissivo 349

Introdução

O simples pensamento de ter que fazer um curso de cálculo já é suficiente para fazer uma legião de estudantes suar frio. Outros que têm a intenção de nunca estudar essa matéria têm a noção de que cálculo é impossivelmente difícil a menos que você seja um descendente direto de Einstein.

Bem, eu estou aqui para dizer a você que você *pode* dominar o cálculo. Não chega a ser tão difícil quanto o seu misticismo leva a crer. A maioria do cálculo é apenas álgebra, geometria e trigonometria avançada. É baseado em e é uma extensão lógica dessas matérias. Se você pode fazer álgebra, geometria e trigonometria, você pode fazer cálculo.

Mas por que você deve se incomodar – exceto pelo fato de ter que fazer um curso? Por que escalar o Monte Everest? Por que ouvir a nona sinfonia de Beethoven? Por que visitar o Louvre para ver a Mona Lisa? Por que ver Os Simpsons? Assim como esses esforços, fazer cálculo pode ser sua própria recompensa. Há muitos que dizem que o cálculo é uma das maiores conquistas de toda a história intelectual. Como tal, vale o esforço. Leia esse livro sem jargões, entenda cálculo, e se junte aos poucos que podem dizer com orgulho: "Cálculo? Ah, é claro, eu sei Cálculo. Não é grande coisa!".

Sobre este livro

Cálculo Para Leigos é destinado a três grupos de leitores: estudantes que estão no seu primeiro curso de cálculo, estudantes que precisam rever cálculo para se preparar para outros estudos, e adultos de todas as idades que gostariam de uma boa introdução ao assunto.

Se você está matriculado em um curso de cálculo e acha que seu livro não é muito claro, este é o livro para você. Ele abrange os tópicos mais importantes do primeiro ano de cálculo: diferenciação, integração e séries infinitas.

Se você teve cálculo intermediário, mas faz alguns anos, e quer revisar os conceitos para se preparar para, digamos, algum programa de pós-graduação, *Cálculo Para Leigos* vai lhe dar um curso de reciclagem completo e sensato.

Os leitores que não são estudantes vão considerar a exposição clara e acessível. *Cálculo Para Leigos* tira o cálculo de dentro da torre de marfim e o traz de volta a terra.

Este é um livro de matemática amigável. Sempre que possível, eu explico os conceitos de cálculo mostrando as conexões entre as idéias do cálculo e as idéias mais fáceis da álgebra e da geometria. Eu então mostro como os conceitos de cálculo funcionam em exemplos concretos e apenas depois é que mostro as fórmulas de cálculo mais sofisticadas. Todas as explicações são em português claro, e não em linguagem matemática.

Convenções usadas neste livro

As convenções a seguir mantêm o texto consistente e muito fácil de compreender.

- As variáveis estão em *itálico*.
- Os termos do cálculo estão escritos em itálico e definidos logo que aparecem no texto.
- Na resolução de problemas passo a passo, a ação geral que você precisa tomar está em **negrito**, seguida pelas partes específicas do problema em particular.

Como usar este livro

Este livro, como todos os livros Para Leigos, é uma referência, e não uma aula de reforço. Essa abordagem pode parecer um pouco estranha para um livro de matemática, mas a idéia básica é que os capítulos possam valer por si só. Se você não quiser ler o livro de capa a capa, não precisa. Agora, se você é um iniciante absoluto, você provavelmente deve iniciar com o Capítulo 1 e seguir o seu caminho através do livro. Mas se você já conhece cálculo, fique a vontade para pular e ler apenas os tópicos que lhe interessam.

Pode ser uma grande ajuda para realmente entender cálculo – ou, por sinal, qualquer tópico de matemática – focar no *porquê* juntamente com o *de que forma*. Com isso em mente, eu me esforcei muito para explicar a lógica básica de muitas das idéias desse livro. Se você quer dar ao seu estudo de cálculo uma base sólida, você deve ler essas explicações. Mas se você está realmente com pressa, você pode chegar ao ponto e ler apenas as coisas introdutórias importantes, os exemplos, as soluções passo a passo, e todas as regras e definições perto dos ícones. Você pode então ler as explicações restantes somente se sentir necessidade.

Eu acho as informações adjacentes interessantes e divertidas (O que você esperava? Eu as escrevi!). Mas você pode pular elas sem perder nenhum cálculo essencial. Não, você não vai ser testado nessas coisas.

Suposições tolas

Pode me chamar de doido, mas eu suponho que...

- Você sabe pelo menos o básico da álgebra, geometria e da trigonometria.

  Se você está enferrujado, a Parte II (e a folha de consulta) tem uma boa revisão desses tópicos pré-cálculo. Realmente, se você não está fazendo nenhum curso de cálculo no momento, e você está lendo este livro apenas para satisfazer a sua curiosidade geral sobre cálculo, você pode ter uma imagem conceitual do assunto sem os detalhes pequenos e importantes da álgebra, da geometria e da trigonometria. Mas você não vai, neste caso, estar apto a acompanhar todas as soluções dos problemas. Em resumo, sem o material do pré-cálculo, você pode ver a *floresta* do cálculo, mas não as *árvores*. Se você está matriculado em um curso de álgebra, você não tem escolha – você tem que saber das árvores.

- Você está disposto a ter algum t_____.

  Sim, é t-r-a-b-a-l-h-o, trabalho. Eu tentei fazer esse material o mais acessível possível, mas é cálculo afinal de contas. Você não pode aprender cálculo apenas ouvindo uma fita no seu carro ou tomando uma pílula – pelo menos ainda não.

Isso é pedir muito?

Como este livro é organizado?

O livro é dividido em partes, as partes são divididas em capítulos e os capítulos são divididos em tópicos e subtópicos (Eu pedi a patente para esse esquema).

Parte I: Uma visão geral do cálculo

Depois de ler a Parte I, você vai ser um dos poucos que pode realmente responder as seguintes perguntas: "O que é cálculo?", "Para que Serve?" e "Como ele funciona?". Eu discuto aqui muitos usos práticos do cálculo e como ele tem mudado o mundo de maneiras incontáveis. Eu explico, em português claro, as duas *grandes* idéias do cálculo: *diferenciação* e *integração*. Finalmente, eu mostro a você a idéia matemática chave que faz o cálculo funcionar: o conceito de *limite*.

Parte II: Se aquecendo com os pré-requisitos do cálculo

A Parte II é uma revisão da álgebra (incluindo funções) e trigonometria (incluindo geometria) que você precisa para cálculo. Se você não precisa dessa revisão, pule, ou apenas use como referência. Se, por outro lado, você está um pouco enferrujado, não seria uma má idéia revisar essa parte – pelo menos passar uma vista pela revisão. Você não pode fazer cálculo sem esses pré-requisitos – especialmente álgebra.

Parte III: Limites

A matemática dos limites é toda baseada em cálculo. Limites nos permitem de certa forma, ampliar um gráfico de uma curva – mais e mais e mais até o infinito – até que fique em linha reta. Uma vez em linha reta, a velha álgebra e geometria básica podem ser usadas. Essa é a mágica do cálculo.

Parte IV: Diferenciação

Diferenciação é a primeira das duas grandes idéias do cálculo; integração (Parte V) é a segunda. A Diferenciação e a integração são a essência do currículo do cálculo. Diferenciação é o processo de encontrar uma derivada, e uma derivada é apenas uma relação como *quilômetros por hora* ou *reais por unidade*. No gráfico de uma curva, a derivada diz a você a inclinação da curva.

Nessa parte, você vai descobrir regras de diferenciação para iniciantes, regras de diferenciação para especialistas, o que a derivada diz a você sobre o formato da curva, e como usar a derivada para resolver problemas.

Parte V: Integração e séries infinitas

Integração, a grande idéia número dois, é uma adição sofisticada – muito sofisticada. Isso é tudo que ela é. Em poucas palavras, é o processo de pegar o formato de uma área que você não pode determinar diretamente, dividir em pequenos pedaços cujas áreas você *pode* determinar, e depois somar todos os pedaços para achar a área do todo. Essa parte lhe dá o furo sobre técnicas de integração para iniciantes, técnicas de integração para especialistas, integração numérica ou aproximada, e como usar a integração para fazer problemas.

E sobre as séries infinitas? Pense nisso por um instante: Se você começa a uma distância de 1 jarda de uma parede e depois anda metade do espaço, e depois mais uma metade, e depois mais uma metade (Eu aposto que você já ouviu isso), quanto tempo você vai levar para chegar à parede? Resposta: Depende. Há números infinitos de passos nesse processo, então, se cada passo leva, digamos, 1 segundo, você nunca vai chegar lá. Se, no entanto, você pode manter uma velocidade constante de, digamos, 1 *jarda por segundo*, sem parar e diminuir ao final de cada passo, você ainda vai dar um número infinito de passos, mas você vai chegar lá em exatamente 1 segundo!

Esse surpreendente resultado de somar um número infinito de passos, mas obter uma soma *finita*, é o que o último capítulo da Parte V abrange: É um tópico cheio de paradoxos bizarros.

Parte VI: A parte dos "dez"

Aqui você vai encontrar três listas dos 10 mais: dez coisas para lembrar, dez coisas para esquecer, e dez coisas com as quais você pode escapar se seu professor de cálculo nasceu ontem (meu favorito).

Ícones usados neste livro

Mantenha seus olhos nesses ícones:

Perto deste ícone estão regras essenciais de cálculo, definições, e fórmulas que você deve definitivamente saber.

Essas são coisas que você precisa saber da álgebra, geometria, ou trigonometria, ou coisas que você deve se lembrar de algum lugar do começo do livro.

O ícone do centro do alvo aparece perto de coisas que vão tornar a sua vida mais fácil. Anote.

Esse ícone destaca erros comuns de cálculo. Preste atenção.

Em contraste ao conceito de cálculo crítico, você geralmente não precisa memorizar as fórmulas sofisticadas perto deste ícone a não ser que seu professor de cálculo insista.

Para onde ir a partir daqui

Para o Capítulo 1, é claro, se você quer começar pelo começo. Se você já tem alguma base em cálculo ou precisa de apenas um curso de reciclagem em uma área ou outra, então fique a vontade para pular algumas coisas. Use o sumário e o índice remissivo para achar o que você está procurando. Se tudo estiver indo bem, em mais ou menos um ano, você vai estar apto a ticar o cálculo na sua lista:

____ Correr uma maratona

____ Saltar sem pára-quedas

____ Escrever um livro

✓ Aprender cálculo

____ Nadar no Canal da Mancha

____ Curar o câncer

____ Escrever uma sinfonia

____ Dar um salto de 360° invertido no X-Games

Para o resto da sua lista, você vai ter que resolver tudo sozinho.

Parte I

Uma visão geral do cálculo

A 5ª onda por Rich Tennant

Nesta parte...

Eu respondo as perguntas sempre feitas: "O que é Cálculo?", "Para que serve?" e "Como ele funciona?". Eu enumero aqui muitos usos práticos do cálculo e como ele tem mudado o mundo em incontáveis maneiras. Eu explico as duas grandes idéias do cálculo: diferenciação e integração. Por fim, eu mostro a você a idéia-chave matemática que faz com que o cálculo funcione: o conceito de limite.

Capítulo 1

O que é Cálculo?

Neste capítulo

- Você está apenas na página 1 e você já tem uma prova de cálculo
- Cálculo – é apenas matemática básica modificada
- Dar um close é a chave
- O mundo antes e depois do cálculo

"Meu melhor dia na turma de Cálculo 101 na Universidade da Califórnia do Sul foi o dia que eu tive que faltar aula para fazer um canal".

- Mary Johnson

"Eu continuo a ter o mesmo sonho onde meu professor de cálculo me persegue com um machado".

- Tom Franklin, aluno do 2° ano da Faculdade do Colorado

"Cálculo é divertido, e é muito fácil. Eu não entendo porque tanto auê".

- Sam Einstein, bisneto de Einstein

Neste capítulo, eu respondo a pergunta "O que é cálculo?" em português claro e mostro exemplos do mundo real de como o cálculo é usado. Depois de ler isso e dois pequenos capítulos a seguir, você *vai* entender o que é cálculo. Mas, vamos inverter, por que você não começamos pelo contrário, verificando o quê o cálculo não é ?

O que o cálculo não é

Não faz sentido adiar o inevitável. Você está pronto para o seu primeiro teste de cálculo? Responda verdadeiro ou falso.

V F A não ser que você seja um nerd, você não tem que se meter com cálculo.

V F Estudar cálculo é prejudicial à saúde.

V F Cálculo é totalmente irrelevante.

Falso, falso, falso! Há essa lenda sobre o cálculo de que ele é extremamente difícil, uma matéria tão misteriosa que ninguém em sã consciência estudaria a não ser que fosse um curso obrigatório.

Não se deixe convencer por esse mito. É claro que cálculo é difícil – Eu não vou mentir para você – mas é administrável, passível de ser feito. Você conseguiu sobreviver à álgebra, geometria e trigonometria. Bem, cálculo apenas começa onde essas matérias terminam – é simplesmente o próximo passo em uma progressão lógica.

E cálculo não é uma língua morta como o latim, falada apenas por professores. É a linguagem dos engenheiros, cientistas e economistas – ok, então é uma linguagem um pouco fora da sua vida diária e pouco provável de surgir em um coquetel. Mas o trabalho desses engenheiros, cientistas e economistas tem um grande impacto no seu dia a dia – desde o seu microondas, telefone celular, TV, e carro até os remédios que você toma, os mecanismos da economia, e a sua segurança nacional. Neste exato momento, algo ao seu alcance ou à sua vista foi impactado pelo cálculo.

Então, o que é o Cálculo?

Cálculo é basicamente toda a álgebra e geometria avançada. Em certo sentido, não é nem uma nova matéria – ele pega as regras corriqueiras da álgebra e da geometria e as ajusta para que possam ser usadas em problemas mais complicados (O problema, claro, é aquele *outro* sentido no qual cálculo *é* uma matéria nova e mais difícil).

Veja a Figura 1-1. Na esquerda tem um homem empurrando uma caixa em uma rampa com inclinação em linha reta. Na direita, o homem está empurrando a mesma caixa em uma rampa com inclinação curva. O problema, em ambos os casos, é determinar a quantidade de energia necessária para empurrar a caixa até o topo. Você pode fazer o problema da esquerda usando matemática básica. Para o da direita, você precisa do cálculo (supondo que você não saiba dos atalhos da física).

Para a rampa com uma inclinação em linha reta, o homem empurra com uma força *constante*, e a caixa sobe a rampa com uma velocidade *constante*. Com algumas fórmulas simples da física e da matemática básica (incluindo álgebra e trigonometria), você pode calcular quantas calorias de energia são necessárias para empurrar a caixa na rampa. Note que a quantidade de energia gasta em cada segundo continua a mesma.

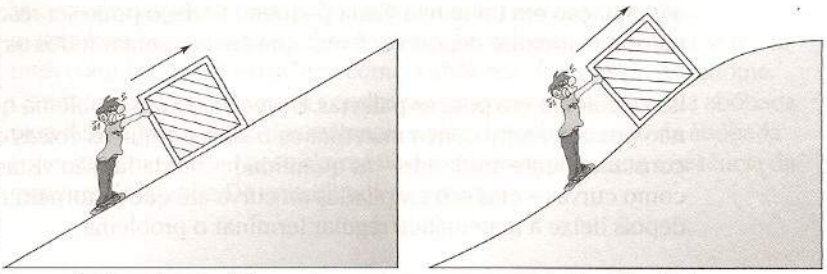


Figura 1-1: A diferença entre a matemática básica e cálculo: em uma só palavra, é a curva.

Para a rampa com inclinação curva, por outro lado, as coisas estão *mudando* constantemente. A inclinação da rampa está *mudando* – e não apenas em incrementos como, por exemplo, é uma inclinação para os primeiros 10 pés e depois uma inclinação diferente para os próximos 10 pés – está *constantemente mudando*. E o homem empurra com uma força que está *constantemente mudando* – quanto mais inclinada é a rampa, mais pesado fica empurrar a caixa. Como resultado, a quantidade de energia gasta também está *mudando*, não a cada segundo ou a cada milésimo de segundo, mas *constantemente mudando* de um momento para o outro. É isso que o faz ser um problema de cálculo. Por agora, não deve ser surpresa para você que o cálculo seja descrito como "a matemática da mudança". Cálculo pega as regras básicas da matemática e aplica em problemas flexíveis e desdobráveis.

Para o problema com inclinação curva, as fórmulas da física continuam as mesmas, e a álgebra e a trigonometria que você usa continua a mesma. A diferença é que – em contraste ao problema da rampa com inclinação reta, onde você de certa forma pode fazer num piscar de olhos – você tem que dividir o problema da inclinação curva em pedaços pequenos e fazer cada pedaço separadamente. A Figura 1-2 mostra uma pequena parte da inclinação curva ampliada em muitas vezes o seu tamanho.

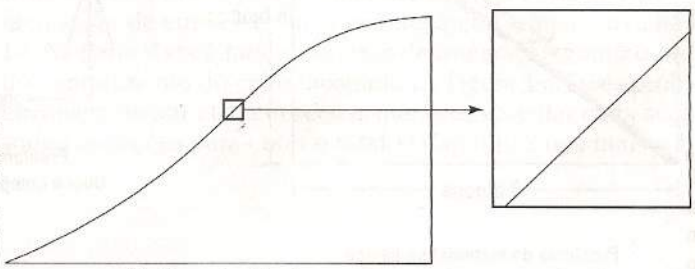


Figura 1-2: Ampliando a curva – voilà, está reta (quase)

Quando você amplia o suficiente, o pequeno comprimento da inclinação curva se torna praticamente reto. Depois, pelo fato de estar reto, você pode resolver esse pequeno pedaço da mesma maneira que o problema com

a inclinação em linha reta. Cada pequeno pedaço pode ser resolvido da mesma maneira, e depois você tem que apenas somar todos os pedaços.

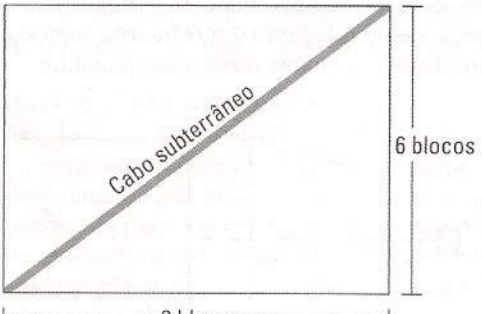
Isso é cálculo em poucas palavras. É preciso de um problema que não possa ser feito com a matemática básica porque as coisas estão constantemente mudando – as quantidades mudadas são vistas no gráfico como curvas – elas são ampliadas na curva até que se tornem retas, e depois deixe a matemática regular terminar o problema.

O que torna o cálculo uma fantástica realização é que ele realmente amplia *infinitamente*. Na realidade, tudo que você faz em cálculo envolve o infinito de uma maneira ou de outra, porque se algo está constantemente mudando, está freqüentemente mudando infinitamente de cada infinitesimal momento até o próximo.

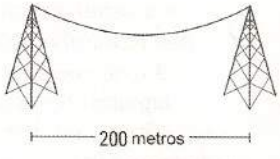
Exemplos de cálculo no mundo real

Assim, com a matemática básica você pode fazer o problema com a inclinação em linha reta; com cálculo você pode fazer o problema com a inclinação curva. Aqui tem mais alguns exemplos.

Com a matemática básica você pode determinar o comprimento de um cabo subterrâneo que corre diagonalmente de uma quina de um parque para a outra. Com cálculo você pode determinar o comprimento de um cabo subterrâneo entre duas torres que tem o formato de uma catenária (que por sinal é diferente de um arco circular simples ou uma parábola). Saber o comprimento certo é de extrema importância para uma empresa de energia elétrica planejando centenas de milhas de cabos elétricos novos. Veja a Figura 1-3.



Problema de matemática básica:
Qual o comprimento do cabo?

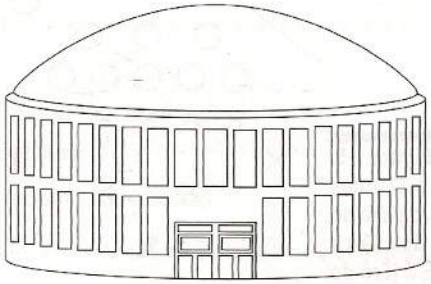


Problema de cálculo:
Qual o comprimento do cabo?

Figura 1-3: Sem cálculo e com cálculo

Você pode calcular a área do telhado plano de uma casa usando a matemática básica. Com o cálculo você pode calcular a área de uma figura mais complicada e não esférica como a abóbada do Houston Astrodome. Os arquitetos desenhando tal construção precisam saber a área da abóbada para determinar o custo dos materiais e para descobrir o peso da abóbada (com ou sem neve). O peso, claro, é necessário para planejar a resistência da estrutura de suporte. Dê uma olhada na Figura 1-4.

Problema de matemática básica:
Qual a área do telhado?



Problema de cálculo:
Qual a área da abóbada?

Figura 1-4: Sem cálculo e com cálculo.

Com a matemática e a física básicas, você pode calcular a distância que um zagueiro deve lançar a bola para o atacante para completar o passe. Note que o atacante corre em uma linha *reta* e a uma velocidade *constante*. Mas quando a NASA, em 1975, calculou a trajetória necessária para o satélite Viking I chegar até Marte, ela precisou de cálculo porque tanto a Terra como Marte giram em órbitas *elípticas* (de diferentes formas) e as velocidades de ambas estão *constantemente mudando* – sem mencionar o fato de que no seu caminho para Marte, a nave espacial é afetada pela diferente e *constante mudança* da atração gravitacional da Terra, da lua, de Marte, e do sol. Veja a Figura 1-5.

Você verá muitas aplicações do cálculo no mundo real ao longo desse livro. Todos os problemas de diferenciação na Parte IV envolvem a inclinação da curva – como a inclinação da rampa curva na Figura 1-1. Na Parte V, você fará problemas de integração como o problema do comprimento do cabo mostrado na Figura 1-3. Esses problemas envolvem dividir algo em seções menores, calcular cada seção, e depois somar as seções para obter o total. O Capítulo 2 tem mais sobre isso.

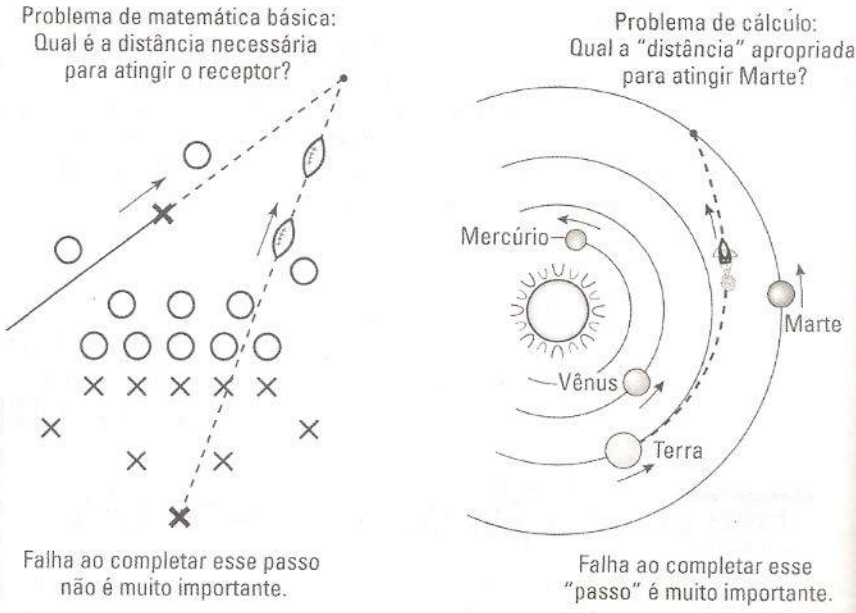


Figura 1-5: A.E.C(Antes da Era do Cálculo) e E.C (Era do Cálculo)

Capítulo 2

As duas grandes idéias do Cálculo: Diferenciação e integração

Neste capítulo

- Investigando profundamente a derivada: é uma razão ou uma inclinação
- Investigando a integral – adição para especialistas
- Séries infinitas: Aquiles versus a tartaruga – façam suas apostas

Esse livro abrange dois tópicos principais em cálculo – diferenciação e integração – assim como um terceiro tópico, séries infinitas. Todos os três tópicos tocam o céu e a terra porque todos são montados com base nas regras da matemática usual e todos envolvem a idéia de infinito.

Definindo a diferenciação

Diferenciação é o processo de achar a *derivada*, e a derivada de uma curva é apenas um termo sofisticado do cálculo para a inclinação da curva; a inclinação de uma curva é também uma simples razão como *quilômetros por hora ou lucro por item.*

A derivada é uma inclinação

Em álgebra, você aprendeu sobre a inclinação da reta – é igual à razão entre o *aumento* e a *distância*. Em outras palavras, Inclinação = $\frac{\text{aumento}}{\text{distância}}$. Veja a Figura 2-1. Deixe-me adivinhar: Uma repentina saudade de álgebra está tomando conta de você.

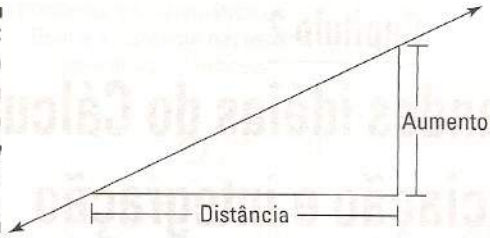


Figura 2-1: A inclinação de uma linha é igual ao *aumento* sobre a *distância*.

Na Figura 2-1, o *aumento* é mais ou menos metade do tamanho da *distância*, assim a linha tem uma inclinação de mais ou menos ½.

Em uma curva, a inclinação está constantemente *mudando* então você precisa do cálculo para determinar sua inclinação. Veja a Figura 2-2.

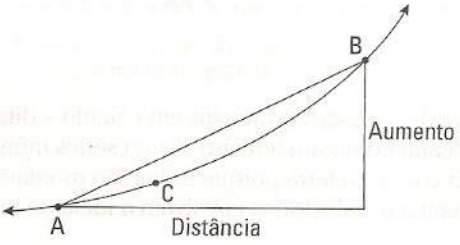


Figura 2-2: A inclinação de uma curva não é tão simples

Assim como a linha na Figura 2-1, a linha da Figura 2-2 tem uma inclinação de mais ou menos ½. E a inclinação dessa linha é a mesma em cada ponto entre A e B. Mas você pode ver que, ao contrário da linha, a inclinação da curva está mudando entre A e B. No ponto A, a curva é menos inclinada do que a linha, e no ponto B a curva é mais inclinada do que a linha. O que você faz quando quer a inclinação exata no, digamos, ponto C? Você pode adivinhar? Tempo esgotado. Resposta: Você amplia. Veja a Figura 2-3.

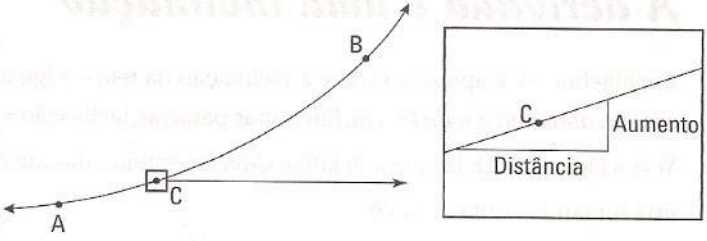


Figura 2-3: Ampliando a curva.

Quando você amplia bastante o suficiente – muito bastante na verdade ao *infinito* – o pequeno pedaço da curva se torna reta, e você pode descobrir a inclinação da maneira antiga. É assim que a diferenciação funciona.

A derivada é uma razão

Visto que a derivada de uma curva é a inclinação – que é igual ao $\frac{\text{aumento}}{\text{distância}}$ ou *aumento por distância* – a derivada é também uma razão, um *disso por aquilo* como, por exemplo, *quilômetros por hora* ou *litros por minuto* (o nome de uma razão em particular depende simplesmente das unidades usadas nos eixos *x* e *y*). Os dois gráficos na Figura 2-4 mostram a relação entre distância e tempo – elas podem representar uma viagem no seu carro.

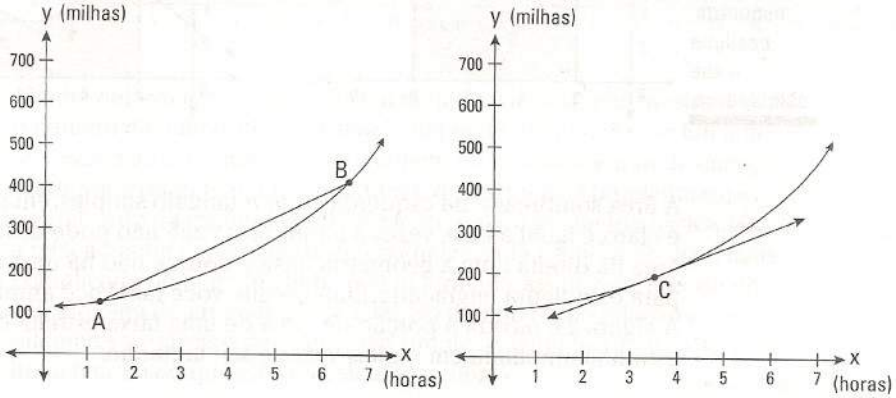


Figura 2-4: Razão média e razão instantânea

Problema de matemática básica: Qual é a razão média entre os pontos A e B?

Problema de cálculo: Qual é a razão instantânea no Ponto C?

Um problema de álgebra básica é mostrado à esquerda na Figura 2-4. Se você sabe onde estão os pontos A e B, você pode determinar a inclinação entre A e B, e, nesse problema, essa inclinação lhe dá a razão *média* em *quilômetros por hora* para o intervalo de A até B.

Para o problema da direita, por outro lado, você precisa do cálculo. Usando a derivada da curva, você pode determinar a inclinação *exata* no ponto C. Logo à esquerda de C a inclinação é menor, e logo à direita de C a inclinação é maior. Mas exatamente no ponto C, por um único momento infinitesimal, você acha uma inclinação diferente das inclinações dos seus vizinhos. A inclinação para este ponto infinitesimal único na curva dá a você a razão *instantânea* em *quilômetros por hora* no ponto C.

Investigando a integração

Integração é a segunda grande idéia em cálculo, e é basicamente apenas uma adição mais sofisticada. Integração é o processo de dividir uma área em pequenas seções, descobrir as áreas dessas seções menores, e depois

somar os pequenos pedaços da área para achar a área total. A Figura 2-5 mostra dois problemas de área – um que você pode fazer usando a geometria e um onde você precisa do cálculo.

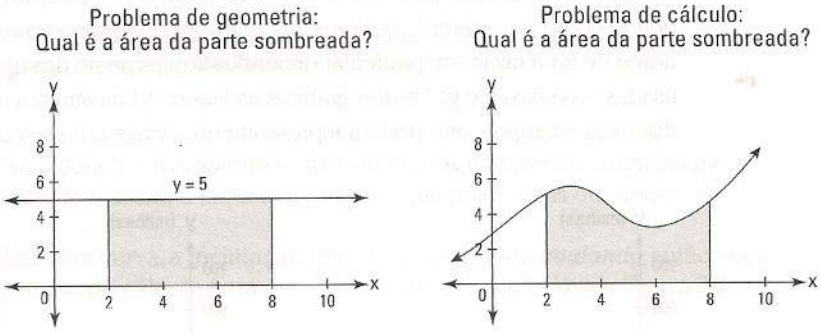


Figura 2-5: Se você não pode determinar a área na esquerda, desligue a sua calculadora.

A área sombreada na esquerda é um retângulo simples, então sua área, é claro, é igual à base vezes a altura. Mas você não pode descobrir a área da direita com a geometria básica porque não há uma fórmula para essa figura engraçada. Então, o que você faz? Você amplia, é claro. A Figura 2-6 mostra a porção de cima de uma faixa estreita da figura estranha ampliada em muitas vezes o seu tamanho.

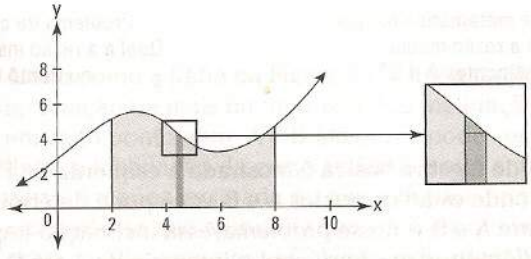


Figura 2-6: Pela enésima vez, quando você amplia, a curva se torna uma reta.

Quando você amplia como mostrado na Figura 2-6, a curva se torna praticamente reta, e quanto mais você amplia, mais reta ela fica – com a integração, você realmente amplia a uma distância *infinita*, de certa forma. Você acaba ficando com o formato da direita na Figura 2-6, que é um simples trapezóide – ou, se você quiser ser bem básico, é um triângulo sentado no topo de um retângulo. Visto que você pode calcular as áreas dos retângulos, triângulos e trapezóides com a geometria básica, você pode ter a área disso e de todos os outros pedaços finos e depois somar todas essas áreas para obter a área total. Isso é integração.

A Figura 2-7 mostra dois gráficos do consumo de energia elétrica de duas cidades em um dia típico de verão. O eixo horizontal representa o número de horas depois da meia-noite, e o eixo vertical a quantidade de potência (em quilowatts) usada por uma cidade em diferentes horas durante o dia.

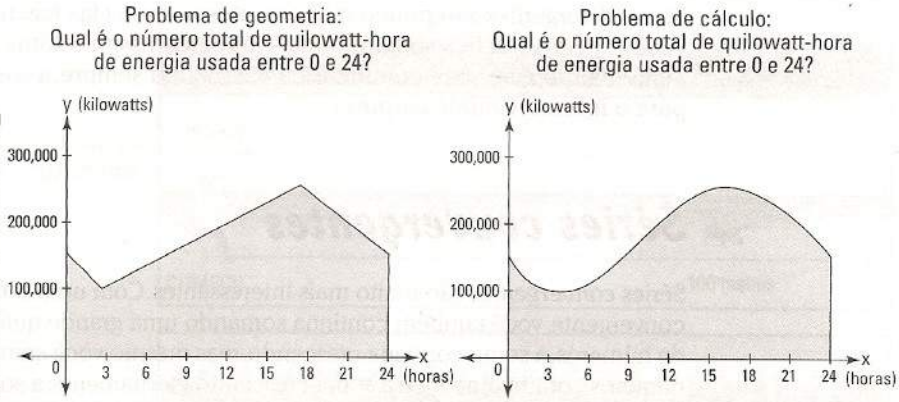


Figura 2-7: Total de quilowatt-hora de energia usada por uma cidade durante um único dia.

A linha deformada na esquerda e a linha curva na direita mostram como o número de quilowatts de potência depende da hora do dia. Em ambos os casos, a área sombreada dá o número de quilowatts-hora de energia consumida durante um período típico de 24 horas. O problema super simplificado da esquerda pode ser feito usando geometria básica. Mas a relação entre a quantidade de potência usada e a hora do dia é mais complicada do que uma linha reta deformada, assim você precisa do cálculo para determinar a área total. No mundo real, a relação entre as diferentes variáveis é raramente tão simples quanto um gráfico de uma linha reta. É isso que torna o cálculo tão útil.

Classificando as séries infinitas

Séries infinitas lidam com a soma de um número infinito de números. Não tente isso na sua calculadora – ao não ser que você tenha muito tempo livre. Aqui temos um exemplo simples. A seqüência de números a seguir é gerada por um processo de duplicação simples – cada termo é duas vezes o seu antecessor:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128...$$

As *séries* infinitas associadas com essa *seqüência* de números é apenas a soma dos números:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + ...$$

Séries divergentes

A séria acima de números duplicados é *divergente* porque se você continuar a adição indefinidamente, a soma vai crescer sem limite. E se você pudesse somar "todos" os números nessa série – isto é, todos os *infinitamente* muitos deles – a soma seria infinita. *Divergente* normalmente significa – há exceções – que as séries tendem ao infinito.

Séries divergentes são pouco interessantes porque elas fazem o que você espera. Você fica somando mais números, assim a soma continua aumentando, e se você continuar com isso para sempre, a soma tente para o infinito. Grande surpresa.

Séries convergentes

Séries *convergentes* são muito mais interessantes. Com uma série convergente, você também continua somando uma grande quantidade de números, a soma continua crescendo, mas mesmo você somando números continuamente e a soma crescendo eternamente, a soma de todos os muitos termos infinitamente é um número *finito*. Esse resultado surpreendente me recorda o famoso paradoxo de Zeno, de Aquiles e a tartaruga (Quer dizer Zeno de Elea, é claro, do século 5 a.C.).

Aquiles está participando de uma corrida com uma tartaruga – um guerreiro corajoso, hein? Nosso generoso herói dá para a tartaruga uma vantagem de 100 metros. Aquiles corre a uma velocidade de 36 quilômetros por hora; a tartaruga "corre" a uma velocidade de 3,6km/h. Zeno usou o seguinte argumento para "provar" que Aquiles nunca vai alcançar ou passar a tartaruga. A propósito, se você se sentir persuadido por essa "prova", você realmente tem que sair mais.

Imagine que você é um jornalista cobrindo uma corrida para a *Spartan Sports Weekly*, e você está tirando uma série de fotos para o seu artigo. A Figura 2-8 mostra a situação no começo da corrida e nas suas duas primeiras fotos.

Você tira a sua primeira foto instantânea no momento em que Aquiles chega ao ponto que a tartaruga começou. Na hora que Aquiles chega nesse ponto, a tartaruga "correu" e está agora a 10 metros na frente de Aquiles (A tartaruga se move a um décimo da velocidade de Aquiles, então o tempo que Aquiles leva para viajar 100 metros, a tartaruga cobre um décimo dessa distância, ou seja 10 metros). Se você fizer as contas vai descobrir que Aquiles levou 10 segundos para correr 100 metros (Se você havia achado estranho os números de 36 e 3,6km/h, agora eles fazem sentido!).

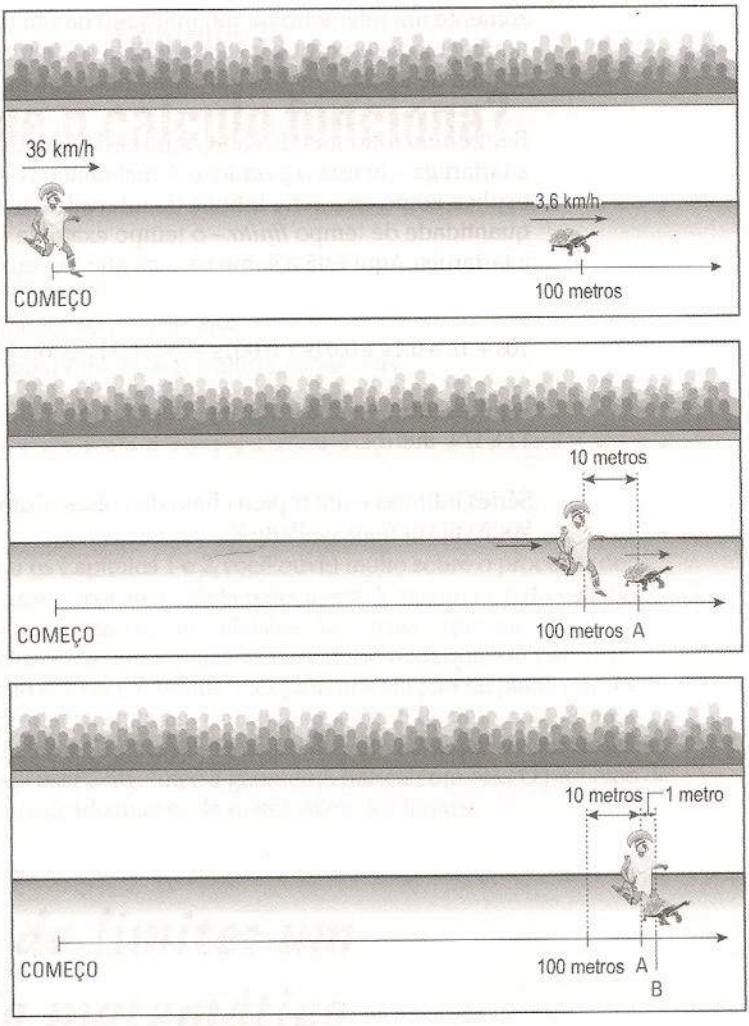


Figura 2-8: Aquiles versus a tartaruga – é final apertado

Você tem uma Polaroid bem rápida, então você olha para a sua primeira foto e anota precisamente onde a tartaruga está quando Aquiles cruza o ponto de partida da tartaruga. A posição da tartaruga é o ponto A na primeira foto na Figura 2-8. Em seguida você tira a sua segunda foto quando Aquiles chega ao ponto A, o que leva mais um segundo. Nesse segundo, a tartaruga moveu para o ponto B. Você tira a sua terceira foto (não mostrada) quando Aquiles chega ao ponto B e a tartaruga move para o ponto C.

Toda vez que Aquiles chega ao ponto onde a tartaruga estava, você tira outra foto. Essa série de fotografias não tem fim. Supondo que você e sua câmera possam trabalhar infinitamente rápido, você vai tirar um número infinito de fotos. E *toda vez* que Aquiles chega ao ponto em que a tartaruga estava, a tartaruga terá andado mais um pedaço – mesmo que

somente um milímetro ou um milésimo de um milímetro. Desse modo, o argumento vale, porque você nunca vai poder chegar ao fim da sua série infinita de fotos, e Aquiles nunca vai poder alcançar a tartaruga.

Bem, como todo mundo sabe, Aquiles, de fato, alcança e ultrapassa a tartaruga – aí está o paradoxo. A matemática de uma série infinita explica como essa série infinita de intervalos de tempo tende para uma quantidade de tempo *finita* – o tempo exato de quando Aquiles ultrapassa a tartaruga. Aqui está a soma para os que são curiosos:

$$10s + 1s + 0{,}1s + 0{,}01s + 0{,}001s + \ldots = 11{,}11\ldots s, \text{ ou } 11\frac{1}{9} \text{ segundos.}$$

Aquiles ultrapassa a tartaruga depois de 11 1/9 segundos na marca de 111 1/9 metros.

Séries infinitas é um tópico cheio de coisas bizarras, paradoxos absurdos. Você vai ver mais na Parte V.

Capítulo 3

Por que o cálculo funciona?

Neste capítulo

- Usando limites para ampliar uma curva
- Inclinação *é igual a* aumento sobre *distância*
- Área de um triângulo *é igual à* base *vezes* altura *sobre dois*
- O Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Se você leu os Capítulos 1 e 2, você ouviu muito sobre o processo de ampliar uma curva até que ela pareça reta. A matemática do cálculo funciona por causa dessa natureza básica das curvas – que elas são *localmente retas* – em outras palavras, curvas são retas quando vistas em um microscópio. A terra é redonda, mas para nós ela parece plana porque nós meio que estamos embaixo de um microscópio quando comparados ao tamanho da terra. Cálculo funciona porque uma vez que as curvas sejam retas, você pode usar a álgebra e a geometria básica com elas. O processo de ampliação é alcançado através da matemática dos limites.

O conceito do limite: um microscópio matemático

A matemática dos *limites* é o microscópio que amplia uma curva. Aqui está como um limite funciona. Digamos que você precisa da inclinação exata de uma parábola $y = x^2$ no ponto (1,1). Veja a Figura 3-1.

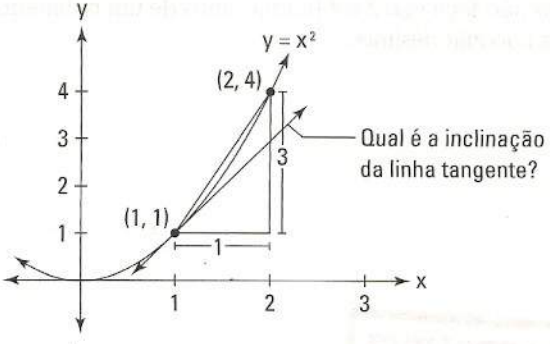


Figura 3-1: A parábola $y = x^2$ com uma linha tangente em (1,1).

Com a fórmula da inclinação usada em álgebra, você pode descobrir a inclinação de uma reta entre os pontos (1,1) e (2,4). De (1,1) para (2,4) você anda 1 casa e sobe 3, então a inclinação é 3/1 ou apenas 3. Mas você pode ver na Figura 3-1 que essa linha é mais inclinada do que a linha tangente no ponto (1,1) que mostra a inclinação da parábola nesse ponto específico. De certa forma, o processo do limite deixa você deslizar para baixo o ponto que começa em (2,4) até o ponto (1,1) até que esteja a um milésimo de milímetro afastado, depois um milionésimo, depois um bilionésimo, e assim sucessivamente até o nível de um microscópio. Se você fizer as contas, as inclinações entre o ponto (1,1) e o seu ponto móvel vão se parecer mais ou menos com 2,001, 2,000001, 2,000000001, e assim por diante. E com a quase mágica matemática dos limites, você pode concluir que a inclinação em (1,1) é exatamente 2, mesmo que o ponto móvel nunca chegue em (1,1) (Se ele chegasse, você só teria um ponto sobrando e você precisa de dois pontos separados para poder usar a fórmula da inclinação). A matemática dos limites é toda baseada nesse processo de ampliação, e ele funciona, novamente, porque quanto mais você amplia, mas reta a curva fica.

O que acontece quando você amplia

A Figura 3-2 mostra três diagramas de uma curva e três coisas que você talvez goste de saber sobre a curva: 1) a inclinação exata no ponto C, 2) a área abaixo da curva entre os pontos A e B, e 3) o comprimento exato da curva entre os pontos A e B. Você não pode responder essas perguntas com matemática básica porque as fórmulas da matemática básica para *inclinação*, *área* e *comprimento* funcionam para linhas retas (e curvas simples como círculos), mas não para curvas estranhas como essa aqui.

A primeira fileira da Figura 3-3 mostra um detalhe ampliado dos três diagramas da curva na Figura 3-2. A segunda fileira mostra uma ampliação, maior e a terceira fileira outra ampliação. Você pode ver como cada ampliação torna as curvas cada vez mais retas e cada vez mais perto da linha diagonal. Esse processo é continuado indefinidamente.

Finalmente, a Figura 3-4 mostra o resultado depois de um número "infinito" de ampliações – mais ou menos. Você pode pensar sobre os comprimentos 3 e 4 na Figura 3-4 (sem trocadilhos) como 3 e 4 milionésimos de um milímetro, não, faça isso 3 e 4 bilionésimos de um milímetro, não, trilionésimos, não, zilionésimos...

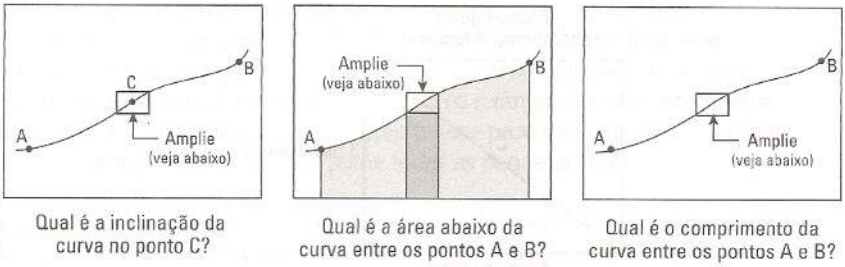


Figura 3-2: Uma curva – três perguntas

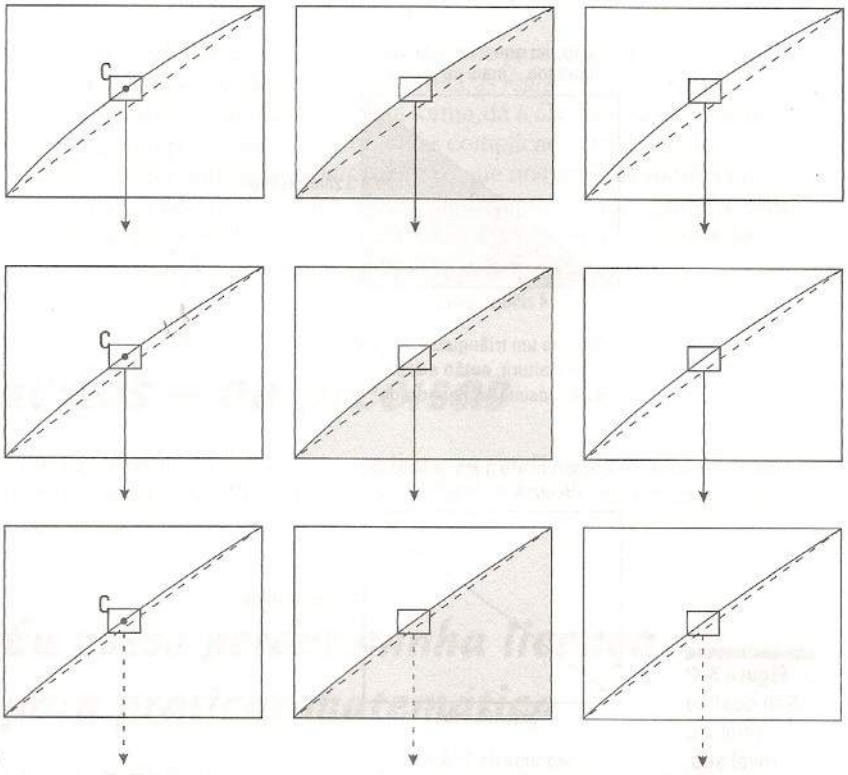


Figura 3-3: Amplie até o nível de um microscópio.

BIBLIOTECA DANTE ALIGHIERI

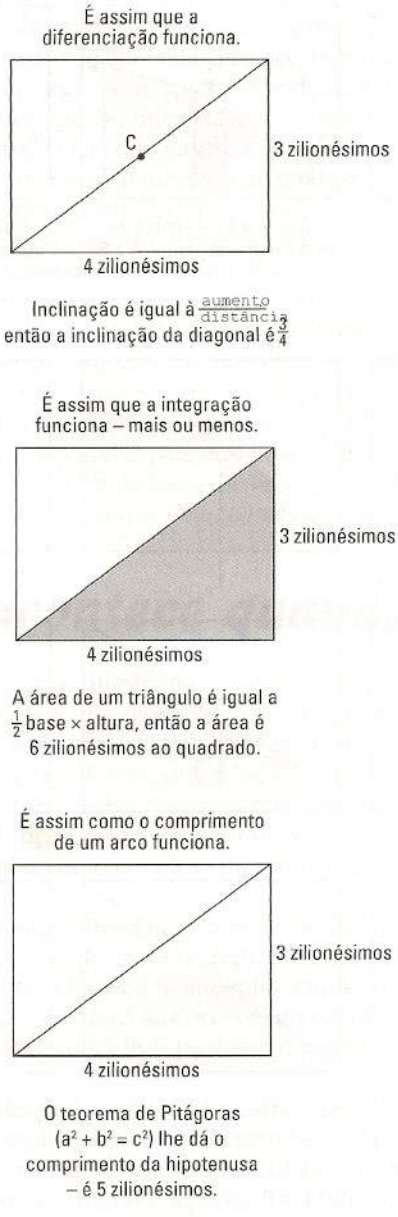


Figura 3-4: Seu destino final – o nível sub, sub, sub... subatômico.

Depois de ampliar "para sempre", a curva está perfeitamente reta e agora as fórmulas da álgebra e da geometria básica funcionam.

Para o diagrama da esquerda na Figura 3-4, você pode usar agora a fórmula básica da *inclinação* usada na álgebra para encontrar a inclinação no ponto C. É exatamente ¾ – essa é a resposta para a primeira pergunta da Figura 3-2.

BIBLIOTECA DANTE ALIGHIERI

Para o diagrama do meio, a fórmula para um triângulo regular usada na geometria lhe dá a área de 6. Então para achar o valor total da área sombreada mostrada na Figura 3-2, você tem que somar esse 6 à área do pequeno retângulo abaixo desse triângulo (o retângulo escuro-sombreado na Figura 3-2 mostra a idéia básica), repita esse processo para todas as outras faixas estreitas, e depois apenas some todas as pequenas áreas.

E para o diagrama da direita, o teorema de Pitágoras regular usado na geometria lhe dá um comprimento de 5. Então para achar o comprimento total da curva entre os pontos A e B na Figura 3-2, você faz a mesma coisa para as outras pequenas seções da curva e depois soma todos os pequenos comprimentos.

Bem, aí está. Cálculo usou o processo do limite para ampliar uma curva até que ela ficasse reta. Depois que está reta, as regras da velha e básica matemática funcionam. Cálculo, dessa forma, dá à álgebra e a geometria básica o poder para lidar com problemas complicados envolvendo quantidades em constante *modificação* (o que nos gráficos aparecem como *curvas*). Isso explica o fato de o cálculo ter tantos usos práticos, pois se existe algo que você com certeza pode contar – além da morte e dos impostos – é que as coisas estão sempre mudando.

Dois avisos – ou precisão

Nem tudo nesse capítulo (ou nesse livro por sinal) vai satisfazer os altos padrões dos matemáticos da academia, tão rigorosos e sistemáticos em suas demonstrações.

Eu posso perder minha licença para praticar matemática

Com respeito aos diagramas do meio da Figura 3-2 até 3-4, eu tenho agido como um irresponsável com a matemática. O processo de integração – encontrar a área embaixo de uma curva – não funciona exatamente da maneira que eu expliquei. Não está completamente errado, apenas meio enganoso. Mas – eu não ligo para o que dizem – essa é minha história e eu vou ficar com ela. Na verdade, não é uma maneira ruim de pensar como a integração funciona, e, de qualquer modo, esse é apenas um capítulo de apresentação.

Mas o que "infinito" realmente significa?

O segundo aviso é que toda vez que eu falo sobre infinito – como nas duas últimas seções onde eu discuti ampliação em um número infinito de vezes – eu coloco a palavra "infinito" entre aspas ou digo algo do tipo "você *meio que* amplia para sempre". Toda vez que você fala sobre infinito, você está sempre em terreno duvidoso. O que significaria ampliar para sempre ou um número infinito de vezes? Você não pode fazer isso – você nunca vai chegar lá. Nós podemos imaginar – mais ou menos – o que é ampliar para sempre, mas há algo um pouco estranho sobre essa idéia – e o mesmo com as classificações.

Parte II

Aquecendo-se com os pré-requisitos do cálculo

A 5ª onda por Rich Tennant

"David está usando álgebra para calcular a gorjeta. Bárbara, você se incomoda de ser um expoente fracionário?"

Nesta parte...

Eu lhe dou uma revisão rápida da álgebra (incluindo frações) e da trigonometria (incluindo geometria) que você precisa para o cálculo. Se você não precisa dessa revisão, pule-a, ou apenas use-a como referência. Se, por outro lado, você está um pouco enferrujado, não seria uma má idéia rever esses assuntos – pelo menos dar uma olhada nessa revisão. Você não pode fazer cálculo sem esses pré-requisitos – especialmente álgebra.

Capítulo 4

Pré-álgebra e revisão de álgebra

Neste capítulo

- Vencendo a batalha das frações: separando para controlar
- Aumentando os seus poderes
- Chegando a potência das potências
- Estabelecendo as leis dos logaritmos
- Se divertindo com fatoração
- Passeando pela resolução de equações quadráticas

Álgebra é a linguagem do cálculo. Você não pode fazer cálculo sem álgebra, como não pode escrever poesia chinesa sem saber chinês. Então, se sua pré-álgebra ou álgebra está um pouco enferrujada – você sabe, todas aquelas regras para lidar com expressões algébricas, equações, frações, potências, raízes, logaritmos, fatoração, equações de segundo grau, etc. – certifique-se de revisar os conceitos básicos a seguir.

Ajustando as suas frações

Abra um livro de cálculo em qualquer página e você vai provavelmente ver uma fração – você não pode escapar delas. Lidar com elas requer que você saiba algumas regras.

Algumas regras rápidas

Primeiramente existe uma regra que é simples, mas muito importante porque sempre aparece no estudo do cálculo:

O denominador de uma fração *nunca* pode ser igual a zero.

$\frac{0}{5}$ é igual a zero, mas $\frac{5}{0}$ é indefinido.

É fácil de ver que $\frac{5}{0}$ é indefinido quando você considera como a divisão funciona:

$$\frac{8}{2} = 4$$

Isso diz a você, é claro, que 8 é 2 somado quatro vezes; em outras palavras, $2 + 2 + 2 + 2 = 8$. Bem, quantos zeros você precisaria somar para chegar a 5? Você não pode fazer isso, e assim você não pode dividir 5 (ou qualquer outro número) por zero.

Aqui está outra regra rápida.

O *recíproco* de um número ou expressão é o seu inverso multiplicativo – o que é uma maneira sofisticada de dizer que o produto de algo pelo seu recíproco é igual a 1. Para achar o recíproco de uma fração, coloque-a invertida. Deste modo, o recíproco de $\frac{3}{4}$ é $\frac{4}{3}$, o recíproco de 6, que é igual a $\frac{6}{1}$, é $\frac{1}{6}$, e o recíproco de $x - 2$ é $\frac{1}{x-2}$.

Multiplicando frações

Somar é geralmente mais fácil do que multiplicar, mas com frações, o inverso é verdade – então eu quero lidar com a multiplicação primeiro. Multiplicar frações é como um estalar dos dedos – apenas multiplique as partes de cima e as partes de baixo:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} \text{ e } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Dividindo frações

Dividir frações tem um passo adicional: você inverte a segunda fração e depois multiplica – dessa forma:

$$\frac{3}{10} \div \frac{5}{4}$$

$= \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{40}$ (agora cancele o 5 do numerador e do denominador)

$= \frac{3}{8}$

Note que você poderia ter cancelado antes de multiplicar. Devido ao fato de o 5 ser somado uma vez para dar 5 e ser somado duas vezes para dar 10, você pode cancelar um 5:[1]

$$\frac{3}{{}_{2}\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{5}^{1}}{4} = \frac{3}{8}$$

Note também que o problema original poderia ter sido escrito como $\frac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{5}}$.

Somando frações

Você sabe que

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$$

Você pode somar desse jeito porque você já tem um denominador comum. Isso também funciona da mesma maneira com variáveis:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

Note que não importa que você tenha um 2 no topo da equação, ou um a na parte de baixo da equação; não importa se um 3 está no topo da equação, ou um b está na parte de baixo da equação; e da mesma maneira um 7 ou c. Isso ilustra um princípio poderoso:

As variáveis sempre se comportam exatamente como os números.

Então, se você está se perguntando o que fazer com a variável ou com as variáveis em um problema, pergunte-se como você faria um problema com números ao invés de variáveis. Depois faça o problema da mesma maneira com as variáveis. Isso é ilustrado com o exemplo a seguir:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$$

Você não pode somar essas frações como fez no exemplo anterior porque esse problema não tem um denominador comum. Agora, supondo que você esteja aturdido, faça o problema com número em vez de variáveis. Você se lembra como somar $\frac{2}{5}+\frac{3}{8}$? Eu não vou simplificar cada linha da solução. Você vai ver por que em um minuto.

1. **Encontre o *menor denominador comum* (na realidade, qualquer denominador comum vai funcionar ao se somar frações), e converta as frações.**

O menor denominador comum é 5 vezes 8, ou 40, então converta cada fração em 40:

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{8}$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{8}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{5}$$

$$=\frac{2\cdot 8}{5\cdot 8}+\frac{3\cdot 5}{5\cdot 8}$$ ($8\cdot 5$ é igual a $5\cdot 8$ então você pode inverter a ordem. Essas frações são 40, mas eu quero deixar o $5\cdot 8$ no denominador por agora)

2. Some os numeradores e mantenha o denominador comum inalterado:

$= \frac{2 \cdot 8 + 3 \cdot 5}{5 \cdot 8}$ (Você pode ver que isso é igual a $\frac{16 + 15}{40}$, ou $\frac{31}{40}$)

Agora você está pronto para fazer o problema original, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$. Nesse problema, você tem um a em vez de um 2, um b em vez de um 5, um c em vez de um 3, e um d em vez de um 8. Apenas siga exatamente os mesmos passos que você segue quando está somando $\frac{2}{5} + \frac{3}{8}$. Você pode pensar em cada um dos números da solução acima como estampados em um lado de uma moeda com a variável correspondente do outro lado. Por exemplo, há uma moeda com um 2 de um lado e um a no lado oposto; outra moeda tem um 8 de um lado e um d do outro lado, e assim por diante. Agora, faça cada passo da solução anterior, vire cada moeda, e voilà, você tem a solução para o problema original. Aqui está a resposta final:

$$\frac{ad + cb}{bd}$$

Subtraindo frações

Subtrair frações é igual a somar frações com exceção de em vez de somar, você subtrai. Percepções como essa são a razão pela qual eles me pagam muito dinheiro.

Simplificando frações

Terminar problemas de cálculo – depois que você fez todos os passos do cálculo – algumas vezes requer um pouco de matemática complicada, incluindo a simplificação. Certifique-se de que você sabe como simplificar e quando pode fazer isso.

Na fração, $\frac{x^5 y^2}{x^3 z}$, três x podem ser simplificados do numerador e do denominador, resultando na fração simplificada $\frac{x^2 y^2}{z}$. Se você escrever os x em vez de usar os expoentes, você poderá ver mais claramente como isso funciona:

$$\frac{x^5 y^2}{x^3 z} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y}{x \cdot x \cdot x \cdot z}$$

Agora simplifique os três x do numerador e do denominador:[1]

$$\frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot z}$$

Isso deixa você com $\frac{x \cdot x \cdot y \cdot y}{z} = \frac{x^2 y^2}{z}$.

Se expresse

Uma *expressão algébrica* ou simplesmente *expressão* é algo do tipo xyz ou $a^2 p^3 \sqrt{q} - 6$, basicamente qualquer coisa sem um sinal de igual (se tiver um sinal de igual, é uma *equação*). Simplificação funciona da mesma maneira para as expressões e paras as variáveis. Por sinal, essa é uma dica não apenas para simplificação, mas para todos os tópicos da álgebra.

As expressões sempre se comportam exatamente como as variáveis.

Assim, se cada x no problema acima for substituído por $(xyv - q)$, você tem:

$$\frac{(xyz - q)^5 y^2}{(xyz - q)^3 z}$$

E três das expressões $(xyv - q)$ são simplificadas do numerador e do denominador, assim como os três x foram simplificados. O resultado simplificado é:

$$\frac{(xyq - q)^2 y^2}{z}$$

A regra da multiplicação

Agora você sabe *como* simplificar. É igualmente importante saber *quando* você pode simplificar.

Você pode simplificar uma fração somente quando ela tem uma *cadeia de multiplicação contínua* através de todo o numerador e de todo o denominador.

A simplificação é permitida em frações como esta:

$$\frac{a^2 b^3 (xy - pq)^4 (c + d)}{ab^4 z (xy - pq)^3}$$

Pense na multiplicação como algo que conduz eletricidade. Uma corrente elétrica pode passar de uma extremidade do denominador para a outra, do a^2 até o $(c + d)$, porque todas as variáveis e expressões estão conectadas através da multiplicação (Note um sinal de adição e de subtração dentro dos parênteses – o "+" em $(c + d)$ por exemplo – não quebra a cadeia). Devido ao fato de o denominador também ter uma cadeia de multiplicação contínua, você pode simplificar: um a, três b_s, e três expressões $(xy + pq)$. Aqui está o resultado:

$$\frac{a(xy - pq)\ (c + d)}{bz}$$

Mas somando um inocente 1 no numerador (ou denominador) na fração original muda tudo:

$$\frac{a^2 b^3 (xy - pq)^4 (c + d) + 1}{ab^4 z (xy - pq)^3}$$

O sinal de adição na frente do 1 quebra a corrente elétrica, e não é permito nenhuma simplificação em nenhum lugar da fração.

Valor absoluto – absolutamente fácil

Valor absoluto apenas torna um número negativo em um número positivo e não faz nada a um número positivo ou ao zero. Por exemplo,

$$|-5| = 5, |3| = 3, \text{e } |0| = 0$$

É um pouco complicado quando lidamos com variáveis. Se x é zero ou positivo, então as barras de valor absoluto não fazem nada, e assim,

$$|x| = x$$

Mas se x for negativo, o valor absoluto de x é positivo, e você escreve

$$|x| = -x$$

Por exemplo, se $x = -5, |-5| = -(-5) = 5$

Quando x é um número negativo, $-x$ (lê-se como "x negativo" ou "o oposto de x") é um número *positivo*.

Fortalecendo os seus poderes

Você é impotente no cálculo se não souber as regras de potência:

- $x^0 = 1$

  Esta é a regra sem levar em consideração a que x é igual – uma fração, um número negativo, qualquer coisa – exceto zero (zero elevado a zero é indefinido). Vamos chamar isso de regra da pia da cozinha:

  $$(\text{tudo menos a pia da cozinha})^0 = 1$$

- $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ e $x^{-a} \frac{1}{x^a}$

  Por exemplo, $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$. Isso é muito importante! Não se esqueça! Note que a resposta $\frac{1}{16}$ *não* é negativa.

- $x^{2/3} = (\sqrt[3]{x})^2 = \sqrt[3]{x^2}$ e $x^{a/b} = (\sqrt[b]{x})^a = \sqrt[b]{x^a}$

  Você pode usar essa regra útil ao inverso para transformar um problema com raiz em um problema de potência mais fácil.

- $x^2 \cdot x^3 = x^5$ e $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

  Aqui você *soma* as potências (A propósito, você não pode fazer nada com x^2 mais x^3. Você não pode somar x^2 a x^3 porque eles não são

termos iguais. Você só pode somar ou subtrair termos quando a parte da variável de cada termo for a mesma, por exemplo, $3xy^2z + 4xy^2z = 7xy^2z$. No caso de você estar curioso, isso funciona da mesma maneira – eu não estou brincando – que 3 cadeiras mais 4 cadeiras é igual a 7 cadeiras; você não pode somar *termos diferentes*, assim como não pode somar 5 cadeiras e 2 carros.

- $\frac{x^5}{x^3} = x^2$ e $\frac{x^2}{x^6} = x^{-4}$ e $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$

  Aqui você *subtrai* as potências.

- $(x^2)^3 = x^6$ e $(x^a)^b = x^{ab}$

Aqui você *multiplica* as potências.

- $(xyz)^3 = x^3y^3z^3$ e $(xzy)^a = x^a y^a z^a$

Aqui você *distribui* a potência para cada variável.

- $\left(\frac{x}{y}\right)^4 = \frac{x^4}{y^4}$ e $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$

A mesma coisa.

- $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ NÃO!

Não distribua a potência nesse caso. Em vez disso, multiplique da maneira longa: $(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Veja o que acontece se usar a "regra" acima com números: $(3+5)^2 = 8^2$, ou 64, *não* $3^2 + 5^2$, que é igual a 9 + 25, ou 34.

Fixando as raízes

Raízes, especialmente as quadradas, sempre aparecem em cálculo. Então saber como elas funcionam e entender a conexão fundamental entre raízes e potências é essencial. E, é claro, isso é o que eu já vou te dizer.

Regra das raízes – ou melhor, regra da raiz

Qualquer raiz pode ser transformada em potência, por exemplo, $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$, $\sqrt{x} = x^{1/2}$ e $\sqrt[4]{x^3} = x^{3/4}$. Dessa forma, você na verdade não precisa das regras das raízes – você pode apenas transformar cada raiz de um problema em uma potência e usar as regras das potências para resolver o problema (essa é uma técnica muito útil, por sinal). Mas caso você seja um guloso por castigo, aqui estão mais regras para revisar (aprender pela primeira vez?). Na realidade, quando você chega aqui, você deve provavelmente saber essas regras.

- $\sqrt{0} = 0$ e $\sqrt{1} = 1$

  Mas você sabia disso, certo?

  Você não pode ter um número negativo dentro de uma raiz quadrada ou qualquer outra raiz de número *par* – pelo menos não em cálculo básico.

- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$, e $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \sqrt[n]{ab}$
- $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- $\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[12]{a}$ e $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

  Você multiplica os índices do radical.

- $\sqrt{a^2} = |a|$, $\sqrt[4]{a^4} = |a|$, $\sqrt[6]{a^6} = |a|$, e assim sucessivamente.

  Se você tem uma raiz de número *par*, você precisa das barras de valor absoluto na resposta, porque sendo *a* positivo ou negativo, a resposta é positiva. Se for uma raiz de número *ímpar*, você não precisa das barras de valor absoluto. Assim,

- $\sqrt[3]{a^3} = a$, $\sqrt[5]{a^5}$, e assim por diante.
- $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$. NÃO!

  Cometa esse erro e vá direito para a cadeia. Tente resolver com números: $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, que *não* é igual a $2 + 3$.

Simplificando raízes

Aqui estão as duas últimas coisas sobre raízes. Primeiro, você precisa saber os dois métodos para simplificar raízes como $\sqrt{300}$ ou $\sqrt{504}$.

O método rápido funciona para $\sqrt{300}$ porque é fácil perceber o quadrado perfeito, 100, que tem no número 300. Pelo fato de 300 ser igual a 100 vezes 3, o 100 sai como sua raiz quadrada, 10, deixando o 3 dentro do radical. Assim, a resposta é $10\sqrt{3}$.

Para $\sqrt{504}$, não é fácil achar um quadrado perfeito grande que esteja em 504, então você tem que usar o método mais longo:

1. Quebre o número 504 em um produto de todos os seus números primos.

$$\sqrt{504} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7}$$

2. Circule cada par de números.

$$\sqrt{\textcircled{2 \cdot 2} \cdot 2 \cdot \textcircled{3 \cdot 3} \cdot 7}$$

3. Para cada par circulado, tire um número para fora da raiz.

$$2 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 7}$$

4. Simplifique.

$$6\sqrt{14}$$

A última coisa sobre raízes é que, por convenção, você não deixa uma raiz no denominador de uma fração – é uma convenção boba e antiquada, mas ainda é ensinada, então aqui está. Se sua resposta é, vamos dizer, $\frac{2}{\sqrt{3}}$, você multiplica isso por $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Logaritmo – não é o nome de escola de dança, nem de academia[3]

Um *logaritmo* é apenas uma maneira diferente de expressar uma relação exponencial entre números. Por exemplo,

$2^3 = 8$, então,

$\log_2 8 = 3$ (lê-se como "log de 8 na base 2 é igual a 3)

Essas duas equações dizem exatamente a mesma coisa. Você pode pensar em uma delas como a maneira dos gregos escreverem essa relação matemática e a outra como a maneira latina de escrever essa mesma coisa. A base de um logaritmo pode ser qualquer número, exceto o 1, maior do que zero, e por convenção, se a base for 10, você não a escreve. Por exemplo, $\log 1000 = 3$ significa $\log_{10} 1000 = 3$. E também, log de base e ($e \approx 2{,}72$) é escrito como *ln* em vez de $\log_e$ – matemáticos usam tanto isso que eu suponho que eles quiseram uma abreviação especial para isso.

Você deve saber as seguintes propriedades dos logaritmos:

- $\log_c 1 = 0$
- $\log_c c = 1$
- $\log_c (ab) = \log_c a + \log_c b$
- $\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$
- $\log_c a^b = b \log_c a$

- $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$
- Com essa propriedade, você pode calcular algo do tipo $\log_3 20$ na sua calculadora digitando $\dfrac{\log_c 20}{\log_c 3}$
- $\log_a a^b = b$
- $a^{\log_a b} = b$

Fatorando – Quando é que eu vou precisar disso?

Quando é que você vai precisar disso? Para cálculo, é claro.

Fatorar significa "desfazer a multiplicação", como reescrever 12 como $2 \cdot 2 \cdot 3$. No entanto, você não vai encontrar problemas como esse no cálculo. Para cálculo, você precisa saber fatorar expressões algébricas, como fatorar $5xy + 10yz$ em $5y(x + 2z)$. Fatoração algébrica sempre envolve reescrever a *soma* de termos na forma de *produto*. O que se segue é um curso de revisão.

Achando o MDC

O primeiro passo em fatorar qualquer tipo de expressão é encontrar – em outras palavras, fatorar – a maior coisa que todos os termos têm em comum – esse é o *máximo divisor comum* ou MDC. Por exemplo, cada um dos três termos de $8x^3y^4 + 12x^2y^5 + 20x^4y^3z$ tem o fator $4x^2y^3$, então ele pode ser retirado da seguinte forma: $4x^2y^3(2xy + 3y^3 + 5x^2y)$. Certifique-se de sempre procurar um MDC para retirar antes de tentar outras técnicas de fatoração.

Procurando um padrão

Depois de retirar o MDC se houver um, a próxima coisa a se fazer é procurar por um dos três padrões. O primeiro padrão é *importante*; os outros dois são menos importantes.

Diferença dos quadrados

Saber como fatorar a *diferença de quadrados* é crítico:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Se você puder reescrever como que algo do tipo $9x^4 - 25$ se pareça com $(\text{isso})^2 - (\text{aquilo})^2$ então você pode usar o padrão de fatoração. Veja como:

$$9x^4 - 25 = (3x^2)^2 - (5)^2$$

Agora, desde que $(\text{isso})^2 - (\text{aquilo})^2 = (\text{isso} - \text{aquilo})(\text{isso} + \text{aquilo})$, você pode fatorar o problema:

$$(3x^2)^2 - (5)^2 = (3x^2 - 5)(3x^2 + 5)$$

A *diferença* de quadrados, $a^2 - b^2$ pode ser fatorada, mas a *soma* de quadrados, $a^2 + b^2$, *não* pode ser fatorada. Em outras palavras, $a^2 + b^2$, como os números 7 e 13, é *primo* – você não pode quebrá-lo.

Soma e diferença de cubos

Você talvez também queira memorizar as regras de fatoração para a *soma e diferença de cubos*:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Tentando algumas fatorações trinomiais

Você se lembra da fatoração regular de trinômios dos seus dias de álgebra?

Um *trinômio* é um polinômio com três termos. Um polinômio é uma expressão do tipo $4x^5 - 6x^3 + x^2 - 5x + 2$ onde, com exceção da *constante* (o número 2 no exemplo), todos os termos têm uma variável elevada a uma potência de número *inteiro* positivo. Em outras palavras, nenhuma potência na forma de frações e com números negativos é permitida. E nem radicais, logaritmos, senos ou cossenos, ou qualquer outra coisa – apenas termos com um *coeficiente*, como o 4 no termo $4x^5$, multiplicado por uma variável elevada a um potência. O *grau* de um polinômio é a maior potência de x do polinômio. O polinômio acima, por exemplo, tem um grau de 5.

Não seria uma má idéia voltar à boa forma com problemas do tipo

$$6x^2 + 13x - 5 = (2x + 5)(3x - 1)$$

Umas poucas técnicas básicas, de adivinhar e verificar, para fatorar um trinômio como esse estão flutuando ao redor do fluido matemático – você provavelmente aprendeu uma delas na sua aula de álgebra. Se você se lembra, ótimo. Mas tais regras de fatoração não são críticas porque você pode sempre fatorar (e resolver) trinômios com a fórmula quadrática, que é abrangida na próxima seção. Para mais sobre fatoração de trinômios, veja Álgebra Para Leigos de Mary Jane Sterling (publicado pela Wiley).

Resolvendo equações quadráticas

Uma equação quadrática é qualquer equação polinomial de *segundo grau* – é quando a maior potência de x, ou de qualquer outra variável usada, é 2.

Você pode resolver equações quadráticas usando um dos três métodos básicos.

Método 1: Fatorando

Resolva $2x^2 - 5x = 12$

1. **Traga todos os termos para um lado da equação, deixando o zero do outro lado.**

   $$2x^2 - 5x - 12 = 0$$

2. **Fatore.**

   $$(2x + 3)(x - 4) = 0$$

   Você pode verificar que esses fatores estão corretos ao multiplicá-los. "Soma e Produto" te diz alguma coisa?

3. **Coloque cada fator igual a zero e resolva (usando a propriedade do produto nulo).**

   $2x + 3 = 0$ $\qquad$ $x - 4 = 0$

   $2x = -3$

   $x = -\frac{3}{2}$, $\qquad$ ou $\qquad$ $x = 4$

Então, essa equação tem duas soluções: $x = -\frac{3}{2}$ e $x = 4$.

Método 2: A fórmula quadrática

A solução ou soluções de uma equação quadrática, $ax^2 + bx + c$, são dadas através da fórmula quadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Agora resolva a mesma equação do Método 1 com a fórmula quadrática:

1. **Traga todos os termos para um lado da equação, deixando o zero do outro lado.**

$$2x^2 - 5x - 12 = 0$$

2. **Coloque os coeficientes na fórmula.**

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(-12)}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 - (-96)}}{4}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{121}}{4}$$

$$= \frac{5 \pm 11}{4}$$

$$= \frac{16}{4} \text{ ou } \frac{6}{4}$$

$$= 4 \text{ ou } -\frac{3}{2}$$

Isso concorda com as soluções obtidas previamente – é melhor que as soluções sejam iguais porque nós estamos resolvendo a mesma equação.

Aqui está uma ótima dica para usar a fórmula quadrática para fatorar trinômios.

Digamos que você queira apenas fatorar o trinômio $2x^2 - 5x - 12$ em vez de resolver a equação quadrática correspondente, $2x^2 - 5x - 12 = 0$. Veja aqui o que você deve fazer.

1. **Use a fórmula quadrática para achar os valores de *x* (Você também pode usar sua calculadora para achar as soluções). Certifique-se de que as soluções estão escritas como frações em vez de como decimais e que elas estão reduzidas aos menores valores.**

   As duas soluções, novamente, são 4 e $-\frac{3}{2}$.

2. **Pegue as duas soluções e coloque-as em fatores. Se a solução for positiva, use a subtração. Se a solução for negativa, use adição.**

Então com a solução igual a 4, você tem $(x-4)$; e com $-\frac{3}{2}$, você tem $\left(x+\frac{3}{2}\right)$:

$$(x-4)\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

3. **Se uma das soluções for uma fração, pegue o denominador e coloque-o na frente do *x*.**

$$(x-4)\left(2x+\frac{3}{2}\right)$$

E, voilà, o trinômio é fatorado em $(x-4)(2x+3)$.

Método 3: Completando o quadrado

O terceiro método para resolver equações quadráticas é chamado de *completando o quadrado* porque ele envolve criar um trinômio quadrado perfeito que você pode então resolver tirando a sua raiz quadrada.

Resolva $3x^2 = 24x + 27$

1. **Coloque o x^2 e os termos de x de um lado e a constante do outro.**

   $3x^2 - 24x = 27$

2. **Divida ambos os lados pelo coeficiente de x^2 (a não ser, é claro, que seja 1).**

   $x^2 - 8x = 9$

3. **Pegue metade do coeficiente de x, eleve ao quadrado, e depois some isso em ambos os lados.**

   Metade de –8 é –4 e $(-4)^2$ é 16, então some 16 em ambos os lados:

   $x^2 - 8x + 16 = 9 + 16$

4. **Fatore o lado esquerdo. Note que o fator sempre contém o mesmo número que você encontrou no passo 3 (-4 nesse exemplo).**

   $(x - 4)^2 = 25$

5. **Tire a raiz quadrada de ambos os lados, lembrando de colocar um sinal de ± do lado direito.**

   $\sqrt{(x-4)^2} = \sqrt{25}$

   $x - 4 = \pm 5$

6. **Resolva.**

   $x = 4 \pm 5$

   $= 9$ ou -1

Capítulo 5

Funções legais e seus ótimos gráficos

Neste capítulo

- Entendendo funções e relações
- Aprendendo sobre linhas
- Focando nas parábolas
- Lutando com os gráficos
- Transformando funções
- Investigando funções inversas

Virtualmente tudo o que você faz em cálculo envolve funções e seus gráficos de uma forma ou de outra. Cálculo diferencial envolve encontrar a inclinação (ou coeficiente angular) de muitas funções, e o cálculo integral envolve calcular a área abaixo das funções. E não somente o conceito de uma função é crítico para o cálculo, ele é uma das idéias mais fundamentais em toda a matemática.

O que é uma função?

Basicamente, uma função é a relação entre duas coisas na qual o valor numérico de uma coisa em alguma forma depende do valor da outra. Exemplos estão ao nosso redor: A temperatura diária média para a sua cidade depende, e é uma função de, da época do ano; a distância que um objeto caiu é uma função de quanto tempo passou desde que você o soltou; a área de um círculo é uma função do seu raio; e a pressão de um gás engarrafado é uma função da sua temperatura.

As características explicativas de uma função

Uma função tem apenas um valor de saída (output) para um valor de entrada (input).

Considere a Figura 5-1.

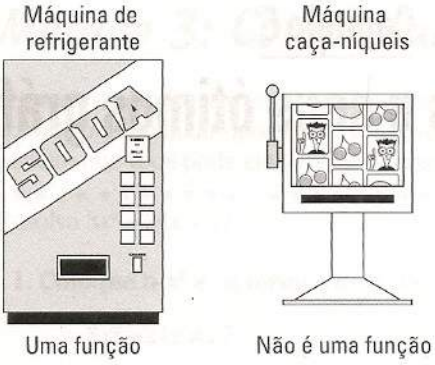


Figura 5-1: A máquina de refrigerante é uma função. Uma máquina caça-níqueis não é uma função.

A máquina de refrigerante é uma função porque depois de inserir os os dados de entrada (sua escolha e seu dinheiro), você sabe exatamente qual é o retorno. Com a máquina caça-níqueis, por outro lado, o output é um mistério, então não é uma função.

A função elevada ao quadrado, *f*, é uma função porque tem exatamente um output designado para cada input. Não importa que tanto o 2 como o -2 produzam o mesmo output de 4 porque dado um determinado input, digamos -2, não há mistério sobre o output. Quando o input é 3 em *g*, no entanto, você não sabe se o output vai ser 1 ou 2. Devido ao fato de nenhum mistério sobre o input ser permitido em funções, *g* não é uma função.

Boas funções, ao contrário de boa literatura, têm finais previsíveis.

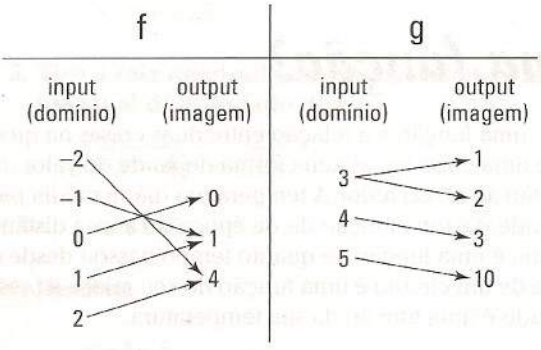


Figura 5-2: *f* é uma função. *g* não é.

O conjunto de todos os inputs é chamado de *domínio*; o conjunto de todos os outputs é chamado de *imagem*.

Algumas pessoas gostam de pensar na função como uma máquina. Considere novamente a função ao quadrado, *f*, da Figura 5-2. A Figura 5-3 mostra dois inputs e seus respectivos outputs.

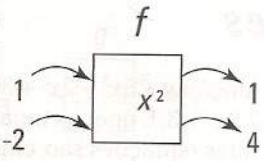


Figura 5-3: Uma função como uma máquina: A carne entra, a lingüiça sai.

Você insere 1 dentro da máquina, e do lado de fora sai um 1; você coloca um -2 e um 4 sai. Uma função como uma máquina recebe um input, opera de alguma forma, e depois cospe um output.

Variáveis independentes e dependentes

Em uma função, a coisa que *depende* da outra coisa é chamada de *variável dependente*; a outra coisa é a *variável independente*. Visto que você coloca números na variável independente, ela também é chamada de *variável de entrada*. Depois de colocar um número, você então calcula o output ou a resposta para a variável dependente, assim a variável dependente é também chamada de *variável de saída*. Quando você desenha o gráfico de uma função, a variável independente vai para o eixo x, e a variável dependente vai para o eixo y.

Algumas vezes a dependência entre as duas coisas é relação de causa e efeito – por exemplo, aumentar a temperatura do gás *causa* o aumento da pressão. Nesse caso, a temperatura é a *variável independente* e a pressão é a *variável dependente* porque ela depende da temperatura.

Muitas vezes, no entanto, a dependência não é uma relação de causa e efeito, mas somente algum tipo de associação entre duas coisas. Geralmente a variável independente é o que nós já sabemos ou podemos facilmente verificar, e a variável dependente é o que queremos descobrir. Por exemplo, você não diria que o tempo causa um objeto cair (a gravidade é a causa), mas se você sabe quanto tempo se passou, você pode descobrir a altura da queda. Então, o tempo é a variável independente, e a altura a variável dependente; e você diria que a altura é uma função do tempo.

Qualquer que seja o tipo de correspondência entre as duas variáveis, a variável dependente é a coisa com a qual a gente se preocupa – quando e quão rápido ela sobe e quando e quão rápido ela desce. Geralmente, nós queremos saber o que acontece à variável dependente ou y quando a variável independente ou x aumenta (vai para a direita).

Notação das funções

Uma maneira simples de escrever a função $y = 5x^3 - 2x^2 + 3$ é trocar o "y" pelo "$f(x)$" e escrever $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3$. É apenas uma notação diferente para a mesma coisa. Essas duas equações são, em todos os aspectos, matematicamente idênticas. Alunos ficam normalmente intrigados pela notação da função quando eles a vêem pela primeira vez. Eles se perguntam o que o "f" significa e se o $f(x)$ significa f vezes x. Ele não significa isso. Se a notação da função incomoda você, meu conselho é pensar no $f(x)$ como simplesmente a maneira que o y é escrito em algum outro idioma. Não considere o f e o x separadamente; apenas pense no $f(x)$ como um símbolo simples para y.

Pense no f(x) (lê-se "f de x") como uma abreviação para "uma função de x". Você pode escrever $y = f(x) = 3x^2$, traduzido como "y é uma função de x e essa função é $3x^2$". Contudo, algumas vezes outras letras são usadas em vez de f – como, por exemplo, $g(x)$ ou $p(x)$ – geralmente para diferenciar as funções. A letra da função não necessariamente representa alguma coisa, mas às vezes a letra inicial de uma palavra é usada (nesse caso você usa uma letra maiúscula). Por exemplo, você sabe que a área de um quadrado é determinada elevando a medida dos seus lados ao quadrado: $Área = lado^2$ ou $A = s^2$. A área do quadrado depende, e é uma função, da medida do lado. Com a notação da função, você pode escrever $A(s) = s^2$.

Considere a função quadrática $y = x^2$ ou $f(x) = x^2$. Quando você coloca o número 3 no lugar de x, você tem como resposta 9. A notação da função é conveniente porque você pode expressar abreviadamente a entrada e a saída escrevendo $f(3) = 9$ (lê-se "f de 3 é igual a 9"). Lembre-se que $f(3) = 9$ significa que quando x é 3, $f(x)$ é 9; equivalentemente, ela diz a você que quando x é 3, y é 9.

Função composta

Uma função *composta* é a combinação de duas funções. Por exemplo, o custo familiar de energia elétrica depende de quanto você consome, e o consumo depende da temperatura do lado de fora. Posto que o custo depende do consumo e o consumo depende da temperatura, o custo vai depender da temperatura. Na linguagem da função, o custo é uma função do consumo, o consumo é uma função da temperatura, e assim o custo é uma função da temperatura. Essa última função, uma combinação das duas primeiras, é uma função composta.

Deixe $f(x) = x^2$ e $g(3) = 5x - 8$. Coloque 3 em $g(x) = g(3) = 5 \cdot 3 - 8$, que é igual a 7. Agora pegue esse resultado, 7, e coloque em $f(x) = f(7) = 7^2 = 49$. A metáfora da máquina mostra o que eu fiz aqui. Veja a Figura 5-4. A máquina g transforma um 3 em um 7, e depois a máquina f transforma o 7 em 49.

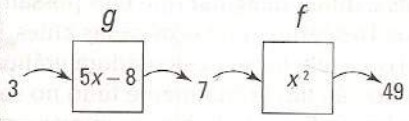


Figura 5-4: Duas funções como máquinas

Você pode expressar o resultado das duas funções em um passo com a seguinte função *composta*:

$$f\left(g\left(3\right)\right) = 49$$

Você calcula primeiro a função de dentro de uma função composta – $g(3) = 7$. Depois você pega o resultado, 7, e calcula $f(7)$, que é igual a 49.
Para determinar a função composta geral, $f\left(g\left(x\right)\right)$, coloque $g(x)$, que é igual a $5x - 8$, em $f(x)$. Em outras palavras, você quer determinar $f\left(5x - 8\right)$. A função f ou máquina f pega esse valor e eleva ao quadrado. Assim,

$$f\left(5x - 8\right) = \left(5x - 8\right)^2$$

$$= \left(5x - 8\right)\left(5x - 8\right)$$

$$= 25x^2 - 40x - 40x + 64$$

$$= 25x^2 - 80x + 64$$

Assim, $f\left(g\left(x\right)\right) = 25x^2 - 80x + 64$.

Com funções compostas, a ordem é importante. Como uma regra geral, $f\left(g\left(x\right)\right) \neq g\left(f\left(x\right)\right)$.

Com o que uma função se parece?

Eu não sou um histórico matemático, mas todos parecem concordar que René Descartes (1596-1650) veio com a idéia do sistema de coordenadas *x-y* mostrado na Figura 5-5.

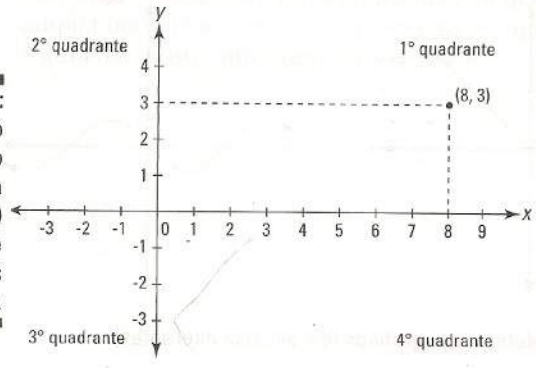


Figura 5-5: O plano cartesiano (para Descartes) ou sistema de coordenadas *x-y*.

Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716) foram os inventores do cálculo, mas é difícil imaginar que eles possam ter feito isso sem a contribuição de Descartes, muitas décadas antes. Pense no sistema de coordenadas (ou a tela da sua calculadora gráfica) como sua janela para o mundo do cálculo. Virtualmente tudo no seu livro de cálculo e nesse livro envolve gráficos de linhas ou curvas – geralmente funções – no sistema de coordenada *x*-*y*.

Considere os quatro gráficos na figura 5-6.

Essas quatro curvas são funções porque elas satisfazem o *teste da reta vertical* (Nota: Eu estou usando aqui o termo *curva* para me referir a qualquer forma, seja curva ou reta).

Uma curva é uma função se a reta vertical desenhada – sem levar em consideração onde é desenhada – tocar a curva apenas uma vez. Isso garante que cada input tenha exatamente um output.

Não importa onde você desenhe a reta vertical em qualquer um dos quatro gráficos na Figura 5-6, a reta tocará a curva em apenas um ponto. Tente.

Se, no entanto, uma reta vertical puder ser desenhada para que toque a curva duas ou mais vezes, então a curva não é uma função. As duas curvas na Figura 5-7, por exemplo, não são funções.

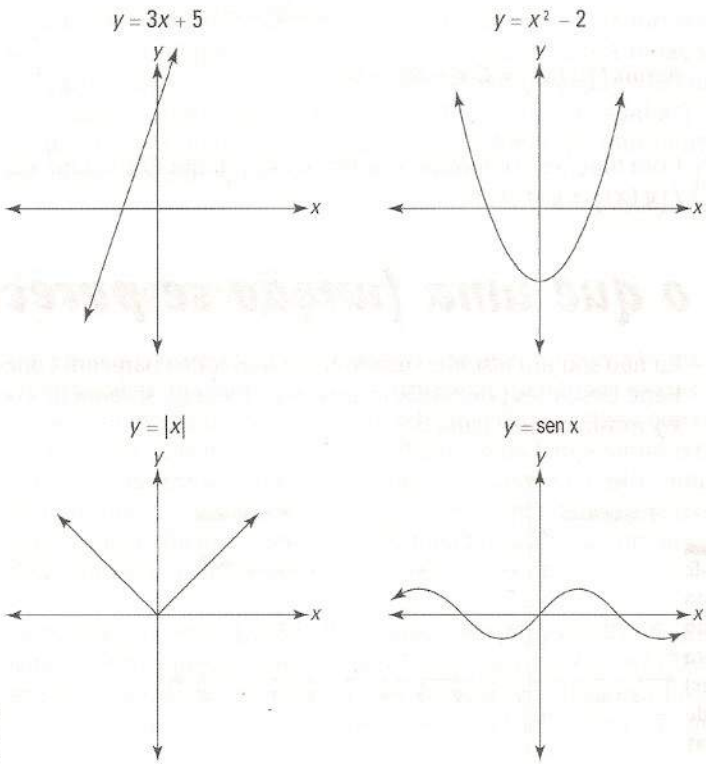


Figura 5-6: Quatro funções.

(Nota: Esses gráficos têm escalas diferentes)

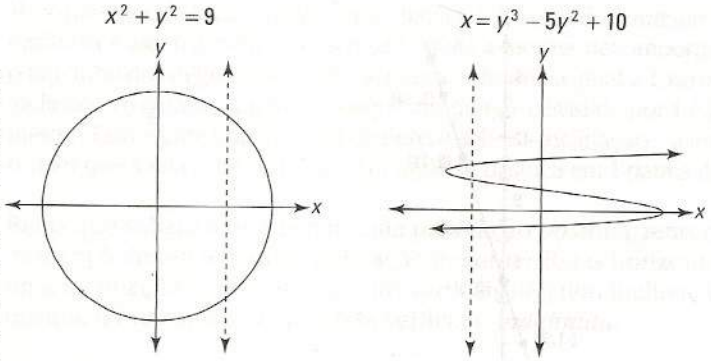


Figura 5-7: Essas duas curvas não são funções porque foram reprovadas no teste da reta vertical. Elas são, no entanto, relações.

(Nota: Esses gráficos têm escalas diferentes)

Então, as quatro curvas na Figura 5-6 são funções, e as duas na Figura 5-7 não são, mas todas as seis curvas são *relações*.

Uma *relação* é qualquer coleção de pontos no sistema de coordenadas *x*-*y*.

Você passa pouco tempo estudando algumas relações que não são funções no cálculo – círculos, por exemplo – mas a grande maioria dos problemas de cálculo envolve funções.

Funções comuns e seus gráficos

Você vai ver centenas de funções no seu estudo de cálculo, então não seria uma má idéia familiarizar-se com as funções básicas nesse tópico: a reta, a parábola, a função de valor absoluto, as funções cúbicas e de raiz cúbicas, e as funções exponenciais e logarítmicas.

Retas no plano em português claro

Uma reta é a função mais simples que você pode desenhar num plano cartesiano (Retas são importantes em cálculo porque quando você amplia bem uma curva, ela parece e se comporta como uma reta). A Figura 5-8 mostra um exemplo: $y = 3x + 5$.

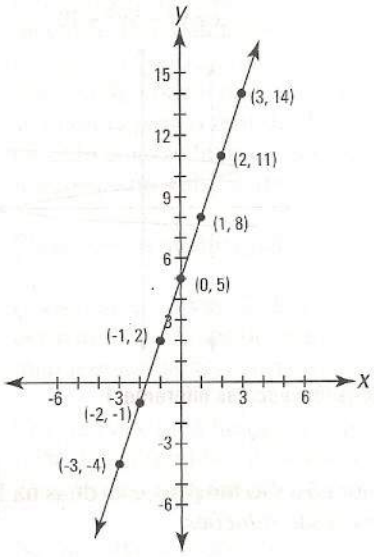


Figura 5-8: O gráfico da reta y = 3x + 5.

Acertando as inclinações

A coisa mais importante sobre a reta na Figura 5-8 – pelo menos para o seu estudo de cálculo – é a sua inclinação. Note que toda vez que *x* se desloca em 1 para a direita, *y* sobe em *3*. Uma boa maneira de visualizar a inclinação é desenhar uma escada embaixo da reta (veja a Figura 5-9). A parte vertical do degrau é chamada de *aumento*, a parte horizontal é chamada de *distância*, e a inclinação é definida como a razão entre o aumento e a distância:

$$\text{inclinação} = \frac{\text{aumento}}{\text{distância}} = \frac{3}{1} = 3$$

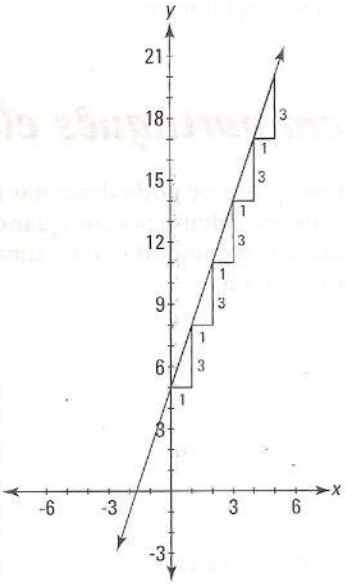


Figura 5-9: A reta y = 3x + 5 tem uma inclinação igual a 3.

Você não precisa fazer a distância ser igual a 1. A razão do aumento sobre a distância, e assim a inclinação, sempre resulta a mesma, não importando qual o tamanho dos degraus. Se você quer fazer a distância igual a 1, no entanto, a inclinação é igual ao aumento porque um número dividido por 1 é igual a ele mesmo. Essa é uma boa maneira de pensar sobre a inclinação - a inclinação é o valor que a reta sobe (ou desce) quando se desloca em 1 para a direita.

Retas que sobem à direita têm uma inclinação *positiva*; retas que descem à direita têm uma inclinação *negativa*. Retas horizontais têm uma inclinação igual à zero, e retas verticais não têm inclinação – você diz que a inclinação de uma reta vertical é *indefinida*.

Aqui está a fórmula para a inclinação:

$$\text{inclinação} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Escolha dois pontos na reta da Figura 5-9, digamos (1,8) e (3,14), e coloque-os na fórmula para calcular a inclinação:

$$\text{inclinação} = \frac{14-8}{3-1}$$
$$= \frac{6}{2}$$
$$= 3$$

Esse cálculo envolve, em certo sentido, um degrau da escada que vai até 2 e sobe em 6. A resposta 3 concorda com a inclinação que você pode ver na Figura 5-9.

Qualquer linha paralela a essa tem a mesma inclinação, e qualquer reta perpendicular a essa tem uma inclinação de $-\frac{1}{3}$ que é o *recíproco oposto* de 3.

Retas *paralelas* têm a mesma inclinação. Retas *perpendiculares* têm inclinações recíprocas opostas.

Desenhando linhas

Se você tem a equação da Reta, $y = x + 5$, mas não o seu gráfico, você pode desenhar a reta da maneira antiga ou com a sua calculadora gráfica. A maneira antiga é criar uma tabela de valores substituindo x por números e calculando y. Se você coloca 0 no lugar de x, y vai ser igual a 5; coloque 1 no lugar de x, e y vai ser igual a 8; coloque 2 no lugar de x, e y vai ser 11, e assim sucessivamente. A Tabela 5-1 mostra os resultados.

Tabela 5-1 **Pontos na reta y = 3x + 5**

x	0	1	2	3	4	----→
y	5	8	11	14	17	----→